УДК 517.925

О ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА, ГРУБЫХ В КРУГЕ ПУАНКАРЕ

Владимир Шлеймович Ройтенберг
к.ф.-м.н., доцент
vroitenberg@mail.ru
г. Ярославль

Ярославский государственный технический университет

Аннотация. В работе рассматриваются дифференциальные уравнения первого порядка $dy/dx = Q(x, y)$, правые части которых являются полиномами степени, не превосходящей числа *n*. Множество PE_n^1 таких уравнений отождествляется с (n+1)(n+2)/2-мерным арифметическим пространством коэффициентов полиномов. Уравнение $X \in \mathrm{PE}_n^1$ определяет векторное поле на плоскости $\mathbf{R}^2$, которое будем отождествлять с уравнением X . Оно не имеет ни особых точек, ни замкнутых траекторий. Поэтому фазовый портрет такого векторного поля естественно рассматривать на компактификации фазовой плоскости $\mathbf{R}^2$ в виде круга Пуанкаре **K**. Уравнение $X \in \mathrm{PE}_n^1$ назовем грубым, если существует такая его окрестность *U*, что для любого уравнения $\tilde{X}$ из U существует гомеоморфизм K, переводящий траектории уравнения X в траектории уравнения $\tilde{X}$. На границе круга Пуанкаре уравнение $X \in \mathrm{PE}_n^1$ имеет (бесконечно удаленные) особые точки. Получены условия, которым должна удовлетворять правая часть уравнения, чтобы все бесконечно удаленные особые точки были грубыми. Доказано, что уравнение $X \in \mathrm{PE}_n^1$ является грубым тогда и только тогда, когда все бесконечно удаленные особые точки являются грубыми и не существует выходящей сепаратрисы особой точки, являющейся входящей сепаратрисой другой особой точки. Множество всех грубых уравнений открыто и всюду плотно в пространстве PE_n^1.

Ключевые слова: полиномиальные дифференциальные уравнения первого порядка, полиномиальные векторные поля на плоскости, круг Пуанкаре, грубость, бесконечно удаленные особые точки, сепаратрисы.

Рассмотрение дифференциальных уравнений $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{Q(x, y)}{P(x, y)}$, где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ – полиномы, на проективной плоскости начато еще Пуанкаре и использовалось во многих работах, как теоретических, так и прикладных (см., например, [1 – 3]). В работах автора [4 – 9] они изучались с позиций типичности, грубости и теории бифуркаций.

С такой же точки зрения мы рассмотрим и дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = Q(x, y), \tag{1}$$

где

$$Q(x,y)=\sum_{m=0}^{n} Q_m(x,y)\,,\quad Q_m(x,y)=\sum_{k=0}^{m} b_{k,m-k}x^k y^{m-k}\,,\quad n\geq 2\,,$$

и соответствующее ему полиномиальное векторное поле $X(x,y)=\partial/\partial x+Q(x,y)\partial/\partial x$ на плоскости $\mathbf{R}^2$. Уравнение (1) и векторное поле X естественно отождествляются между собой и с арифметическим вектором $(b_{0,0},b_{1,0},b_{0,1},...,b_{n,0},...,b_{0,n})\in\mathbf{R}^{(n+1)(n+2)/2}$, а множество PE_n^1 всех уравнений вида (1), в правой части которых стоит многочлен степени $\leq n$, с пространством $\mathbf{R}^{(n+1)(n+2)/2}$ с евклидовой нормой $\|\cdot\|$.

Компактифицируем $\mathbf{R}^2$. Для этого рассмотрим в $\mathbf{R}^3$ гладкое подмногообразие – полусферу $\mathbf{K}:=\{(X,Y,Z)\in\mathbf{R}^3\mid X^2+Y^2+Z^2=1,\ Z\geq 0\}$. Она естественно отождествляется с *кругом Пуанкаре* $\mathbf{K}=\{(X,Y)\in\mathbf{R}^2\mid X^2+Y^2\leq 1\}$. Покроем $\mathbf{K}$ локальными картами (U_0,ξ_0), $(U_1^{\pm},\xi_1^{\pm})$, $(U_2^{\pm},\xi_2^{\pm})$:

$$U_0=\{(X,Y,Z)\in\mathbf{K}\mid Z\neq 0\},\ \xi_0(X,Y,Z)=(x,y)=(X/Z,Y/Z),$$

$$U_1^{+}=\{(X,Y,Z)\in\mathbf{K}\mid X>0\},\ U_1^{-}=\{(X,Y,Z)\in\mathbf{K}\mid X<0\},$$

$$\xi_1^{\pm}(X,Y,Z)=(u,z)=(Y/X,Z/X),\ U_2^{+}=\{(X,Y,Z)\in\mathbf{K}\mid Y>0\},$$

$$U_2^{-}=\{(X,Y,Z)\in\mathbf{K}\mid Y<0\},\ \xi_2^{\pm}(X,Y,Z)=(v,z)=(X/Y,Z/Y).$$

Будем считать, что $\mathbf{R}^2$ отождествлено с U_0 посредством отображения ξ_0.

Так как отображение $\xi_1^{\pm}\xi_0^{-1}$ задается формулами $u=y/x,\ z=1/x$, то векторное поле $X\big|_{U_1^{\pm}}$ в координатах (u,z) имеет вид $P_1^*(u,z)\partial/\partial u+Q_1^*(u,z)\partial/\partial z$, где

$$P_1^*(u,z)=-zu+zQ(1/z,u/z),\ Q_1^*(u,z)=-z^2.$$

Аналогично, векторное поле $X\big|_{U_2^{\pm}}$ в координатах $v=x/y,\ z=1/y$ имеет вид $P_2^*(v,z)\partial/\partial v+Q_2^*(v,z)\partial/\partial z$, где

$$P_2^*(v,z)=-vzQ(v/z,1/z)+z\,,\quad Q_2^*(v,z)=-z^2Q(v/z,1/z).$$

Рассмотрим теперь в $U_k^{\pm}$ ($k=1,2$) полиномиальное векторное поле

$$X_{U_k^{\pm}}=P_k^{**}\partial/\partial u+Q_k^{**}\partial/\partial z\,,$$

где при $z\neq 0$ $P_k^{**}=\sigma z^{n-1}P_k^*$, $Q_k^{**}=\sigma z^{n-1}Q_k^*$, а $\sigma=1$ в U_k^{+} и $\sigma=(-1)^{n-1}$ в U_k^{-}. В точках границы круга Пуанкаре $\partial\mathbf{K}$ ($z=0$) оно касается $\partial\mathbf{K}$. Траектории векторных полей $X\,|_{U_0\cap U_k^{\pm}}$ и $X_{U_k^{\pm}}\,|_{U_0\cap U_k^{\pm}}$ ($k=1,2$) совпадают. Нетрудно убедиться, что особые точки векторных полей $X_{U_1^{+}}$, $X_{U_1^{-}}$, $X_{U_2^{+}}$ и $X_{U_2^{-}}$, лежащие на экваторе и принадлежащие пересечениям их областей определения, совпадают. Следовательно, совпадают траектории векторных полей $X_{U_1^{\pm}}\,|_{U_1^{\pm}\cap U_2^{\pm}}$ и $X_{U_2^{\pm}}\,|_{U_2^{\pm}\cap U_2^{\pm}}$, $X_{U_2^{\pm}}\,|_{U_2^{\pm}\cap U_1^{+}}$ и $X_{U_1^{-}}\,|_{U_2^{\pm}\cap U_1^{-}}$. На траекториях, отличных от особых точек, совпадают и ориентации, заданные векторными полями. Поэтому можно определить *траекторию уравнения* X *в* $\mathbf{K}$ как связное подмножество $\mathbf{K}$, пересечения которого с U_0, $U_1^{\pm}$ и $U_2^{\pm}$ являются, соответственно, траекториями векторных полей X в $\mathbf{R}^2$, $X_{U_1^{\pm}}$ и $X_{U_2^{\pm}}$, с ориентацией на ней, индуцированной ориентацией на траекториях, перечисленных выше векторных полей. Граница круга Пуанкаре $\partial\mathbf{K}$ является инвариантным множеством – она состоит из траекторий.

Отождествив диаметрально противоположные точки $\partial\mathbf{K}$, получим из $\mathbf{K}$ проективную плоскость $\mathbf{RP}^2$. Траектории векторного поля X в $\mathbf{K}$ при этом перейдут в *траектории уравнения* X *в* $\mathbf{RP}^2$.

Уравнение $X \in \mathrm{PE}_n^1$ назовем *грубым в* $\mathbf{K}$ (*грубым в* $\mathbf{RP}^2$) если существует такая его окрестность $U(X)$ в PE_n^1, что для любого уравнения $\tilde{X} \in U(X)$ существует гомеоморфизм $h:\mathbf{K} \to \mathbf{K}$ ($h:\mathbf{RP}^2 \to \mathbf{RP}^2$, $h(\mathbf{R}^2) = \mathbf{R}^2$), переводящий траектории уравнения X в $\mathbf{K}$ (в $\mathbf{RP}^2$) в траектории уравнения $\tilde{X}$ в $\mathbf{K}$ (в $\mathbf{RP}^2$) с сохранением ориентации на них (на траекториях, принадлежащих $\mathbf{R}^2$).

Векторное поле $X_{U_1^{\pm}}$ имеет вид

$$X_{U_1^{\pm}} = \sigma(Q_n(1,u) + zR(u,z))\partial/\partial u - \sigma z^{n+1}\partial/\partial z,$$

где $R(u,z)$ – многочлен от u,z. Пусть $s^0 = (u_0,0)$ – особая точка векторного поля $X_{U_1^{\pm}}$ – бесконечно удаленная особая точка уравнения X. Тогда u_0 – нуль многочлена $Q_n(1,u) = b_{n,0} + b_{n-1,1}u + \ldots + b_{0,n}u^n$. Будем считать, что $\partial Q_n(1,u_0)/\partial u \neq 0$. Обозначим $\lambda := \partial Q_n(1,u_0)/\partial u$, $c := R(u_0,0)$. Перейдем в окрестности точки s^0 в $U_1^{\pm}$ к координатам w,z, где $w = u - u_0 + (c/\lambda)z$. В этих координатах

$$X_{U_1^{\pm}} = \sigma(\lambda w + R_1(w,z))\partial/\partial w - \sigma z^{n+1}\partial/\partial z, \tag{2}$$

где $R_1(w,z)$ – многочлен от w,z, не содержащий членов нулевого и первого порядков.

Рассмотрим в $\mathbf{R}^2$ систему дифференциальных уравнений

$$\dot{w} = \varepsilon(\lambda w + R_1(w,z)),\ \ \dot{z} = -\varepsilon z^{n+1},\ \ \varepsilon \in \{-1,1\}. \tag{3}$$

Согласно теореме 65 книги [1] для системы (3) особая точка $O = (0,0)$ при четном n будет устойчивым (неустойчивым) узлом, если $\lambda < 0$, $\varepsilon > 0$ ($\lambda < 0$, $\varepsilon < 0$), и седлом, входящие (выходящие) сепаратрисы которого принадлежат прямой $z = 0$, при $\lambda > 0$, $\varepsilon < 0$ ($\lambda > 0$, $\varepsilon > 0$), при нечетном n седло-узлом с устойчивым (неустойчивым) параболическим сектором, принадлежащим полуплоскости $z \geq 0$, если $\varepsilon > 0$, $\lambda < 0$ ($\varepsilon < 0, \lambda < 0$), и полуплоскости $z \leq 0$, если $\varepsilon < 0$, $\lambda > 0$ ($\varepsilon > 0, \lambda > 0$).

Особую точку $s^0 = (u_0,0)$, поля $X_{U_1^+}$ ($X_{U_1^-}$) назовем *устойчивым (неустойчивым) полуузлом*, если $\lambda < 0$ (при четном n $\lambda < 0$, при нечетном n $\lambda > 0$). Из поведения траекторий системы (3) в окрестности точки O следует, что все траектории поля $X_{U_1^+}$ ($X_{U_1^-}$), начинающиеся в достаточно малой окрестности устойчивого (неустойчивого) полуузла, ω-предельны (α-предельны) к нему (рис. 1).

Особую точку $s^0=(u_0,0)$ поля $X_{U_1^+}$ ($X_{U_1^-}$) назовем *полуседлом,* если $\lambda>0$ (при четном n $\lambda>0$, при нечетном n $\lambda<0$). Из поведения траекторий системы (3) в окрестности точки O следует, что для полуседла s^0 поля $X_{U_1^+}$ ($X_{U_1^-}$) имеется единственная траектория, не принадлежащая экватору и ω(α)-предельная к s^0 - его *входящая (выходящая) сепаратриса*, и нет траекторий α (ω)-предельных к s^0 (рис.1).

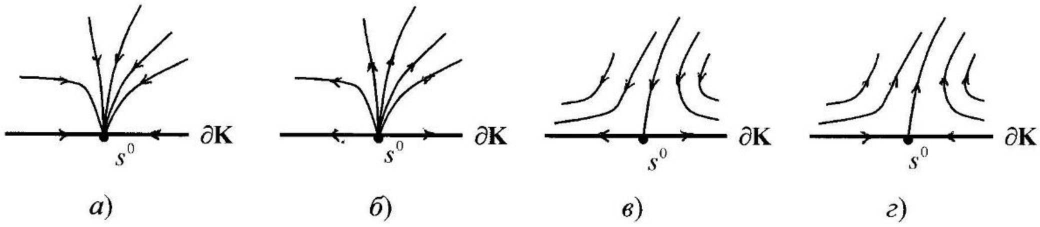

Рис. 1. ***а*) устойчивый полуузел, *б*) неустойчивый полуузел,**
***в*) и *г*) полуседла**.

Векторное поле $X_{U_2^\pm}$ при $n\ge 2$ имеет вид

$$X_{U_2^\pm}=\sigma(-vQ_n(v,1)+zR_2(v,z))\partial/\partial v-\sigma z(Q_n(v,1)+zR_3(v,z))\partial/\partial z,$$

где $R_2(v,z)$ и $R_3(v,z)$ – многочлены.

Точка $p^\pm$ с координатами $v=z=0$ является особой точкой поля $X_{U_2^\pm}$. При $Q_n(0,1)=b_{0n}\neq 0$ матрица линейной части поля в этой точке имеет вид $\begin{pmatrix}-\sigma b_{0,n} & * \\ 0 & -\sigma b_{0,n}\end{pmatrix}$.

Следовательно, все траектории поля $X_{U_2^\pm}$, начинающиеся в некоторой окрестности точки $p^\pm$, или ω-предельны, или α-предельны к $p^\pm$. Поэтому ее тоже назовем, соответственно, устойчивым или неустойчивым полуузлом.

Обозначим Σ^0 множество уравнений из PE_n^1 со следующими свойствами.

1) Все бесконечно удаленные особые точки в $\mathbf{K}$ являются полуузлами или полуседлами.

2) Не существует сепаратрис, идущих из полуседла в полуседло.

Теорема. *Множество* Σ^0 *совпадает с множеством уравнений, грубых в* $\mathbf{K}$ (*в* $\mathbf{RP}^2$). *Оно открыто и всюду плотно в* PE_n^1.

Доказательство. Докажем плотность Σ^0 в PE_n^1. Везде далее мы будем рассматривать ориентированные траектории векторных полей из PE_n^1 в $\mathbf{K}$.

Пусть $X^0=(b_{0,0},b_{1,0},b_{0,1},...,b_{n,0},...,b_{0,n})\in \mathrm{PE}_n^1\setminus\Sigma^0$. Зададим число $\varepsilon>0$. Рассмотрим уравнение

$$X^{\alpha,\beta,\gamma} = (b_{0,0}+\gamma,\, b_{1,0},\, b_{0,1},\ldots,b_{n,0}-\beta, b_{n-1,1},\ldots,b_{1,n-1},\, b_{0,n}+\alpha) \in \mathrm{PE}_n^1 .$$

Выберем число $\delta > 0$ так, чтобы $\left\| X^{\alpha,\beta,\gamma} - X^0 \right\| < \varepsilon$, если $|\alpha| < \delta$, $|\beta| < \delta$, $|\gamma| < \delta$. Плотность Σ^0 в PE_n^1 будет доказана, если мы найдем α, β и γ, для которых $X^{\alpha,\beta,\gamma} \in \Sigma^0$. При достаточно малом $\alpha \in (0,\delta)$ $b_{0,n}+\alpha \neq 0$. Фиксируем такое α. По теореме Сарда [10] существует некритическое значение $\beta \in (0,\delta)$ функции $b_{n,0} + b_{n-1,1}u + \ldots + (b_{0,n}+\alpha)u^n$, то есть многочлен $b_{n,0} + b_{n-1,1}u + \ldots + (b_{0,n}+\alpha)u^n - \beta$ имеет только простые (действительные) нули. Фиксируем такое β. У уравнения $X^{\alpha,\beta,0}$, все особые точки – либо полуузлы, либо полуседла. Пусть уравнение $X^{\alpha,\beta,0}$ имеет вид $\dfrac{dy}{dx} = \tilde{Q}(x,y)$. Если это уравнение не имеет сепаратрис, идущих из полуседла в полуседло, то оно принадлежит Σ^0.

Пусть $X^{\alpha,\beta,0}$ имеет сепаратрисы L_i^0 ($i = 1,\ldots,p$), идущие из полуседла s_-^i в полуседло s_+^i. Они задаются уравнениями $y = y_i(x),\, x \in \mathbf{R}$. Уравнение $X^{\alpha,\beta,\gamma}$: $\dfrac{dy}{dx} = \tilde{Q}(x,y) + \gamma$, $\gamma \in (0,\delta)$, имеет те же особые точки и того же типа, что и уравнение $X^{\alpha,\beta,0}$.

Из (2) по теореме о центральном многообразии [11] следует, что найдутся такие числа $\delta_1 \in (0,\delta)$ и $\omega > 0$, что векторное поле $X^{\alpha,\beta,\gamma}_{U_1^-}, \gamma \in (-\delta_1,\delta_1)$, имеет локальные инвариантные многообразия, задаваемые в карте U_1^- (U_1^+) уравнениями

$$u = w_i^-(z,\gamma),\ z \in (-2\omega, 0]\ \ (u = w_i^-(z,\gamma),\ z \in [0,\, 2\omega)),\ i = 1,\ldots,p,$$

где w_i^- (w_i^+) – гладкие функции, а точка $(w_i^-(0,\gamma),0)$ ($(w_i^+(0,\gamma),0)$) совпадает с полуседлом s_-^i (s_+^i). Точка $q_i^-(\gamma)$ ($q_i^+(\gamma)$) с координатами $(w_i^-(-\omega,\gamma),-\omega)$ ($(w_i^+(\omega,\gamma),\omega)$) принадлежит выходящей (входящей) сепаратрисе $L_i^{(-),\gamma}$ ($L_i^{(+),\gamma}$) полуседла s_-^i (s_+^i) уравнения $X^{\alpha,\beta,\gamma}$.

Точки $q_i^-(0)$ и $q_i^+(0)$, $i = 1,\ldots,p$, принадлежат одной траектории L_i^0 уравнения $X^{\alpha,\beta,0}$. Из непрерывной зависимости решений уравнения $X^{\alpha,\beta,\gamma}, \gamma \in (-\delta_2,\delta_2)$, от начальных данных и параметра γ и из вида векторного поля $X^{\alpha,\beta,\gamma}_{U_1^\pm}$ следует, что число $\delta_2 \in (0,\delta_1)$ и окрестности V_i^- и V_i^+ точек $q_i^-(0)$ и $q_i^+(0)$, $i = 1,\ldots,p$, можно выбрать так, что все траектории $X^{\alpha,\beta,\gamma}$, начинающиеся в $V_i^-(V_i^+)$, $\omega(\alpha)$-предельны либо к полуседлу s_+^i (s_-^i) либо к одному из полуузлов «соседних» с s_+^i (s_-^i) на $\partial\mathbf{K}$.

Уменьшив при необходимости δ_2, получим аналогично, что сепаратрисы полуседел, идущие в полуузлы при $\gamma = 0$, идут туда же и при всех $\gamma \in (-\delta_2,\delta_2)$. Так как $q_i^-(\gamma)$ и $q_i^+(\gamma)$ непрерывно зависят от γ, то число $\delta_3 \in (0,\delta_2)$ можно выбрать так, что $q_i^\pm(\gamma) \in V_i^\pm$, $i = 1,\ldots,p$. Тогда выходящая (входящая) сепаратриса $L_i^{(-),\gamma}$ (

$L_i^{(+),\gamma}$) полуседла s_-^i (s_+^i) уравнения $X^{\alpha,\beta,\gamma}$, $0<\gamma<\delta_3$, либо совпадает с $L_i^{(+),\gamma}$ ($L_i^{(-),\gamma}$), либо ω(α)-предельна к полуузлу.

Покажем, что ω(α)-предельна к s_+^i (s_-^i) она быть не может.

Предположим, что при некоторых i и $\gamma\in(0,\delta_3)$ $L_i^{(-),\gamma}=L_i^{(+),\gamma}$. Обозначим

$G_+=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2: y>y_i(x),\ x\in\mathbf{R}\}$, $G_-=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2: y<y_i(x),\ x\in\mathbf{R}\}$.

Так как производная функции $y-y_i(x)$ по направлению векторного поля $X^{\alpha,\beta,\gamma}$, $0<\gamma<\delta_3$, в точках сепаратрисы L_i^0, то есть при $y-y_i(x)=0$, равна γ и потому положительна, то во всех точках L_i^0 положительные (отрицательные) полутраектории входят G_+ (G_-). Поэтому логически возможны следующие варианты: (а) $L_i^{(\pm),\gamma}$ лежит в G_+, (б) $L_i^{(\pm),\gamma}$ лежит в G_-, (в) $L_i^{(\pm),\gamma}$ пересекается с L_i^0 в единственной точке $M_0=(x_0,y_i(x_0))$, причем точки $L_i^{(\pm),\gamma}$ с координатой $x<x_0$ ($x>x_0$) лежат в G_- (G_+).

В случае (а) (соответственно, (б)) все положительные (отрицательные) полутраектории траектории уравнения $X^{\alpha,\beta,\gamma}$, начинающиеся в области, ограниченной простой замкнутой кривой $L_i^0\cup L_i^{(\pm),\gamma}\cup\{s_-^i,s_+^i\}$, не выходят из нее, и потому ω (α)-предельны к особой точке s_+^i (s_-^i). Но это невозможно. В случае (в) все положительные полутраектории уравнения $X^{\alpha,\beta,\gamma}$, начинающиеся в области, ограниченной простой замкнутой кривой, составленной из точек L_i^0 и $L_i^{(\pm),\gamma}$ с координатой $x\ge x_0$ и из точки s_+^i, не выходят из нее. Это также приводит к противоречию.

Таким образом, для уравнения $X^{\alpha,\beta,\gamma}$, $0<\gamma<\delta_3$, выходящие сепаратрисы полуседел не совпадают с входящими сепаратрисами и потому $X^{\alpha,\beta,\gamma}\in\Sigma^0$. Плотность Σ^0 в PE_n^1 доказана.

Докажем, что из грубости уравнения $X\in\mathrm{PE}_n^1$ следует, что $X\in\Sigma^0$. Пусть это не так: $X\in\mathrm{PE}_n^1\setminus\Sigma^0$. Тогда имеет место один из четырех случаев:

(i) Все особые точки – полуузлы и полуседла; существует сепаратриса, идущая из полуседла в полуседло.

(ii) $b_{0,n}\ne 0$; многочлен $Q_n(1,u)=b_{n,0}+b_{n-1,1}u+\ldots+b_{0,n}u^n$ имеет нуль четной кратности.

(iii) $b_{0,n}\ne 0$; многочлен $Q_n(1,u)=b_{n,0}+b_{n-1,1}u+\ldots+b_{0,n}u^n$ не имеет нулей четной кратности и хотя бы один нуль имеет кратность ≥ 3.

(iv) $b_{0,n}=0$.

Пусть $U(X)$ – окрестность уравнения X, фигурирующая в определении грубости. Так как Σ^0 плотно в PE_n^1, то существует уравнение $\tilde{X}\in\Sigma^0\cap U(X)$. Пусть $h:\mathbf{K}\to\mathbf{K}$ – гомеоморфизм, фигурирующий в определении грубости. В случае (i) h

отображает полуседла уравнения X в полуседла уравнения $\tilde{X}$, а сепаратрису, соединяющую два полуседла уравнения X, в сепаратрису, соединяющую два полуседла уравнения $\tilde{X}$. Получаем противоречие с тем, что $\tilde{X} \in \Sigma^0$.

Рассмотрим случай (ii). Так как гомеоморфизм $h\big|_{\partial\mathbf{K}}:\partial\mathbf{K} \to \partial\mathbf{K}$ сохраняет ориентацию на траекториях, то он не может переводить особую точку, соответствующую нулю четной кратности, в полуседло или в полуузел. Также имеем противоречие.

Рассмотрим случай (iii) . Пусть u_0 – нуль $Q_n(1,u)$ кратности $2k+1$, $k \ge 1$. Тогда $Q_n(1,u) = (u-u_0)D(u)$, где $D(u)$ – многочлен, для которого u_0 – нуль кратности $2k$. При $\mu > 0$ для многочлена $A^\mu(u) = (u-u_0+\mu)D(u)$ u_0 – также нуль кратности $2k$. Запишем $A^\mu(u)$ в виде

$$A^\mu(u) = b_{n,0} + c_0\mu + (b_{n-1,1} + c_1\mu)u + \ldots + (b_{1,n-1} + c_{n-1}\mu)u^{n-1} + b_{0,n}u^n .$$

Обозначим

$$Q_n^\mu(x,y) := (b_{n,0} + c_0\mu)x^n + (b_{n-1,1} + c_1\mu)x^n y + \ldots + (b_{1,n-1} + c_{n-1}\mu)xy^{n-1} + b_{0,n}y^n \; .$$

Тогда $Q_n^\mu(1,u) = A^\mu(u)$. При достаточно малом $\mu > 0$ уравнение $\dfrac{dy}{dx} = \tilde{Q}^\mu(x,y)$, где $\tilde{Q}^\mu(x,y)$ получается из $Q(x,y)$ заменой $Q_n(x,y)$ на $Q_n^\mu(x,y)$, принадлежит $U(X)$ и потому является грубым. Но это невозможно, так как u_0 – нуль $Q_n^\mu(1,u)$ четной кратности $2k$.

Рассмотрим случай (iv). Уравнение X^μ: $\dfrac{dy}{dx} = Q(x,y) + \mu xy^{n-1}$ при достаточно малом $\mu > 0$ принадлежит $U(X)$ и потому является грубым. Ограничение векторного поля $X^\mu_{U_2^\pm}$ на $U_2^\pm \cap \partial\mathbf{K}$ имеет вид

$$-\sigma v(Q_n(v,1) + \mu v)\partial/\partial v = -\sigma((b_{1,n-1} + \mu)v^2 + b_{2,n-2}v^3 + \ldots + b_{n,0}v^{n+1})\partial/\partial v \, .$$

При достаточно малом $\mu > 0$ точка с координатой $v = 0$ будет для него двукратной особой точкой. Как и в случае (ii) получаем противоречие.

Таким образом, предположение, что грубое уравнение принадлежит $\mathrm{PE}_n^1 \setminus \Sigma^0$, приводит к противоречию. Поэтому из грубости уравнения следует, что оно принадлежит множеству Σ^0.

Пусть $s_i(X)$, $i = 1,\ldots,N$, – особые точки уравнения $X \in \Sigma^0$. Уравнение $\tilde{X}$ из достаточно малой окрестности $U(X)$ уравнения $X \in \Sigma^0$ имеют особые точки $s_i(\tilde{X})$, $i = 1,\ldots,N$, гладко зависящие от $\tilde{X}$, совпадающие с $s_i(X)$ при $\tilde{X} = X$ и имеющие тот же тип, что и при $\tilde{X} = X$. Из теоремы о центральном многообразии [11] следует, что существуют локальные инвариантные многообразия полуседел $s_k(\tilde{X})$, гладко зависящие от $\tilde{X}$. Следовательно, если для уравнения X сепаратриса полуседла

$s_k(X)$ шла в полуузел $s_j(X)$, то и у уравнения $\tilde{X}$ из достаточно малой окрестности $U(X)$ сепаратриса полуседла $s_k(\tilde{X})$ идет в полуузел $s_j(X)$. Поэтому Σ^0 открыто, и аналогично [2] строится гомеоморфизм $h: \mathbf{K} \to \mathbf{K}$, переводящий ориентированные траектории уравнения X в ориентированные траектории уравнения $\tilde{X}$. Его можно сделать переводящим диаметрально противоположные точки $\partial\mathbf{K}$ в диаметрально противоположные точки и потому продолжить до гомеоморфизма $h: \mathbf{RP}^2 \to \mathbf{RP}^2$, отображающий траектории уравнения X в $\mathbf{RP}^2$ на траектории уравнения $\tilde{X}$ в $\mathbf{RP}^2$. Тем самым, уравнения $X \in \Sigma^0$ являются грубыми как в $\mathbf{K} \to \mathbf{K}$, так и в $\mathbf{RP}^2$.

Уравнения, грубые в $\mathbf{RP}^2$, конечно, являются грубыми и в $\mathbf{K}$. Это замечание завершает доказательство теоремы.

Список литературы

1. Качественная теория динамических систем второго порядка / А.А. Андронов, Е.А.Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер. М.: Наука. 1966.
2. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости / А.А. Андронов, Е.А.Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер. М.: Наука. 1967.
3. Тлячев В.Б. Полиномиальные векторные поля на плоскости. Избранные вопросы / В.Б. Тлячев, А.Д. Ушхо, Д.С. Ушхо. Майкоп: Изд-во АГУ. 2012.
4. Ройтенберг В.Ш. О типичных полиномиальных векторных полях на плоскости // Вестник Адыгейского государственного университета. Серия 4: Естественно-математические и технические науки. 2014. № 4 (147). С. 13–21.
5. Ройтенберг В.Ш. Грубость полиномиальных векторных полей в окрестности экватора сферы Пуанкаре // Вестник Костромского государственного университета. 2014. Т. 20. № 7. С. 26–30.
6. Ройтенберг В.Ш. Полиномиальные векторные поля первой степени негрубости в окрестности экватора сферы Пуанкаре // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып.10. Ярославль: Изд. дом ЯГТУ. 2015. С. 78-91.
7. Ройтенберг В.Ш. О связных компонентах множества полиномиальных векторных полей, грубых в окрестности экватора сферы Пуанкаре // Вестник Адыгейского государственного университета. Серия: Естественно-математические и технические науки. 2015. № 4 (171). С. 22-29.
8. Ройтенберг В.Ш. О рождении предельных циклов полиномиальной системы из «бесконечности» // Вестник Адыгейского государственного университета. Серия: Естественно-математические и технические науки. 2017. №1 (196). С. 13–18.
9. Ройтенберг В.Ш. О бифуркациях бесконечно удаленного тройного предельного цикла полиномиального векторного поля // Continuum. Математика. Информатика. Образование. 2017. №4. С. 16–25.
10. Хирш М. Дифференциальная топология. М.: Мир. 1979.
11. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 1 / Л.П. Шильников, А.Л. Шильников, Д.В. Тураев, Л. Чуа. Москва–Ижевск: ИКИ. 2004.

ON FIRST-ORDER POLYNOMIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS THAT ARE STRUCTURALLY STABLE IN THE POINCARÉ CIRCLE

V. Roitenberg
Cand. Sci. (Phys.–Math.), associate professor
vroitenberg@mail.ru
Yaroslavl

Yaroslavl State Technical University

Summary. The paper deals with differential equations of the first order $dy/dx = Q(x, y)$, the right-hand sides of which are polynomials of degree not exceeding a number n. The set PE_n^1 of such equations is identified with the $(n+1)(n+2)/2$-dimensional arithmetic space of the coefficients of polynomials. The equation $X \in \mathrm{PE}_n^1$ defines a vector field in $\mathbf{R}^2$, which we shall identify with the equation X. It has neither singular points nor closed trajectories. Therefore, it is natural to consider the phase portrait of such a vector field on the compactification of the phase plane in the form of the Poincaré circle $\mathbf{K}$. An equation $X \in \mathrm{PE}_n^1$ is said to be structurally stable if there exists a neighborhood U of it such that for any equation $\tilde{X} \in U$ there exists a homeomorphism $\mathbf{K}$ taking the trajectories of the equation X to the trajectories of the equation $\tilde{X}$. On the boundary of the Poincaré circle, the equation has (infinitely far) singular points. Conditions are obtained which the right-hand side of the equation must satisfy, so that all the infinitely far singular points are structurally stable. It is proved that the equation $X \in \mathrm{PE}_n^1$ is structurally stable if and only if all infinitely far singular points are structurally stable and there are no double separatrixes of singular points. The set of structurally stable equations is open and everywhere dense in PE_n^1.

Keywords: first-order polynomial differential equations, planar polynomial vector fields, Poincaré circle, structural stability, infinitely far singular points, separatrixes.

References

1. Andronov A.A., Leontovich E.A., Gordon I.I., Maier A.G. (1966) Kachestvennaja teorija dinamicheskih sistem vtorogo porjadka [The qualitative theory of dynamical systems of second order]. Moskva. Nauka.
2. Andronov A.A., Leontovich E.A., Gordon I.I., Maier A.G. (1967) Teorija bifurkacij dinamicheskih sistem na ploskosti [The theory of bifurcations of dynamical systems on a plane]. Moskva. Nauka.
3. Tljachev V.B., Ushho A.D., Ushho D.S. (2012) Polinomial'nye vektornye polja na ploskosti. Izbrannye voprosy [Polynomial vector fields on the plane. Selected issues]. Majkop: AGU.
4. Roitenberg V. (2014) O tipichnyh polinomial'nyh vektornyh poljah na ploskosti [On generic polynomial vector fields on a plane]. Vestnik Adygejskogo gosudarstvennogo universiteta. Serija 4: Estestvenno-matematicheskie i tehnicheskie nauki. 2014, no. 4 (147), pp. 13–21.

5. Roitenberg V. (2014) Grubost' polinomial'nyh vektornyh polej v okrestnosti jekvatora sfery Puankare [Structural stability of polynomial vector fields in a neighborhood of the equator of the Poincare sphere] Vestnik Kostromskogo gosudarstvennogo universiteta. 2014, vol. 20, no. 7, pp. 26–30.
6. Roitenberg V. (2015) Polinomial'nye vektornye polja pervoj stepeni negrubosti v okrestnosti jekvatora sfery Puankare [Polynomial vector fields of first order instability in a neighborhood of the equator of the Poincare sphere]. Matematika i estestvennye nauki. Teorija i praktika: Mezhvuzovskij sbornik nauchnyh trudov. No. 10. Jaroslavl': JaGTU, 2015, pp. 78-91.
7. Roitenberg V. (2015) O svjaznyh komponentah mnozhestva polinomial'nyh vektornyh polej, grubyh v okrestnosti jekvatora sfery Puankare [On connected components of the set of structurally stable polynomial vector fields in a neighborhood of the equator of the Poincare sphere] Vestnik Adygejskogo gosudarstvennogo universiteta. Serija: Estestvenno-matematicheskie i tehnicheskie nauki. 2015, no. 4 (171), pp. 22-29.
8. Roitenberg V. (2017) O rozhdenii predel'nyh ciklov polinomial'noj sistemy iz «beskonechnosti» [On the generation of limit cycles of a polynomial system from the infinity]. Vestnik Adygejskogo gosudarstvennogo universiteta. Serija: Estestvenno-matematicheskie i tehnicheskie nauki. 2017, no. 1 (196), pp. 13–18.
9. Roitenberg V. (2017) O bifurkacijah beskonechno udalennogo trojnogo predel'nogo cikla polinomial'nogo vektornogo polja [On bifurcations of an infinitely remote triple cycle of a polynomial vector field]. Continuum. Matematika. Informatika. Obrazovanie. 2017. №4, pp. 16–25.
10. Hirsh M. (1979) Differencial'naja topologija [Differential Topology]. Moskva: Mir.
11. Shilnikov L.P., Shilnikov A.L., Turaev D.V. Chua L. (2004) Metody kachestvennoj teorii v nelinejnoj dinamike. Chast' 1 [Methods of qualitative theory in nonlinear dynamics. Part 1]. Moskva–Izhevsk: IKI.

УДК 658.512

ФОРМИРОВАНИЕ МАССИВА ДИДАКТИЧЕСКИХ ЕДИНИЦ ДЛЯ СИНТЕЗА УЧЕБНОГО ПЛАНА ВУЗА

Светлана Юрьевна Пичковская
ассистент
spichkovskaya@mail.ru
г. Красноярск

Сибирский федеральный университет

Аннотация. В рамках нового подхода к синтезу учебного плана вуза, основанного на применении массива дидактических единиц, даются рекомендации по формированию данного массива. Приведены доводы, доказывающие актуальность выбора данного подхода к синтезу учебного плана вуза, основанные на требованиях Федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования по направлениям бакалавриата, специалитета и магистратуры. Рассмотрены два метода (ручной и автоматический) формирования массива дидактических единиц, их отличия, преимущества и недостатки. Описаны правила формирования массива дидактических единиц, касающиеся процесса составления перечня учебных дисциплин, входящих в синтезируемый учебный план, перечня дидактических единиц, входящих в учебный план, вариантов нумерации и буквенного обозначения элементов массива, наименований дидактических единиц. Уделено внимание