2. Bazilevskii` M.P., Vrublevskii` I.P., Noskov S.I., Iakovchuk I.S. (2016) Srednesrochnoe prognozirovanie e`kspluatatcionny`kh pokazatelei` funktcionirovaniia Krasnoiarskoi` zheleznoi` dorogi [Medium-term forecasting of operational performance of the Krasnoyarsk railway] Basic research. Moscow. №10, pp. 471-476.
3. Bazilevskii` M.P., Noskov S.I. (2012) Metodicheskie i instrumental`ny`e sredstva postroeniia nekotory`kh tipov regressionny`kh modelei` [Methodological and instrumental means to build certain types of regression models] The system. Methods. Technology. Bratsk. №1, pp. 80-87.
4. Bazilevskii` M.P., Noskov S.I. (2009) Tekhnologiia organizatcii konkursa regressionny`kh modelei` [Technology competition regression models] Information technologies and problems of mathematical modeling of complex systems. Irkutsk. №7, pp. 77-84.
5. Noskov S.I. (1996) Tekhnologiia modelirovaniia ob``ektov s nestabil`ny`m funktcionirovaniem i neopredelennost`iu v danny`kh. [Technology modeling objects with unstable functioning of and uncertainty in the data.] Irkutsk: RITC GP «Oblinformpechat`», 1996. 321 p.

УДК 511.14

# О ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ РАЦИОНАЛЬНОСТИ СУММ СЛОЖНЫХ КУБИЧЕСКИХ РАДИКАЛОВ

**Николай Николаевич Волотов**
к.ф.-м.н., доцент
volotovnn132@yandex.ru
г. Липецк
Липецкий государственный педагогический университет имени П.П. Семенова-Тян-Шанского

**Аннотация.** В работе символами $N, Z, Q, Q^{+}, Q^{-}, J, R, R^{+}$ обозначены множества натуральных, целых, рациональных, рациональных положительных, рациональных отрицательных, иррациональных, всех вещественных и положительных вещественных чисел, соответственно. Суммы сложных кубических радикалов, т.е. числа вида

$$\sqrt[3]{a+\sqrt{b}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{b}}\left(a \in R\backslash\{0\}, b \in R^{+}: \sqrt{b}, \sqrt[3]{a \pm \sqrt{b}} \in J\right), (*)$$

появляются [Курош, 2004: 234-239] при решении кубических уравнений методом Кардано: уравнение $x^3+3px+2q=0$ $(p, q \in R)$ в случае, когда число $D=q^2+p^3 \in R^{+}$, имеет два сопряженных комплексных корня и один вещественный корень, определяемый формулой Кардано через его коэффициенты при помощи квадратных и кубических радикалов: $x=\sqrt[3]{-q+\sqrt{q^2+p^3}}+\sqrt[3]{-q-\sqrt{q^2+p^3}}.$ (1)

Под рационализацией алгебраических выражений понимается приведение их к выражениям, содержащим меньшее число алгебраических операций, которые следует произвести над входящими в них величинами для нахождения их значений. Задачи на рационализацию сумм сложных кубических радикалов при отдельных значениях параметров $a$ и $b$ не новы, но при этом отсутствуют алгоритмы нахождения таких $a$ и b, при которых числа вида (*) допускают рационализацию. В частности, в работах [2]-[5], [7-11] приведены доказательства равенств сумм $(*)$ для упорядоченных пар чисел $(a; b)$: $(2;\ 5), (7;\ 50), (9;\ 80), (20;\ 392), (45;\ 1682), (54;\ 2700), \left(6; \frac{847}{27}\right)$ числам 1, 2, 3, 4,

$2\sqrt{2}$, 6, 3, соответственно. Они проводятся по следующему алгоритму (А): каждое число вида $(*)$ обозначается через $x$; возведением в куб полученного равенства-уравнения находится равносильное ему на множестве вещественных чисел приведённое кубическое уравнение с рациональными коэффициентами; по коэффициентам этого уравнения с помощью метода Горнера или непосредственной подстановкой, используя известные утверждения, находят один его рациональный корень; доказывается, что два других его корня– комплексные числа. Из всего этого следует, что исходное число вида$(*)$равно найденному вещественному корню кубического уравнения, полученного на втором шаге. В данной работе приведены: две теоремы о достаточных условиях рациональности чисел вида $\sqrt[3]{a+\sqrt{b}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{b}}$ $(a\in Q\backslash\{0\}, b\in Q^{+}: \sqrt{b}, \sqrt[3]{a\pm\sqrt{b}}\in J)$ алгоритмы и примеры нахождения при известных значениях $a$ таких значений параметра $b$, при которых указанные числа рациональны.

**Ключевые слова:** сложные кубические радикалы; кубические и иррациональные уравнения; формула Кардано; алгоритмы рационализации.

**Постановка задачи и её решение.** *Как найти такие значения параметров $a$ и $b$, чтобы числа вида $(*)$ были рациональными?*

**I.** В работе [1], решая задачу "При каких рациональных значениях $a$ и $b$, таких, что $\sqrt{b}, \sqrt[3]{a\pm\sqrt{b}}\in J$, будет рациональным число $(*)$?", мы, обозначая выражение $(*)$ через $x$, после возведения в куб равенства $\sqrt[3]{a+\sqrt{b}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{b}}=x$ (2)

и соответствующих преобразований, получили равносильное ему на множестве $R$ приведённое кубическое уравнение $x^3-3\cdot\sqrt[3]{a^2-b}\cdot x-2a=0$, (3)

имеющее [Курош: 2004, 236]) один вещественный корень $x_1=\sqrt[3]{a+\sqrt{b}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{b}}$ и два сопряжённых комплексных корня, так как для него число

$$D=(-a)^2+\left(-\sqrt[3]{a^2-b}\right)^3=a^2-a^2+b=b \text{ и при этом } b>0. \quad (4)$$

В результате всего этого получили:

- теорему о достаточных условиях рациональности чисел $(*)$; - замечание;

- алгоритм нахождения таких значений параметра $b\in Q^{+}: \sqrt{b}, \sqrt[3]{a\pm\sqrt{b}}\in J$, <u>при фиксированном $a\in Q\backslash\{0\}$</u>, при которых числа $(*)$ будут суммами сложных кубических радикалов, равными рациональным числам; - примеры применения этого алгоритма.

Приведём их здесь для справки и доказательства других результатов.

**Теорема 1** (о достаточных условиях рациональности чисел вида $(*)$): *число $(*)$ существует и рационально при выполнении одного из следующих комплексов условий:*

1) $b=0$ *и* $a=l^3$, *где* $l\in Q$; 2) $a\in Q\backslash\{0\}$ *и* $b\in Q^{+}$, *такие, что* $\sqrt{b}, \sqrt[3]{a\pm\sqrt{b}}\in J$ *и* $a^2-b=\left(\frac{m}{n}\right)^3$, *где* $m\in Z\backslash\{0\}, n\in N: (m,n)=1$.

*Кроме того, при выполнении условий* 1) *число* $(*)$ *равно* $2l$, *а при выполнении условий* 2), *когда* $a=\frac{m_a}{n_a}: m_a\in Z\backslash\{0\}, n_a\in N, (m_a,n_a)=1$, *справедливы два равенства:*

$$\sqrt[3]{a+\sqrt{b}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{b}}=r_0, \quad (5)$$

*где $r_0$ – то число из множества $K=\left\{r=\frac{p}{q}: p\in P, q\in L\right\}$, при котором $n_a n r_0^3-3n_a m r_0-2m_a n=0$ (здесь $P$ – множество целых делителей числа $(-2m_a n)$,*

*$L$– множество натуральных делителей числа $n_a n$);*

$$\sqrt[3]{(a^2+b)+2a\sqrt{b}}+\sqrt[3]{(a^2+b)-2a\sqrt{b}}=r\left(r=r_0^2-2\sqrt[3]{a^2-b}\in Q\backslash\{0\}\right).(6)$$

***Замечание 1***. Нетрудно видеть, что:

если $a\in Q^+$, то число $r_0\in K_1=K\cap Q^+$; если $a\in Q^-$, то $r_0\in K_2=K\cap Q^-$.

**1-й алгоритм.** При фиксированном значении $a\in Q\backslash\{0\}$ и некотором $l\in Q$ из уравнения $a^2-b=l^3$ можно найти такоезначение $b\in Q^+:\sqrt{b},\sqrt[3]{a\pm\sqrt{b}}\in J$, при котором будут рациональными второй коэффициент уравнения (3), равносильного на множестве $R$ уравнению (2), и число $(*)$. Для этого следует:

1) записать кубическое уравнение (3) с неизвестным пока $b$;

2) для каждого значения $l\in Q$, такого, при котором линейное относительно $b$ уравнение $a^2-b=l^3$ имеет корень $b\in Q^+$, иначе говоря, для $l\in Q$: $l^3<a^2$, – найти это значение $b$;

3) для каждой упорядоченной пары чисел $(a;b)$: $b=a^2-l^3\in Q^+$ записать уравнение (3′): $x^3-3\cdot l\cdot x-2a=0$ и множества $P,L,K_1$ или $K_2$; так как для этого уравнения число $D=a^2-l^3=b>0$, то оно имеет единственный вещественный корень;

4) если этот корень – рациональное число: $x=r_0$, то $r_0\in K_1$ при $a>0$ (или $r_0\in K_2$ при $a<0$) и при этом справедливо равенство $\sqrt[3]{a+\sqrt{b}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{b}}=r_0$.

Искомое число $r_0=x(a,b)$ можно найти непосредственной подстановкой в уравнение (3′) значений из множества $K_1$ или $K_2$.

С помощью этого алгоритма для следующих пар чисел $(a;\ l)$:

$$\left(5;-\frac{1}{3}\right),(5;-3),\left(6;-\frac{2}{3}\right),\left(6;-\frac{11}{3}\right),\left(7;-\frac{13}{3}\right),(8;-5),$$
$$(9;1),\left(9;-\frac{17}{3}\right),\left(9;-\frac{5}{3}\right),(10;-2),\left(10;-\frac{19}{3}\right),(54;6),\left(10;\frac{7}{9}\right)$$

найдены все возможные соответствующие положительные значения $b=a^2-l^3$:

$$\frac{676}{27},52,\frac{980}{27},\frac{2303}{27},\frac{3520}{27},\frac{6103}{27},80,\frac{7100}{27},\frac{2312}{27},108,\frac{9559}{27},2700,\frac{72557}{27^2},$$

такие, что для упорядоченных пар чисел $(a;b)$:

$$\left(5;\frac{676}{27}\right),(5;52),\left(6;\frac{980}{27}\right),\left(6;\frac{2303}{27}\right),\left(7;\frac{3520}{27}\right),\left(8;\frac{6103}{27}\right),$$
$$(9;80),\left(9;\frac{7100}{27}\right),\left(9;\frac{2312}{27}\right),(10;108),\left(10,\frac{9559}{27}\right),(54;2700),\left(10;\frac{72557}{27^2}\right)$$

числа вида $(*)$ будут суммами сложных кубических радикалов, при этом они рациональны и равны натуральным числам: 2, 1, 2, 1, 1, 1, 3, 2, 1, 2, 1, 6, 3, соответственно.

**II.** Приведём новые, следующие из теоремы 1, теорему и алгоритм нахождения такого значения параметра $b=b(a,x_0)\in Q^+:\sqrt{b},\sqrt[3]{a\pm\sqrt{b}}\in J$, <u>при заданных рациональных значениях $a,x_0$ $(ax_0\neq 0)$</u>, при котором число вида $(*)$ будет суммой сложных кубических радикалов, равной этому числу $x_0$..

При данных $a,x_0\in Q\backslash\{0\}$ из (3), как из уравнения относительно $b$, найдём его значение:

$$x_0^3-3\sqrt[3]{a^2-b}\cdot x_0-2a=0\Leftrightarrow a^2-b=\left(\frac{x_0^3-2a}{3x_0}\right)^3\Leftrightarrow b=a^2-\left(\frac{x_0^3-2a}{3x_0}\right)^3.(7)$$

Нетрудно увидеть, что число $b\equiv b(a,x_0)$, определяемое по формуле (7), рациональное. Оно будет положительным тогда и только тогда, когда

$$a^2 > \left(\frac{x_0^3 - 2a}{3x_0}\right)^3 \ ; \ (8)$$

при этом: $3 \cdot \sqrt[3]{a^2 - b} = 3 \cdot \sqrt[3]{a^2 - a^2 + \left(\frac{x_0^3-2a}{3x_0}\right)^3} = \frac{x_0^3-2a}{x_0} = x_0^2 - \frac{2a}{x_0}$ (9)

и уравнение (3) принимает вид: $x^3 - \left(x_0^2 - \frac{2a}{x_0}\right) \cdot x - 2a = 0. (3'')$

Это уравнение с рациональными коэффициентами может быть сведено к уравнению с целыми коэффициентами. При выполнении неравенства (8) для него будет положительным число $D$, определяемое формулой (4).

Значит, в силу теоремы 1, справедлива **Теорема 2:** *если рациональные числа* $a$ *и* $x_0$ $(a \cdot x_0 \neq 0)$ *удовлетворяют неравенству* (8), *то:*

1) *определяемое формулой* (7) *число* $b(a, x_0)$ *– рациональное и положительное;*

2) *уравнения* (2), (3) и $(3'')$ *равносильны на множестве* $R$, при *этом коэффициенты уравнения* $(3'')$ *рациональны и оно имеет единственный вещественный корень* $x_0$*;*

3) *справедливы равенства*

$$\sqrt[3]{a + \sqrt{b(a, x_0)}} + \sqrt[3]{a - \sqrt{b(a, x_0)}} = x_0, (7')$$

$$\sqrt[3]{(a^2 + b) + 2a\sqrt{b}} + \sqrt[3]{(a^2 + b) - 2a\sqrt{b}} = r \left(r = x_0^2 - 2\sqrt[3]{a^2 - b} \in Q\right). (10)$$

***Замечание 2.*** Нетрудно убедиться в том, что для чисел $a$ и $x_0$, удовлетворяющих условиям теоремы 2, уравнение $(3'')$ можно привести к такому уравнению с целыми коэффициентами, что $x_0$ – одно из чисел множества $K$ (см. теорему 1), найденного для этого уравнения. Теперь становится очевидным следующий **2-й алгоритм**: – алгоритм нахождения, <u>при заданных рациональных значениях $a$, $x_0$ $(ax_0 \neq 0)$</u>, такого значения параметра $b = b(a, x_0) \in Q^+ : \sqrt{b}, \sqrt[3]{a \pm \sqrt{b}} \in J$, что число вида $(*)$ – сумма сложных кубических радикалов, и при этом оно будет равно <u>ранее взятому рациональному числу $x_0$</u>:

1) *возьмём рациональные числа* $a$ *и* $x_0$ $(ax_0 \neq 0)$, *удовлетворяющие неравенству* (8);

2) *по формуле* (7) *найдём рациональное и положительное число* $b = b(a, x_0)$;

3) *запишем справедливое равенство* $\sqrt[3]{a + \sqrt{b(a, x_0)}} + \sqrt[3]{a - \sqrt{b(a, x_0)}} = x_0$.

**III**. ***Применение 2-го алгоритма к решению соответствующих задач.*** **Задача 1.** При $a = 2015$ найдём *такие значения параметра* $b \in Q^+ : \sqrt{b}, \sqrt[3]{2015 \pm \sqrt{b}} \in J$, *чтобы при каждом из них число* $(*)$ *было бы суммой сложных кубических радикалов и рациональным.*

*Решение.* Уравнение (3) имеет вид: $x^3 - 3 \cdot \sqrt[3]{2015^2 - b} \cdot x - 4030 = 0$. Если $b \in Q^+$ и число $3\sqrt[3]{2015^2 - b}$ – целое, то его рациональный корень содержится в множестве $K_1$ натуральных чисел – делителей числа $4030 = 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 31$:

$$K_1 = \{1, 2, 5, 10, 13, 26, 31, 62, 65, 130, 155, 310, 403, 806, 2015, 4030\}.$$

Рассуждая в соответствии с 2-м алгоритмом, найдём, что задача имеет решения лишь при значениях $x \in \{1, 2, 5, 10, 13\} \subset K_1$. Действительно, при $x = 1$ имеем: $b(2015,1) = 2015^2 + 1343^3 = 2426360832 > 0$ (см. (7)); $3 \cdot \sqrt[3]{a^2 - b} = 1^2 - \frac{4030}{1} = -4029$ (см. (9)); $x^3 + 4029x - 4030 = 0$ –уравнение $(3'')$, $x = 1$ – единственный вещественный корень; и потому $\sqrt[3]{2015+\sqrt{2426360832}}+\sqrt[3]{2015-\sqrt{2426360832}}=1$;

при $x=2$ имеем: $b(2015{,}2)=2015^2+\left(\frac{2^3-4030}{6}\right)^3=2015^2+\frac{2011^3}{27}=\frac{8242353406}{27}>0$; $3\sqrt[3]{a^2-b}=2^2-\frac{4030}{2}=-2011$; $x^3+2011x-4030=0-$ уравнение $(3'')$, $x=2-$ его единственный вещественный корень; потому $\sqrt[3]{2015+\sqrt{\frac{8242353406}{27}}}+\sqrt[3]{2015-\sqrt{\frac{8242353406}{27}}}=2$; при $x=5$ имеем: $b(2015{,}5)=2015^2+\left(\frac{5^3-4030}{15}\right)^3=2015^2+\frac{781^3}{27}=\frac{585224616}{27}>0$; $3\sqrt[3]{a^2-b}=5^2-\frac{4030}{5}=-781$; $x^3+781x-4030=0-$ уравнение $(3'')$, $x=5-$ его единственный вещественный корень; и потому

$$\sqrt[3]{2015+\sqrt{\frac{585224616}{27}}}+\sqrt[3]{2015-\sqrt{\frac{585224616}{27}}}=5;$$

при $x=10$ имеем: $b(2015{,}10)=2015^2+\left(\frac{10^3-4030}{30}\right)^3=2015^2+101^3=5090526>0$; $3\sqrt[3]{a^2-b}=10^2-\frac{4030}{10}=-303$; $x^3+303x-4030=0-$ уравнение $(3'')$, $x=10-$ его единственный вещественный корень; и потому $\sqrt[3]{2015+\sqrt{5090526}}+\sqrt[3]{2015-\sqrt{5090526}}=10$; при $x=13$ имеем: $b(2015{,}13)=2015^2+\left(\frac{13^3-4030}{3\cdot 13}\right)^3=13^2+47^3=4164048>0$; $3\sqrt[3]{a^2-b}=13^2-\frac{4030}{13}=-141$;

$x^3+141x-4030=0-$ уравнение $(3'')$, $x=13-$ его единственный вещественный корень; и потому $\sqrt[3]{2015+\sqrt{4164048}}+\sqrt[3]{2015-\sqrt{4164048}}=13$.

При всех других значениях $x\in K_1$, т.е. при $x\in K_1\backslash\{1,2,5,10,13\}$, задача не имеет решений на множестве $R$, так как соответствующие им числа $b(2015,x)$ отрицательны (и, кроме того, они убывают на множестве $K_1\backslash\{1,2,5,10,13\}$):

$$b(2015{,}26)=2015^2+\left(\frac{26^3-4030}{3\cdot 26}\right)^3=2015^2-\frac{521^3}{27}=-\frac{31794686}{27}<0;$$

$$b(2015{,}31)=2015^2+\left(\frac{31^3-4030}{3\cdot 31}\right)^3=2015^2-277^3=-17193708<0;$$

$$b(2015{,}62)=2015^2+\left(\frac{62^3-4030}{3\cdot 62}\right)^3=2015^2-\left(1259\frac{2}{3}\right)^3=\ \dots<0;\dots;$$

$$0>b(2015{,}26)>b(2015{,}31)>b(2015{,}62)>\ \dots>b(2015{,}4030).$$

С помощью этого алгоритма при значениях $a$, равных 3, 2014, 2016 и 2017, нами найдены по формуле (7) *все возможные* соответствующие положительные значения $b$, такие, что для упорядоченных пар чисел $(a;b)$:

$\left(3;\frac{368}{27}\right),\left(3;\frac{242}{27}\right),\left(2014;\frac{6639994060}{27}\right),(2014;304819196),\left(2014;\frac{1802759563}{27}\right),$
$\left(2016;\frac{65609296703}{27}\right),\left(2016;\frac{8254600640}{27}\right),(2016;92185381),\left(2016;\frac{1085926400640}{27}\right),$
$(2016;13592384),\left(2016;\frac{256098095}{27}\right),\left(2016;\frac{194918912}{27}\right),\left(2016;\frac{1591657752}{27}\right),$

$(2016; 4326400), \left(2016; \frac{110513600}{27}\right), \left(2016; \frac{109734848}{27}\right), \left(2016; \frac{108734912}{27}\right),$
$(2016; 3492469), (2016; 158800), \left(2017; \frac{16183694036}{3}\right), (2017; 327119400)$

числа вида $(*)$ −сложные кубические радикалы; при этом они рациональны и равны натуральным числам: 1, 2, 1, 2, 4, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 12, 14, 16, 18, 21, 24, 1, 2, соответственно. По формулам (6) и (10) из приведённых в работе примеров можно получить новые примеры рационализации сумм сложных кубических радикалов.

В заключение заметим, что с помощью этих алгоритмов, а особенно второго, учитель математики может достаточно легко подготовить соответствующий дидактический материал для работы с одарёнными детьми и с учащимися классов естественно-математических профилей, для организации и проведения олимпиад. При этом, в качестве методического указания, рекомендуем сообщать учащимся, что доказательство равенств сумм сложных кубических радикалов для значений упорядоченных пар чисел $(a; b)$ соответствующим рациональным числам, найденных учителем с помощью 1-го или 2-го алгоритмов, можно и следует проводить в соответствии с указанным в резюме алгоритмом (А), применяя при этом в его втором шаге формулу «куба суммы» в форме: $(c + d)^3 = c^3 + d^3 + 3\,c\,d\,(c + d)$.

**Список литературы**


1. Волотов Н.Н. (2016) Технологии упрощения сумм сложных кубических радикалов / Н.Н. Волотов // Материалы областной научной конференции молодых учёных "Актуальные проблемы естественных наук и их преподавания": Липецк, 20-21 октября 2016 г. Липецк: ЛГПУ имени П.П. Семенова-Тян-Шанского. С. 45-54.
2. Дворянинов С.В. (2014) О решении уравнений вида $\sqrt[3]{a(x)} + \sqrt[3]{b(x)} = \sqrt[3]{c(x)}$/С.В. Дворянинов // Математика в школе. №4. С. 14-17.
3. Егерев В.К. (2013) Сборник конкурсных задач по математике для поступающих во втузы: учебное пособие / В.К. Егерев, В.В. Зайцев, Б.А. Кордемский и др.; под ред. М.И. Сканави. 6-е изд. М.: ООО "Издательство "Мир и Образование": ООО "Издательство "ОНИКС − ЛИТ". 608 с.: илл.
4. Ивлев Б.М., Абрамов А.М., Дудницин Ю.П., Шварцбурд С.И. (1990) Задачи повышенной трудности: учебное пособие для 10-11 кл. средней школы. М.: Просвещение. 48 с.
5. Купцов Л.П., Резниченко С.В., Терёшин Д.А. (1996) Российские математические олимпиады школьников: Книга для учащихся / под ред. чл.-корр. РАО Г.Н. Яковлева. Ростов-на-Дону: Феникс. 640 с.
6. Курош А.Г. (2004) Курс высшей алгебры. СПб: Лань. 13-е изд.. 432 с.
7. Кущенко В.С. (1966) Сборник конкурсных задач по математике. Л.: Судостроение. 3-е изд., стереотип. 591 с.
8. Лидский В.Б., Овсянников Л.В., Тулайков А.И., Шабунин М.И. (1962) Задачи по элементарной математике. М.: Физматлит. 416 с.
9. Сивашинский И.Х. (1968) Задачи по математике для внеклассных занятий. М.: Просвещение. 312 с.
10. Цыпкин А.Г., Пинский А.И. (1989) Справочник по методам решения задач по математике для средней школы. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Наука. Гл. ред. Физ.-мат. лит. 576 с.
11. Шабунин М.И. (2006) Математика для поступающих в вузы: пособие / М.И. Шабунин. М.: Бином. 443 с.


# ON SUFFICIENT CONDITIONS OF THE RATIONALIZATION OF THE SUM OF COMPLEX CUBIC RADICALS

**N.N. Volotov**
Cand. Sci. (Phys.–Math.), associate professor
volotovnn132@yandex.ru
Lipetsk

Lipetsk State Pedagogical
P. Semenov-Tyan-Shansky University

**Summary.** In this paper, the sets $N, Z, Q, Q^+, Q^-, J, R$ and $R^+$denote natural, integer, rational, rational positive, rational negative, irrational, all real and positive real numbers, respectively. The sums of complex cubic radicals, i.e. numbers of the form

$$\sqrt[3]{a+\sqrt{b}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{b}}\left(a \in R\backslash\{0\}, b \in R^+ : \sqrt{b}, \sqrt[3]{a \pm \sqrt{b}} \in J\right), (*)$$

appear [Kurosh, 2004: 234-239] when solving cubic equations byCardano's method: the equation $x^3+3px+2q=0\ (p, q \in R)$ in the case when the number $D=q^2+p^3 \in R^+$, has two conjugate complex roots and one real root, defined by the Cardano formula in terms of its coefficients by means of square and cubic radicals:

$$x=\sqrt[3]{-q+\sqrt{q^2+p^3}}+\sqrt[3]{-q-\sqrt{q^2+p^3}}. \qquad (1)$$

The rationalization of algebraic expressions is understood a s reducing them to expressions containing a smaller number of algebraic operations that must be performed on the entering into them to find their values quantities. The problems of rationalizing the sums of complex cubic radicals for individual values of parameters a and b are not new, but there are no algorithms for finding a and b for which numbers of the form (*) allow rationalization. In particular, are given in [1] - [3], [5-10] the proofs of the equalities of the sums (*) for ordered pairs of numbers (a; b): (2, 5), (7; 50), (9; 80), (20; 392), (45, 1682), (54; 2700), (6; 847/27) to the numbers 1, 2, 3, 4, $2\sqrt{2}$, 6, 3, respectively. They are carried out according to the following algorithm (A): every number of the form (*) is denoted by x; the cube equation with rational coefficients equivalent to it on the set of real numbers is placed in the cube of the resulting equality-equation; on the coefficient s of this equation, using Horner's method or by direct substitution, using known statements, one finds its rational root; it is proved that its other two roots are complex numbers. From all this it follows that the initial number of the form (*) is equal to the found real root of the cubic equation obtained at the second step. In this paper we give: two theorems on sufficient conditions for the rationalization of numbers $\sqrt[3]{a+\sqrt{b}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{b}}\ (a \in Q\backslash\{0\}, b \in Q^+ : \sqrt{b}, \sqrt[3]{a \pm \sqrt{b}} \in J)$; algorithms and examples of finding for known values of a, those values of the parameter b for which these numbers are rational.

**Keywords:** complex cubic radicals; cubic and irrational equations; Cardano's formula; rationalization algorithms.

**References**

1. Dvoryaninov S.V. (2014) O reshenii uravnenii' vida $\sqrt[3]{a(x)}+\sqrt[3]{b(x)}=\sqrt[3]{c(x)}$ [On the solution of equations of the form $\sqrt[3]{a(x)}+\sqrt[3]{b(x)}=\sqrt[3]{c(x)}$] S.V. Dvoryaninov // Matematika v shkole. №4. P. 14-17.
2. Egerev V.K. (2013) Sbornik konkursny'h zadach po matematike dlya postupayuscih vo vtusy': uchebnoe posobie [Collection of competitive tasks in mathematics technical schools applicants: a course book] / pod. red. M.I. Scanawi. 6-eizd. M.: OOO Mir i Obrazovanie: OOO ONYX-LIT. 608 p.: ill.
3. Ivlev B.M. (1996) Zadachi povy'shennoi' trudnosti: uchebnoe posobie dlya 10-11 kl. srednei' shkoly' [Tasks of increased difficulty: a course book for high school students] B.M. Ivlev, A.M. Abramov, Yu.P. Dudnitsin, S.I. Schwarzbourd. - Moskva: Obrazovanie. 48 p.: ill.

4. Kuptsov L.P. (1996) Rossii'skie matematicheskie olimpiady' shkolnikov: kniga dlya uchashihsya [Russian Mathematical Olympiads for Schoolchildren: A Book for Students] / L.P. Kuptsov, S.V. Reznichenko, D.A. Teryoshin; pod red. chl.-corr. RAO G.N. Yakovleva. Rostov-na-Donu: Fenix. 640 p.
5. Kurosh A.G. (2004) Kurs vy'sshei' algebry' [The course of higher algebra]/ A.G. Kurosh. - Sanct. Peterburg: Lan. 13-e izd. 432 p.
6. Kuschenko V.S. (1996) Sbornik konkursny'h zadach po matematike [Compilation of competitive tasks in mathematics]. L.: Sudostroenie. 3-e izd. 591 p.
7. Lidsky V.B., Ovsyannikov L.V., Tulajkov A.I., Shabunin M.I. (1962) Zadachi po elementarnoi' matematike [Problems in elementary mathematics]. M.: Fizmatlit. 416 p.
8. Shabunin M.I. (2006) Matematika dlya postypayushih v vuzy': posobie [Mathematics for students entering universities: course book]. Moskva: Binom, 2006. 443 p.
9. Sivashinsky' I.Kh. (1968) Zadachi po matematike dlya vneklassny'h zanyatii' [Problems in mathematics for extracurricular activities] M.: Prosvesshenie, 1968. 312 p.
10. Tsy'pkin A.G. Pinsky A.I. (1989) Spravochnik po metodam resheniya zadach po matematike dlya srednei' shkoly' [Handbook on methods of solving problems in mathematics for secondary school]. 2-e izd. M.: Nauka. 576 p.
11. Volotov N.N. (2016) Tehnologiya uprosshenia sum slozhny'h kubitcheskih radikalov [Technologies for Simplifying the Sum of Complex Cubic Radicals/ N.N. Volotov // Materials of the regional scientific conference of young scientists "Current problems of natural sciences and their teaching": Lipetsk, October 20-21, 2016] Materialy' oblastnoi' nauchnoi' konferentsii molody'h ucheny'h "Aktualny'eproblemy' estestvenny'hnauk i ihprepodavaniya": Lipetsk, 20-21 oktyabrya 2016. Lipetsk: LGPU imeni P.P. Semenova-Tyan-Shanskogo. P. 45-54.


УДК 517.956

# СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПОМИНАЮЩИМИ ОПЕРАТОРАМИ

**Исаева Севда Эльхан кызы**
к.ф.-м.н., доцент
isayevasevda@rambler.ru
г. Баку (Азербайджан)

Бакинский Государственный Университет (Баку, Азербайджан)

**Резюме.** В данной работе рассматривается смешанная задача одной системы полулинейных гиперболических уравнений с запоминающими операторами. Доказаны теоремы о существовании и единственности решений рассматриваемой задачи.

**Ключевые слова.** Полулинейное гиперболическое уравнение, гистерезис, запоминающий оператор, метод дискретизации по времени.

## 1. Введение

Исследованию решений дифференциальных уравнений с частными производными с гистерезисными нелинейностями, в частности с нелинейными запоминающими операторами, посвящены работы, например, [1] - [5]. В данной работе рассмотрена нижеуказанная смешанная задача для системы полулинейных гиперболических уравнений с запоминающими операторами и доказаны теоремы о существовании и единственности решений для этой задачи. Пусть $\Omega \subset R^N (N \geq 1)$