learning and data analysis. №7. T. 1, pp. 891-901.
4. Jumanov I.I., Akhatov A.R. (2010) The control of information transfer reliability in intellectual control systems on the basis of statistical redundancy // Sixth World Conference on Intellectual Systems for Industrial Automation, Uzbekistan, TSTU. Tashkent. p. 70-75.

УДК 513.7

СТЕПЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Ахмаджон Солеев
д.ф.-м.н., профессор
asoleev@yandex.ru
Самарканд, Узбекистан

Самаркандский государственный университет, Узбекистан

Аннотация. В работе рассматривается степенные преобразования, которые преобразуют нелинейные алгебраические уравнения или системы нелинейных алгебраических уравнений в уравнения или системы алгебраических уравненний с меньшей переменной. Эти преобразования делают геометрию показателей степеней более содержательной. Показаны изменения геометрических конструкций после указанных преобразований. Приведены понятия размерности системы алгебраических уравнений на основе построения многогранников Ньютона и нормальных конусов его граней. Построения многогранников Ньютона и нормальных конусов его граней рассматривались в работах А.Д.Брюно (1980), А.Солеева (1982), А.Г.Хованского (1983). Расмотрены некоторые существенные свойства степенных преобразований. Доказано, что если размерность системы равна d<n, то существует унимодулярная матрица α такая, что степенным преобразованием с матрицей α и подходящими сокращениями эта система приводится к системе уравнений относительно *d* переменных. Также предложен алгоритм нахождения унимодулярных матриц степенных преобразований. В конце приведены конкретные примеры.

Ключевые слова: Степенные преобразования, системы нелинейных алгебраических уравнений, размерность системы, линейные пространства, многогранники Ньютона, нормальные конусы, унимодулярные матрицы.

Рассмотрим преобразования системы

$$f_i(X) \equiv \sum_{j=1}^{k_i} a_{ij} X^{Q_j^i} = 0, \quad i = 1, \dots, m, \tag{1}$$

которым в пространстве R^n показателей степеней Q соответствуют параллельные переносы (для каждого f_i свой) и афинные преобразования (одно для всех f_i).

Эти преобразования делают геометрию показателей степеней [Брюно, Солеев, 1991: 89] более содержательной и дают способ для решения определённых систем.

Отыскание тех решений системы (1), у которых одна из координат тождественно равна нулю, будем считать решенной задачей, так как она приводится к задаче аналогичной исходной, но с меньшей размерностью. Поэтому будем искать решения системы (1) для которых ни одна координата не равна нулю тождественно. Для таких решений в каждом из уравнений системы (1) можно производить сокращение на любое произведение степеней координат. Если в i-м уравнении сделать сокращение на $X^{\overline{Q}^i}$, то в нем векторные показатели степени станут равными $\tilde{Q} = Q - \overline{Q}^i$, т.е. D_i параллельно переносится на вектор $-\overline{Q}^i$.

Пусть

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

– квадратная матрица с вещественными элементами α_{ij}, и $\det\alpha \neq 0$. Преобразование

$$\left.\begin{array}{ccccc} y_1 & = & x_1^{\alpha_{11}} & \dots & x_n^{\alpha_{1n}}, \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ y_n & = & x_1^{\alpha_{n1}} & \dots & x_n^{\alpha_{nn}} \end{array}\right\} \qquad (2)$$

называется *степенным преобразованием* с матрицей α. Обратное преобразование

$$\left.\begin{array}{ccccc} x_1 & = & y_1^{\beta_{11}} & \dots & y_n^{\beta_{1n}}, \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_n & = & y_1^{\beta_{n1}} & \dots & y_n^{\beta_{nn}} \end{array}\right\} \qquad (3)$$

также является степенным преобразованием с матрицей.

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{n1} & \dots & \beta_{nn} \end{pmatrix} = \alpha^{-1}.$$

Отметим некоторые свойства степенного преобразования (2).

1. При преобразовании (2), $X^Q = Y^{Q'}$, где

$$Q' = \beta^* Q \qquad (4)$$

и β^* – транспонированная матрица β. Итак, при степенном преобразовании (2) векторные показатели испытывают линейное преобразование. Это справедливо и для суммы

$$f(X) = \sum_{Q \in D} a_Q X^Q, \qquad (5)$$

которая при преобразовании (3) перейдет в сумму

$$f(X) = f'(Y) = \sum_{Q' \in D'} a_{Q'} Y^{Q'}, \qquad (6)$$

где $Q' = \beta^* Q$, $D' = \beta^* D$, $a_Q = a_{Q'}$. Геометрические конструкция множеств D и D' также связаны тем же линейным преобразованием (4). Поэтому при преобразовании (2) укорочение переходит в укорочение, т.е. операция выделения укорочений перестановочна со степенным преобразованием.

2. При преобразовании (2) кривая

$$x_i = b_i \tau^{p_i}(1+o(1)), \quad \sum p_i^2 \neq 0, i = 1, \cdots, n, (\tau \to \infty) \tag{7}$$

с векторным порядком $P = (p_1, \ldots, p_n)$ перейдет в кривую

$$y_i = b_i' \tau^{p_i'}(1+o(1)), \quad i = 1, \ldots, n$$

с векторным порядком $P' = \alpha P.$ (8)

Следовательно, в пространстве R_*^n порядков P степенное преобразование (2) индуцирует линейное преобразование (8). Это преобразование сопряжено преобразованию (4). Поэтому пространства R^n и R_*^n оказываются сопряженными, и скалярное произведение $\langle P, Q \rangle$ сохраняется при степенном преобразовании (2).

3. Преобразование (2) взаимно однозначно отображает множество $\{X : 0 < |x_i| < \infty,\ i = 1, \ldots, n\}$ на множество $\{Y : 0 < |y_i| < \infty,\ i = 1, \ldots, n\}$ тогда и только тогда, когда матрица α унимодулярна, т.е. все α_{ij} целые, $\det \alpha = \pm 1$. Здесь используются только такие степенные преобразования.

4. Пусть, кроме (2), имеется степенное преобразование

$$z_i = y_1^{\gamma_{i1}} y_2^{\gamma_{i2}} \cdots y_n^{\gamma_{in}}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

с матрицей γ. Тогда Z связано с X степенным преобразованием с матрицей $\gamma\alpha$, т.е. степенные преобразования образуют группу, а степенные преобразования с унимодулярной матрицей образуют ее подгруппу.

Пусть $f(X)$ – произвольный многочлен Лорана и d – размерность его многогранника Ньютона $M = M(f)$ [Брюно, Солеев, 1982: 88], будем называть d *размерностью многочлена* $f(X)$. В R_*^n рассмотрим линейное пространство $N(f)$, нормальное к $M(f)$. Очевидно, $\dim M + \dim N = n$. Аналогично для системы многочленов Лорана $f_i(X)$, $i = 1, \ldots, m$ рассматриваем многогранники $M(f_i)$ и их нормальные пространства $N(f_i)$. Обозначим

$$N = N(f_1) \cap \ldots \cap N(f_m)$$

и $d = n - \dim N$. Величину d назовем *размерностью* указанной *системы многочленов* [Брюно, Солеев, 1982: 91],

Пусть имеется такая система (1)

Теорема 1. *Если размерность системы (1) равна d, то существует унимодулярная матрица α такая, что степенным преобразованием (2) с матрицей α и подходящими сокращениями эта система приводится к системе m уравнений относительно d переменных.*

Доказательство. Пусть L – линейное пространтво в R^n, нормальное к N. Очевидно, $\dim L = d$. В каждом многочлене Лорана $f_i(X)$ сделаем сокращение на $X^{\overline{Q}^i}$ так, чтобы $D(f_i X^{-\overline{Q}^i}) \subset L$. Здесь $D(f_i)$ носитель многочлена $f_i(X)$. В качестве $\overline{Q}^i$ можно взять любой из векторов $Q \in D(f_i)$. Будем считать, что сокращения уже сделаны и все $D(f_i) \subset L$. Пусть $S_1, \ldots, S_d$ – базис в L и векторы $S_{d+1}, \ldots, S_n$ дополняют его до базиса в R^n. Степенное преобразование

$$y_i = X^{S_i}, \quad i = 1, \ldots, n \tag{9}$$

переводит $f_i(X)$ в $g_i(y_i,\dots,y_d)\equiv g_i(Y)$.

Действительно, для $Q\in L$ имеем однозначное разложение

$$Q=r_1S_1+\dots+r_dS_d,$$

т.е. $X^Q=y_1^{r_1}\cdots y_d^{r_d}$. Для преобразования (2), (9) имеем

$$\alpha=(S_1\cdots S_n)^*.$$

Если все $Q\in D_i$ целочисленны, то можно найти унимодулярную матрицу α следующим образом . Пусть $S_1,\dots,S_d$ – некоторый целочисленный базис в L. Образуем квадратную матрицу β так, что ее i-я строка есть S_i для $i\le d$ и состоит из нулей для $d<i\le n$. Как известно [Гангмахер, 2005: 187], всякая квадратная матрица β приводится к диагональной матрице δ при помощи элементарных оперций над столбцами и строками, т.е. квадратная матрица β с целыми элементами представима в виде

$$\beta=\gamma_1\delta\gamma,$$

где γ_1 и γ – унимодулярные, а δ – диагональная матрица с целыми коэффициентами. За матрицу α можно взять унимодулярную матрицу γ. Доказательство окончено.

При $n=2$ матрицу α можно вычислить с помощью цепных дробей [Хинчин, 1961: 67], а при $n=3$ с помощью алгоритма Эйлера [Солеев, Солеева, 2013: 92].

Обозначим через $d(i)$ размерность подсистемы из первых i уравнений системы (9). Очевидно, $d(i)\le d(i+1)$. Обозначим $d(m)=d$. Выделим те значения i, для которых $d(i)<d(i+1)$. Пусть это будут $i_1,\dots,i_l$. Из теоремы 1 вытекает

Теорема 2. *Существует степенное преобразование (2) с унимодулярной матрицей α и сокращения такие, что система (1) размерности d с подсистемами $i_1,\dots,i_l$ уравнений приводится к системе m уравнений относительно d переменных, имеющей квазитреугольный вид: подсистема из первых i_j уравнений зависит от $d(i_j)$ переменных $(j=1,\dots,l)$.*

Действительно, по теореме 1 всю систему (1) приведем к системе от d переменых. Затем, также делая степенное преобразование для этих d переменных, подсистему из первых i_l уравнений приведем к подсистеме от d_{i_l} переменных и т.д. по убыванию j от l до 1.

Следствие 1. *Предположим, что в системе (1) $d(i)=i$ для $i<n$ и, если $m>n-1$, то $d(j)=n-1$ для $n\le j\le m$. Тогда существует унимодулярная матрица α такая, что степенным преобразованием (2) и подходящим сокращением эта система приводистя к треугольному виду*

$$\begin{aligned}&g_i(y_1,\dots,y_i)=0,\quad i=1,\dots,\min(n-1,m),\\&g_j(y_1,\dots,y_{n-1})=0,\quad j=n,\dots,m.\end{aligned}\tag{10}$$

Следствие 2. *Рассмотрим такую систему (9), у которой размерность каждого многочлена f_i равна единице. Тогда степенным преобразованием и сокращениями система приводится к виду (10), где каждая из функций g_i является многочленом от одного монома Y^{R_i}:*

$$g_i \equiv h_i(Y^{R_i}), \quad i = 1,\dots,m,$$

где $R_i = (r_{i1},\dots,r_{ii},0,\dots,0)$, для $i < n$.

Если найти все корни $z_i^{(1)},\dots,z_i^{(l_i)}$ каждого уравнения $h_i(z_i) = 0, \quad i = 1,\dots,m,$

то система (10) приводится к $l_1 l_2 \dots l_m$ системам

$$Y^{R_i} = z_i^{(j)}, \quad i = 1,\dots,m, \text{ где } j = 1,\dots,l_i.$$

Пусть сокращения уже произведены (т.е. $O \in D(f_i)$) и T_i – базисный вектор линейной оболочки носителя $D(f_i)$. Тогда $r_{11} \cdots r_{ii} = \pm$ НОД главных миноров матрицы $(T_1 \dots T_i)$, $i \le \min(m, n-1)$; т.е. всегда $r_{11} = 1$. Если все $r_{ii} = \pm 1$, то дополнительным степенным преобразованием можно добиться того, что $r_{ij} = \delta_{ij}$ (символ Кронекера). Тогда $Y^{R_i} = y_i$ для $i \le \min(m, n-1)$.

Изменением порядка нумерации многочленов f_i в системе (9) можно получить дополнительные упрощения в преобразованной системе

$$g_i(y_1,\dots,y_d) \equiv X^{-\bar{Q}^i} f_i(x_1,\dots,x_n), \quad i = 1,\dots,m, \tag{11}$$

полученной по теореме 2. Для небольших размерностей $(n \le 6)$ нужные перестановки можно увидеть непосредственно из преобразованной системы (11). В общем случае выбор наилучшей нумерации требует перебора различных вариантов. Этот вопрос здесь не будем рассаматривать.

Пример. 1. Рассмотрим систему

$$f_1(x_1x_2x_3) \equiv b_1x_1x_2x_3 + b_2x_1^4 + b_3x_3^4 + b_4x_1^2x_2^2 = 0,$$
$$f_2(x_1x_2x_3) \equiv c_1x_2x_3 + c_2x_1^2x_3 = 0. \tag{12}$$

Для нее имеем $D = \{Q_1 = (1,1,1), Q_2 = (4,0,0), Q_3 = (0,0,4), Q_4 = (2,2,0)\}$. Отсюда $\overline{Q_1} = Q_1 - Q_2 = (-3,1,1)$, $\overline{Q_2} = Q_2^2 - Q_1^2 = (2,-1,0)$.

Поэтому унимодулярная матрица будет

$$\alpha = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

степенное преобразование с матрицей α и его обратное суть

$$\begin{cases} y_1 = x_1^{-3}x_2x_3, \\ y_2 = x_1^2x_2^{-1}, \\ y_3 = x_1^{-1}x_2; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = y_2y_3, \\ x_2 = y_2y_3^2, \\ x_3 = y_1y_2^2y_3. \end{cases} \tag{13}$$

После степенного преобразования (13) и сокращения первого уравнения системы (12) на $y_2^4y_3^4$, а второго – на $y_1y_2y_3^3$ получим систему

$$g_1(y_1, y_2) \equiv b_1y_1 + b_2 + b_3y_1^4y_2^4 + b_4y_1^2y_2^2 = 0,$$
$$g_2(y_2) \equiv c_1 + c_2y_2 = 0. \tag{14}$$

В результате степенного преобразования мы получили систему уравнений (14) с меньшей числа переменных.

2. Для системы

$$f_1(x_1x_2x_3)_1 \equiv a_1x_1^4 + a_2x_2^4 = 0,$$

$$f_2(x_1x_2x_3) \equiv b_{11}x_2x_3 + b_{12}x_1^3x_2 = 0.$$

после соответствующего степенного преобразования переходит в систему

$$g_1(y_1) \equiv a_2 + a_3y_1^4 = 0,$$
$$g_2(y_2) \equiv a_{21}y_2 + a_{23} = 0.$$

Построение соответствующего степенного преобразования предлагаем читателю.

Список литературы

1. Брюно А.Д., Солеев А. Локальная униформизация ветвей пространственной кривой и многогранники Ньютона // Алгебра и анализ. 1991. Т. 3, вып. 1. С. 67-102.
2. Солеев А. Алгоритм вычисления многогранников Ньютона // Доклады АН Узбекистана, N 5, 1982. С. 14-16.
3. Хинчин А.Я. Цепные дроби, М.: Физматгиз, 1961.
4. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. 5-е издание, М., Наука. 2005.
5. Soleev A., Soleeva N. Power geometry and algebraic equations // AIP Conference Proceedings, 1557, 85, 2013.
6. Хованский А.Г. Многогранники Ньютона // Современные проблемы математики. Т. 22. Итоги науки и техники. М.: ВИНИТИ, 1983. С. 206-239.

POWER TRANSFORMATIONS FOR SYSTEMS OF NONLINEAR ALGEBRAIC EQUATIONS

A. Soleev
Dr. Sci. (Phys.–Math.), professor
asoleev@yandex.ru
Samarkand

Samarkand State University
(Samarkand, Uzbekistan)

Abstract. In this paper are considered power transformations which transform nonlinear algebraic equations or systems of nonlinear algebraic equations into equations and or systems of algebraic equations with a smaller variable. These transformations make the geometry of exponents more meaningful, the changes in geometric constructions after these transformations are shown. The notion of the dimension of a system of algebraic equations is presented on the basis of the construction of Newton polyhedrons and normal cones of its faces. The construction of Newton polyhedra and normal cones of its faces was considered in the works of A.D.Bruno (1980), A.Soleev (1982), A.G.Hovansky (1983). We consider some significant properties of power transformations. It is proved that if the dimension of the system is d <n, then there exists a unimodular matrix such that by a power transformation with this matrix and by suitable abbreviations this system is reduced to a system of equations with respect to variables. It is also proposed an algorithm for finding unimodular matrices of power transformations. In the end, specific examples are given.

Keywords: Power transformations, systems of nonlinear algebraic equations, dimension of system, linear spaces, Newton polyhedrons, normal cones, unimodular matrices.

References

1. Bruno A.D., Soleev A. (1991) Lokal`naia uniformizatciia vetvei` prostranstvennoi` krivoi` i

mnogogranniki N`iutona [Local uniformization of branches of a space curve and Newton polyhedra] // Algebra and Analiz. Vol. 3, no. 1. P. 67-102.
2. Soleev A. (1982) Algoritm vy`chisleniia mnogogrannikov N`iutona [Algorithm for calculating Newton polyhedra] // Reports of the Academy of Sciences of Uzbekistan, No. 5. C. 14--16.
3. Khinchin A.Ya. (1961) Tcepny`e drobi [Chain fractions]. Moscow: Fizmatgiz.
4. Gantmakher F.R. (2005) Teoriia matritc [Theory of matrices]. 5 th edition, Moscow, Nauka.
5. Soleev A., Soleeva N. (2013) Power geometry and algebraic equations // AIP Conference Proceedings. 1557. 85.
6. Khovansky A.G. (1983) Mnogogranniki N`iutona [Newton's polyhedra] // Modern problems of mathematics. T. 22. Results of science and technology. M.: VINITI. S. 206-239.

УДК 517.956

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СМЕШАННО-СОСТАВНОГО УРАВНЕНИЯ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ, ФУНКЦИОНАЛЬНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ И ОПЕРЕЖЕНИЕМ

Александр Николаевич Зарубин
д.ф.-м.н., профессор
matdiff@yandex.ru
г. Орел
Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева

Елена Викторовна Чаплыгина
к.ф.-м.н., доцент
lena260581@yandex.ru
г. Орел
Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева

Аннотация. Исследуется задача Трикоми для смешанно-составного уравнения с дробной производной, функциональным запаздыванием и опережением. Построено общее решение уравнения. Доказана теорема единственности.

Ключевые слова: уравнения смешанно-составного типа, задача Трикоми, оператор дробного интегрирования, разностный оператор.

Рассмотрим уравнение

$$\boldsymbol{L}V(x,y) \equiv \boldsymbol{L}(A(x)u(\alpha_1(x),y) - B(x)u(\alpha_1^2(x),y) + C(x)u(\alpha_2^2(x),y)) = 0, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{L} \equiv \partial^2/\partial x^2 + H(-y)\partial^2/\partial y^2 - H(y)\boldsymbol{D}_{oy}^{\alpha} - \boldsymbol{P}_y^{\tau} H(y)$ - дифференциально-разностный оператор смешанного типа, в котором $\boldsymbol{D}_{oy}^{\alpha}$ - оператор [1, с.43] дробного интегродифференцирования порядка α, $0<\alpha<1$, действующий на функцию $V(x,y)$ по переменной y, определяемый соотношением

$$\boldsymbol{D}_{oy}^{\alpha}V(x,\xi) = \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{D}_{oy}^{\alpha-1}V(x,\xi) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial y}\int_0^y (y-\xi)^{-\alpha}V(x,\xi)d\xi;$$

$\Gamma(x)$ – гамма-функция [2, с.947]; $\boldsymbol{P}_y^{\tau}$ -оператор сдвига по y: $\boldsymbol{P}_y^{\tau}V(x,y) = V(x,y-\tau)$ $(0<\tau\equiv const)$; $H(\xi)$ – функция Хевисайда; $A(x), B(x), C(x)$ – непрерывные достаточно гладкие функции; $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ - сохраняющие ориентацию взаимно обратные диффеоморфизмы класса C^2, удовлетворяющие условиям $\alpha_1'(x)>1\,(\alpha_1'(x)<1)$, $\alpha_1(x)<x$ и $\alpha_2'(x)<1\,(\alpha_2'(x)>1)$, $\alpha_2(x)>x$, то есть представляющие