ПРИКЛАДНЫЕ АСПЕКТЫ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

УДК 517.984

АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА СИСТЕМЫ ДВУХ БОЗОНОВ НА ТРЕХМЕРНОЙ РЕШЕТКЕ

Жаникул Ибрагимович Абдуллаев
д.ф.-м.н., профессор
Jabdullaev@mail.ru
г. Самарканд (Узбекистан)
Самаркандский государственный университет

Бердиёр Улугбекович Мамиров
ассистент
berdiyor@mail.ru
г. Самарканд (Узбекистан)
Самаркандский государственный университет

Аннотация. Рассматривается оператор Шредингера системы двух бозонов на трехмерной решетке Z^3, показано существование связанных состояний системы для определенных типов потенциалов и получены асимптотические формулы собственных значений оператора Шредингера.

Ключевые слова: Гамильтониан, связанное состояние, оператор Шредингера, полный квазиимпульс, собственное значение.

Динамика двух бозонова на трехмерной решетке Z^3 описывается гамильтонианом $\widehat{H}$, который действует в гильбертовом пространстве

$$\ell_2^{sym}(\mathrm{Z}^3\times\mathrm{Z}^3):=\{f\in\ell_2(\mathrm{Z}^3\times\mathrm{Z}^3):f(\mathbf{x},\mathbf{y})=f(\mathbf{y},\mathbf{x})\}$$

по формуле

$$\widehat{H}=\widehat{H}_0-\widehat{V}_2,$$

где свободный гамильтониан $\widehat{H}_0$ действует в $\left(\ell_2(\mathrm{Z}^3)\otimes\ell_2(\mathrm{Z}^3)\right)^{sym}$:

$$\widehat{H}_0=-\frac{1}{2m}\Delta\otimes I-\frac{1}{2m}I\otimes\Delta.$$

Здесь m означает массу бозонов, который в дальнейшем мы считаем равным единице, $I-$ единичный оператор в $\ell_2(\mathrm{Z}^3)$, Δ есть разностный оператор, описывающий перенос частицы с узла на соседний узел, т.е.

$$(\Delta\widehat{\psi})(\mathbf{x})=\sum_{j=1}^{3}[\widehat{\psi}(\mathbf{x}+\mathbf{e}_j)-2\widehat{\psi}(\mathbf{x})+\widehat{\psi}(\mathbf{x}-\mathbf{e}_j)],\quad \mathbf{x}\in\mathrm{Z}^3,\quad \widehat{\psi}\in\ell_2(\mathrm{Z}^3),$$

где $\mathbf{e}_1 = (1,0,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,0)$, $\mathbf{e}_3 = (0,0,1)$ – единичные орты в Z^3.

Взаимодействие двух частиц описывается оператором $\widehat{V}_2$:

$$(\widehat{V}_2\widehat{\psi})(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \widehat{v}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\widehat{\psi}(\mathbf{x},\mathbf{y}), \quad \widehat{\psi} \in \ell_2^{sym}(\mathrm{Z}^3 \times \mathrm{Z}^3).$$

Всюду в дальнейшем относительно функции $\widehat{v}$ предполагается, что

$$\widehat{v}(n,m,k) = \begin{cases} \overline{v}(n), & \text{если} \quad m = k = 0 \\ \overline{v}(|n|+1), & \text{если} \quad |m|+|k| = 1 \\ 0, & \text{если} \quad |m|+|k| \geq 2, \end{cases} \tag{1}$$

носитель которого принадлежит к трубе $D = \{\mathbf{x} = (n,m,k) \in \mathrm{Z}^3 : n \in \mathrm{Z}, |m|+|k| \leq 1\}$.

Здесь $\overline{v} : \mathrm{Z} \to \mathrm{P}$ – четная, убывающая функция на Z_+ (т.е., $\overline{v}(0) > \overline{v}(1) > \overline{v}(2) > \ldots$) и $\overline{v} \in \ell_1(\mathrm{Z})$.

Исследование связанных состояний гамильтониана $\widehat{H}$ сводится к изучению собственных значений семейства операторов $H(\mathbf{k})$ $\mathbf{k} \in \mathrm{T}^3$, $(-\pi,\pi]^3$, действующих в гильбертовом пространстве $L_2^e(\mathrm{T}^3) := \{ f \in L_2(\mathrm{T}^3) : f(-\mathbf{q}) = f(\mathbf{q})\}$ по формуле (см.[1-2])

$$(H(\mathbf{k})f)(\mathbf{q}) = \varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{q})f(\mathbf{q}) - \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathrm{T}^3} v(\mathbf{q}-\mathbf{s})f(\mathbf{s})d\mathbf{s}.$$

Невозмущенный оператор $H_0(\mathbf{k})$ есть оператор умножения на функцию

$$\varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}) = \varepsilon(\frac{\mathbf{k}}{2}+\mathbf{q}) + \varepsilon(\frac{\mathbf{k}}{2}-\mathbf{q}) = 2\sum_{j=1}^{3}\left[1-\cos\frac{k_j}{2}\cos q_j\right].$$

Для лучшего понимания результатов, приведем ядро v интегралъного оператора V, т.е. Фурье образ потенциала $\widehat{v}$ имеет вид:

$$v(\mathbf{p}) := (F\widehat{v})(\mathbf{p})\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sum \widehat{v}(\mathbf{n})e^{i(\mathbf{n},\mathbf{p})} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}[\overline{v}(0) + 2\overline{v}(1)\cos p_2 + 2\overline{v}(1)\cos p_3 +$$

$$+2\sum_{n=1}^{\infty}(\overline{v}(n)\cos np_1 + 2\overline{v}(n+1)\cos p_2\cos np_1 + 2\overline{v}(n+1)\cos p_3\cos np_1)].$$

Пользуясь формулой $\cos(p-q) = \cos p\cos q + \sin p\sin q$ и равенством

$$\int_{\mathrm{T}^3}\sin q\, f(\mathbf{q})d\mathbf{q} = 0 \quad \text{при любом} \quad f \in L_2^e(\mathrm{T}^3),$$

получим что оператор возмущения V с ядром $\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}v(\mathbf{p}-\mathbf{q})$ имеет вид:

$$(Vf)(\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathrm{T}^3} v(\mathbf{p}-\mathbf{q})\, f(\mathbf{q})d\mathbf{q} =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathrm{T}^3}\Big[\ \bar{v}(0) + 2\bar{v}(1)\cos p_2 \cos q_2 + 2\bar{v}(1)\cos p_3 \cos q_3 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\bar{v}(n)\cos np_1 \cos nq_1 +$$
$$+ 4\sum_{n=1}^{\infty}\bar{v}(n+1)[\cos np_1 \cos nq_1 \cos p_2 \cos q_2 + \sin np_1 \sin nq_1 \sin p_2 \sin q_2 +$$
$$+ \cos np_1 \cos nq_1 \cos p_3 \cos q_3 + \sin np_1 \sin nq_1 \sin p_3 \sin q_3]\ \Big] f(\mathbf{q})d\mathbf{q}. \qquad (2)$$

Обозначим через $L_2^{+}(\mathrm{T}) = \{ f \in L_2(\mathrm{T}) : f(p) = f(-p)\}$ и $L_2^{-}(\mathrm{T}) = \{ f \in L_2(\mathrm{T}) : f(-p) = -f(p)\}$ соответственно подпространства четных и нечетных функций. При этом

$$L_2^{e}(\mathrm{T}^3) = L_2^{+++}(\mathrm{T}^3) \oplus L_2^{+--}(\mathrm{T}^3) \oplus L_2^{-+-}(\mathrm{T}^3) \oplus L_2^{--+}(\mathrm{T}^3), \qquad (3)$$

где

$L_2^{+++}(\mathrm{T}^3) = L_2^{+}(\mathrm{T}) \otimes L_2^{+}(\mathrm{T}) \otimes L_2^{+}(\mathrm{T}),$ $\qquad L_2^{+--}(\mathrm{T}^2) = L_2^{+}(\mathrm{T}) \otimes L_2^{-}(\mathrm{T}) \otimes L_2^{-}(\mathrm{T})$

и

$L_2^{-+-}(\mathrm{T}^2) = L_2^{-}(\mathrm{T}) \otimes L_2^{+}(\mathrm{T}) \otimes L_2^{-}(\mathrm{T}),$ $\qquad L_2^{--+}(\mathrm{T}^3) = L_2^{-}(\mathrm{T}) \otimes L_2^{-}(\mathrm{T}) \otimes L_2^{+}(\mathrm{T}).$

Лемма 1. *Подпространства* $L_2^{+++}(\mathrm{T}^3),\ L_2^{+--}(\mathrm{T}^3),\ L_2^{-+-}(\mathrm{T}^3)$ *и* $L_2^{--+}(\mathrm{T}^3)$ *являются инвариантными относительно оператора* $H(\mathbf{k})$.

Мы будем изучать сужение оператора $H(\mathbf{k})$ в инвариантном подпространстве $L_2^{+++}(\mathrm{T}^3)$. Обозначим через $H^{+++}(k_1,k_2,k_3)$ сужение оператора $H(k_1,k_2,k_3)$ в инвариантном подпространстве $L_2^{+++}(\mathrm{T}^3)$. Действие оператора $H^{+++}(k_1,k_2,k_3)$ на элемент $f \in L_2^{+++}(\mathrm{T}^3)$ имеет вид:

$$H^{+++}(\mathbf{k}) f(\mathbf{p}) = \varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}) f(\mathbf{p}) - (V^{+++})(\mathbf{p}),$$

где

$$(V^{+++}f)(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{T^3}[\bar{v}(0) + 2\bar{v}(1)\cos p_2 \cos q_2 + 2\bar{v}(1)\cos p_3 \cos q_3 +$$
$$2\sum_{n=1}^{\infty}\bar{v}(n)\cos np_1 \cos nq_1 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\bar{v}(n+1)[\cos np_1 \cos nq_1 \cos p_2 \cos q_2 +$$
$$\cos np_1 \cos nq_1 \cos p_3 \cos q_3]] f(q)dq,\ f \in L_2^{+++}(T^3).$$

Система $\varphi_0^+(q)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\{\varphi_n^+(q)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nq\}_{n\in N}$ образует ортонормированный базис в $L_2^+(\mathrm{T})$. Обозначим через $L^+(n),\, n\in Z_+$ одномерное подпространство, натянутое на вектор $\varphi_n^+,\, n\in Z_+$. Известно, что пространство $L_2^+(\mathrm{T})$ разлагается в прямую сумму

$$L_2^+(\mathrm{T})=\sum_{n=0}^{\infty}\oplus L^+(n). \tag{4}$$

Разложение (4) порождает разложение

$$L_2^+(\mathrm{T})\otimes L_2^+(\mathrm{T})\otimes L_2^+(\mathrm{T})=\sum_{m=0}^{\infty}\oplus\{\sum_{n=0}^{\infty}\{\oplus L_2^+(n)\otimes L_2^+(m)\otimes L_2^+(\mathrm{T})\}\}=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\oplus\mathfrak{R}_{n,m}^{+3},$$

$$L_2^+(\mathrm{T})\otimes L_2^+(\mathrm{T})\otimes L_2^+(\mathrm{T})=\sum_{m=0}^{\infty}\oplus\{\sum_{n=0}^{\infty}\{\oplus L_2^+(n)\otimes L_2^+(\mathrm{T})\otimes L_2^+(m)\}\}=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\oplus\mathfrak{R}_{n,m}^{+2},$$

где $\mathfrak{R}_{n,m}^{+3}=L_2^+(n)\otimes L_2^+(m)\otimes L_2^+(\mathrm{T})$ и $\mathfrak{R}_{n,m}^{+2}=L_2^+(n)\otimes L_2^+(\mathrm{T})\otimes L_2^+(m)$.

Лемма 2. *Для любых $n,m\in Z_+$ подпространства $\mathfrak{R}_{n,m}^{+2}$ ($\mathfrak{R}_{n,m}^{+3}$) являются инвариантными относительно оператора $H(\pi,k_2,\pi)$ ($H(\pi,\pi,k_3)$).*

Операторы $H(\pi,k_2,\pi)$ и $H(\pi,\pi,k_3)$ являются унитарными и эквивалентными. Поэтому нам достаточно изучать одного из этих операторов. Для каждого $(n,m)\in Z_+\times Z_+$ обозначим через

$$H^+(\pi,\pi,k_3)|_{(n,m)}=I_n\otimes I_m\otimes[4I+H_0(k_3)-V_{nm}^+], \tag{5}$$

сужение оператора $H^+(\pi,\pi,k_3)$ в инвариантном подпространстве $\mathfrak{R}_{n,m}^{+3}$. Здесь I_n- единичный оператор в $L^+(n)$. $H^{+nm}(k_3):=4I+H_0(k_3)-V_{nm}^+$ есть одномерный двухчастичный оператор, действующий в $L_2^+(\mathrm{T})$ по формуле

$$(H^{+nm}(k_3)f)(p)=(4+\varepsilon_{k_3}(p))f(p)-(V_{nm}^+f)(p),\qquad f\in L_2^+(\mathrm{T}).$$

Заметим, что $V_{nm}^+=V^+|_{\mathfrak{R}_{n,m}^{+3}}=0,$ если $m\geq 2.$ Поэтому мы будем давать действия оператора V_{nm}^+ на элемент $f\in L_2^+(\mathrm{T})$ при $m=0{,}1.$

$$(V_{n0}^+f)(p)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathrm{T}}[\bar{v}(n)+2\bar{v}(n+1)\cos p\cos s]f(s)\mathrm{d}s.$$

$$(V_{n1}^+f)(p)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathrm{T}}\bar{v}(n+1)f(s)\mathrm{d}s.$$

Изучение собственных значений оператора $H^+(\pi,\pi,k_3)|_{(n,m)}$ в силу представления (5) сводится к изучению собственных значений оператора $H^{+nm}(k_3)$, т.е. трехмерная задача сводится к одномерной.

Теорема 1. *Для любого* $k_3 \in (-\pi, \pi)$ *оператор* $H^{+n1}(k_3)$, *имеет единственное невырожденное собственное значение*

$$z_{n1}^{+}(k_3) = 6 - \sqrt{\bar{v}^2(n+1) + 4\cos^2\frac{k_3}{2}}$$

соответствующее собственной функции

$$f_{n1}^{+++}(p) = \frac{C\cos p_1 \cos p_2}{6 - 2\cos\frac{k_3}{2}\cos p_3 - z_{n1}^{+}(k_3)} \in \mathfrak{R}_{n,1}^{+3},$$

где C *- произвольная константа.*

Ясно, что $H^{+nm}(-k_3) = H^{+nm}(k_3)$, поэтому можно, считать $k_3 \in [0,\pi]$. Обозначим через $k_3 \in \pi - 2\theta$, тогда из условия $k_3 \in [0,\pi]$ вытекает, что $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Теорема 2. *Для любого* $n \in Z_+$ *существует* $\beta_n > 0$ *такое, что для каждого* $\theta \in (0, \beta_n)$ *оператор* $H^{+n0}(\pi - 2\theta)$ *имеет два различных невырожденных собственных значений*

$z_n^{+}(\pi - 2\theta)$ *и* $z_{n+1}^{+}(\pi - 2\theta)$ *имеющих асимптотики*

$$z_n^{+}(\pi - 2\theta) = 6 - \bar{v}(n) - \frac{2}{\bar{v}(n) - \bar{v}(n+1)}\theta^2 + O(\theta^4), \qquad \theta \to 0,$$

$$z_{n+1}^{+}(\pi - 2\theta) = 6 - \bar{v}(n+1) - \frac{\bar{v}(n) - 3\bar{v}(n+1)}{\bar{v}(n+1)(\bar{v}(n) - \bar{v}(n+1))}\theta^2 + O(\theta^4), \qquad \theta \to 0$$

соответствующее собственной функциям

$$f_n^{+}(p) = \frac{(\alpha_1(n) + \beta_1(n)\cos p_3)\cos np_1}{6 - 2\cos\theta\cos p_3 - z_n^{+}(\pi - 2\theta)} \in \mathfrak{R}_{n,0}^{+3},$$

$$f_{n+1}^{+}(p) = \frac{(\alpha_2(n) + \beta_2(n)\cos p_3)\cos np_1}{6 - 2\cos\theta\cos p_3 - z_{n+1}^{+}(\pi - 2\theta)} \in \mathfrak{R}_{n,0}^{+3},$$

где $\alpha_1(n), \alpha_2(n), \beta_1(n), \beta_2(n)$ *- произвольные постоянные.*

Список литературы

1. Абдуллаев Ж.И., Мамиров Б.У. Асимптотика собственных значений двухчастичного дискретного оператора Шредингера // Теоретическая и математическая физика. №3. Т. 176. 2013. С.417-428.
2. Abdullayev J.I., Mamirov B.U. (2016) Bound states of the system of two fermions on the three-demensional lattice. Journal of Physics: Conference series 697 012022.
3. Abdullayev J.I. Muminov.Z. (2004) Infinite number of eigenvalues of the two-particle Schrödinger operator on the lattice. DAN. Uzbekistan, N.3, 4-8.

4. Абдуллаев Ж.И. Собственные значения двухчастичного оператора Шредингера на двумерной решетке // Узбекский математический журнал. №1. 2005. С.3-11.
5. Абдуллаев Ж.И. Принцип Бирмана-Швингера оператора Шредингера на решетке // Вестник СамГУ. №5. 2014.

THE ASYMPTOTICS FOR EIGENVALUES OF THE SCHRÖDINGER OPERATOR SYSTEM TWO BOSONS ON A THREE-DIMENSIONAL LATTICE

J.I. Abdullayev
Doc.Sci.(Phys.-Math.), professor
Jabdullaev@mail.ru
s.Samarkand
Samarkand State University

B.U. Mamirov
assistant
berdiyor@mail.ru
s.Samarkand
Samarkand State University

Summary. The Hamiltonian of a system of two bosons on a three-dimensional lattice is considered and shown the existence of bound states for some potentials and get asymptotic forms of the eigenvalues for Schrodinger operator.

Key words. Hamiltonian, bound state, Schrödinger operator, total quasimomentum, eigenvalue.

References

1. Abdullaev Z.I., Mamirov B.U. (2013) Asimptotika sobstvenny`kh znachenii` dvukhchastichnogo diskretnogo operatora Shredingera [Asymptotic behavior of the eigenvalues dvuhchastichnogo of the discrete Schrödinger operator] Theoretical and mathematical physics. №3. T. 176, pp. 417-428.
2. Abdullayev J.I., Mamirov B.U. (2016) Bound states of the system of two fermions on the three-demensional lattice. Journal of Physics: Conference series 697 012022.
3. Abdullayev J.I. Muminov.Z. (2004) Infinite number of eigenvalues of the two-particle Schrödinger operator on the lattice. DAN. Uzbekistan, N.3, 4-8.
4. Abdullaev Z.I. (2005) Sobstvenny`e znacheniia dvukhchastichnogo operatora Shredingera na dvumernoi` reshetke [The eigenvalues of the Schrödinger operator dvuhchastichnogo in a two-dimensional lattice] Uzbek mathematical journal. №1, pp. 3-11.
5. Abdullaev Z.I. (2014) Printcip Birmana-Shvingera operatora Shredingera na reshetke [The principle of Birman-Schwinger equation the Schrödinger operator on the lattice] SamGU Herald. №5.