K.M. Datiev
Cand. Sci. (Engineering), professor
datiev_skgmi@mail.ru
Vladikavkaz

North-Caucasian Institute of Mining and Metallurgy

Abstract. Modern statistical language models are considered in the article. The applicable criteria of models` efficiency are defined. The following statistical language models are described: n-gramm models, decision tree models, linguistically motivated models.

Keywords: statistical language models, n-gramm models, perplexity.

References

1. Bahl L.R., Brown P.F., de Souza P.V., Mercer R.L. (1989) Statisticheskaia iazy`kovaia model` dlia raspoznavaniia rechi, osnovannaia na derev`iakh [A tree-based statistical language model for natural language speech recognition] IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing.
2. Chen S. (1996) Postroenie veroiatnostny`kh modelei` dlia estestvennogo iazy`ka [Building Probabilistic Models for Natural Language]. Harvard university.
3. Datiev M.K., Kulay A.Y., Datiev K.M. (2013) Novy`i` metod sglazhivaniia veroiatnostei` [The new method in probability smoothing]. Trudi molodih uchenih. Vladikavkaz.
4. Rosenfeld R. (1996) Dva desiatiletiia statisticheskogo iazy`kovogo modelirovaniia. Kuda nam idti? [Two decades of statistical language modeling: where do we go from here?]. Carnegie Mellon University, Pittsburgh, USA.
5. Sleator D., Temperley D. (1991) Razbor anglii`skogo iazy`ka pri pomoshchi grammatiki sviazei` [Parsing English with a link grammar. Technical Report CMU-CS-91-196]. Carnegie Mellon University, Pittsburgh, USA.

УДК 517.9

ОБ ОПЕРАТОРАХ И УРАВНЕНИЯХ ТИПА РОМАНОВСКОГО С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ

Ирина Адольфовна Елецких
д.ф.-м.н., доцент
yeletskikh.irina@yandex.ru
г. Елец

Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина

Аннотация. В статье приводится задача теории марковских цепей, поставленная в 1932 году известным советским математиком В.И. Романовским, вводится определение операторов типа Романовского и приводится их классификация. Исследуются линейные операторы типа Романовского с частными интегралами в пространстве непрерывных функций. Свойства таких операторов лежат в основе исследования разрешимости соответствующих уравнений типа Романовского и могут быть использованы при исследовании интегральных уравнений некоторых прикладных задач. Основные результаты получены с применением общей и спектральной теории линейных операторов, а также методов теории интегральных уравнений. В исследовании изучены различные классы таких операторов (с непрерывными, вырожденными, с непрерывными в целом и интегрально ограниченными ядрами) и их пространства. Критерии фредгольмовости и обратимости операторов типа Романовского с перечисленными выше типами ядер применены к изучению условий разрешимости соответствующих уравнений. Изучены композиции операторов и выделен класс операторов, композиции которых являются интегральными операторами. С использованием Теорем Рисса и Радона о представлении линейных функционалов и операторов в пространстве непрерывных функций двух переменных, получены критерии действия операторов типа Романовского с частными интегралами в этом пространстве. Эти критерии применены к изучению свойств пространств операторов типа Романовского с частными интегралами. Получены достаточные условия действия таких операторов в пространстве непрерывных функций и в пространствах Лебега, критерии регулярности операторов, условия существования двойственных к ним операторов. Изучена структура двойственных операторов в пространствах Лебега.

Ключевые слова: операторы с частными интегралами, фредгольмовость, линейный функционал, спектральная теория, двойственные операторы.

Основные труды известного математика Всеволода Ивановича Романовского (1879–1954) относятся к математической статистике и теории вероятностей. В 1932 году В.И. Романовский описал задачу теории марковских цепей, которая приводится к линейному интегральному уравнению вида

$$x(t,s) = \int_a^b m(t,s,\sigma)x(\sigma,t)d\sigma + f(t,s) \qquad (1)$$

Уравнение (1) в случае ядра, непрерывного по совокупности переменных, В.И. Романовский исследовал в пространстве непрерывных функций методом, аналогичным методу определителей Фредгольма. Оператор, входящий в это уравнение, не является вполне непрерывным, поэтому теория исследования оператора и соответствующего уравнения существенно отличается от теории интегральных уравнений Фредгольма. Это потребовало изучения свойств соответствующих операторов в различных пространствах, рассмотрения более общих видов операторов и уравнений, которые впоследствии получили название операторов и уравнений типа Романовского с частными интегралами. Поэтому исследование операторов и уравнений типа Романовского с частными интегралами имеет важное прикладное значение и актуально.

Линейные операторы типа Романовского с частными интегралами конструируются из операторов, содержащих интегралы Лебега:

$$(Lx)(t,s) = \int_a^b l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau, \qquad (2)$$

$$(Mx)(t,s) = \int_a^b m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma, \qquad (3)$$

$$(Nx)(t,s) = \int_a^b \int_a^b n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma, \qquad (4)$$

в которых $l(t,s,\tau)$, $m(t,s,\sigma)$, $n(t,s,\tau,\sigma)$ измеримы по совокупности переменных, $t,s,\tau,\sigma \in [a,b]$.

Оператором с частными интегралами называется оператор $K = L + M + N$. С помощью оператора K и оператора перестановки $\Pi: x(t,s) \to x(s,t)$ получаются операторы типа Романовского:

$$K_1 = L \circ \Pi + M + N, K_2 = L \circ \Pi + M + N \circ \Pi, K_3 = L + M \circ \Pi + N,$$

$$K_4 = L + M \circ \Pi + N \circ \Pi, K_5 = L + M + N \circ \Pi\,, K_6 = L \circ \Pi + M \circ \Pi + N, \quad (5)$$
$$K_7 = L \circ \Pi + M \circ \Pi + N \circ \Pi = (L + M + N) \circ \Pi = K \circ \Pi.$$

Определения уравнений типа Романовского можно найти в [Елецких, 2005:19]: «Уравнение

$$x(t,s) = (K_i x)(t,s) + f(t,s)\ (i = 1, \dots, 7) \qquad (6)$$

называется неоднородным интегральным уравнением типа Романовского с частными интегралами второго рода.»

«Уравнение (6) с $f(t,s) \equiv 0$, т.е. уравнение вида

$$x(t,s) = (K_i x)(t,s)\ (i = 1, \dots, 7) \qquad (7)$$

называется однородным интегральным уравнением типа Романовского второго рода, соответствующим уравнению (6).»

Классификация уравнений (6) и (7) проведена в соответствии с видом, входящих в операторы L, M и N ядер (вырожденные, симметричные, непрерывные в целом, интегрально ограниченные) и пределов интегрирования: постоянные (уравнения типа Романовского), переменные (уравнения Вольтерра-Романовского) и смешанные (уравнения Вольтерра-Фредгольма-Романовского). В дальнейшем будем рассматривать операторы и уравнения типа Романовского с частными интегралами.

Свойства операторов (5) изучены автором в пространстве непрерывных функций С(D) и пространстве Лебега $L^p(D)\ (1 \le p \le \infty)$. Оператор K в пространстве непрерывных функций исследовался в работах Ю. Аппеля (J. Appell), А.С. Калитвина, П.П. Забрейко, Е.В. Фроловой, О.П. Околелова, в которых установлено, что из действия оператора K в пространстве С(D) вытекает его непрерывность. Из непрерывности оператора П вытекает непрерывность оператора K_7, действующего в пространстве С(D). Для операторов K_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) с применением теоремы Банаха о замкнутом графике доказано, что если оператор $C + K_i$ с частными интегралами действует в пространстве С(D), то он непрерывен. Здесь $C = (Cx)(t,s) = c(t,s)x(t,s)$. В [Калитвин, 2014: 18] определены достаточные условия действия операторов K_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) в пространстве С(D): для того чтобы оператор $C + K_i$ был непрерывным линейным оператором, достаточно, чтобы функция $c(t,s)$ была непрерывна, а ядра $l(t,s,\tau)$, $m(t,s,\sigma)$, $n(t,s,\tau,\sigma)$ непрерывны в целом и интегрально ограничены в С(D), причем справедлива следующая оценка нормы оператора

$$||C + K_i|| \le \sup\left(|c(t,s)| + \int_a^b |l(t,s,\tau)| d\tau + \int_a^b |m(t,s,\sigma)| d\sigma + \int_a^b \int_a^b |n(t,s,\tau,\sigma)| d\tau d\sigma \right).$$

Обозначим через $\mathcal{L}$ пространство непрерывных линейных операторов, действующих в $C(D)$, а через $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_0$ – множества операторов

$$C \circ \Pi + L \circ \Pi + M \circ \Pi + N \circ \Pi$$

и

$$C \circ \Pi + L \circ \Pi + M \circ \Pi + N$$

соответственно.

Критерий действия даёт полную характеристику операторов, входящих в $\mathcal{L}_i$ $(i = 1, 2)$. Из него следует, что $\mathcal{L}_i$ – замкнутое собственное подпространство пространства $\mathcal{L}$.

Пространство $\mathcal{L}$ с естественной операцией композиции операторов в качестве умножения является банаховой алгеброй. В работах [Калитвин, 2014: 36; Фролова, 2000: 51; Appell, 2004: 25-32] показано, что подпространство операторов с частными интегралами является подалгеброй алгебры $\mathcal{L}$, причем композиции таких операторов являются операторами с частными интегралами того же вида. Для операторов типа Романовского аналогичное утверждение не имеет места [Елецких, 2005: 38].

В пространствах Лебега получены критерии регулярности операторов типа Романовского с частными интегралами вида

$$R_1 = K \circ \Pi,\ R_2 = C + L \circ \Pi + M \circ \Pi + N, R_3 = C + L \circ \Pi + M \circ \Pi + N \circ \Pi,$$
$$R_4 = C + L + M + N \circ \Pi,$$

где L, M и N – операторы (2) – (4).

Введем следующие обозначения:

$$(]C[x)(t,s) = |c(t,s)|x(t,s), (]L[x)(t,s) = \int_a^b |l(t,s,\tau)|x(\tau,s)d\tau,$$

$$(]M[x)(t,s) = \int_a^b |m(t,s,\sigma)|x(t,\sigma)d\sigma,\ (]N[x)(t,s) = \int_a^b \int_a^b |n(t,s,\tau,\sigma)|x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma.$$

Оператор $R_i: X \to Y$ $(i = 1, \ldots, 4)$, где $X = L^p(D), Y = L^q(D)$ $(1 \le p, q \le \infty)$, регулярен тогда и только тогда, когда из X в Y действуют операторы $]C[\,,]L[\,,]M[\,,]N[$. При этом $|R_i| =]R_i[$ $(i = 1, \ldots, 4)$.

Для операторов типа Романовского, определяемых формулами (5), в пространстве Лебега установлен вид сопряженных операторов к операторам K_i ($i = 1, 2, \ldots, 7$). Если L, M и N – регулярные операторы, то сопряженными к этим операторам будут операторы

$$(L^* y)(t,s) = \int_a^b l(\tau,s,t)y(\tau,s)d\tau\,, (M^* y)(t,s) = \int_a^b m(t,\sigma,s)y(t,\sigma)d\sigma,$$

$$(N^* y)(t,s) = \int_a^b \int_a^b n(\tau,\sigma,t,s)y(\tau,\sigma)d\tau d\sigma.$$

Операторами, сопряженными к операторам K_i ($i = 1, 2, \ldots, 7$), будут следующие операторы:

$$K_1^* = \Pi \circ L^* + M^* + N^*, K_2^* = \Pi \circ L^* + M^* + \Pi \circ N^*,$$
$$K_3^* = L^* + \Pi \circ M^* + N^*, K_4^* = L^* + \Pi \circ M^* + \Pi \circ N^*,$$
$$K_5^* = L^* + M^* + \Pi \circ N^*, K_6^* = \Pi \circ L^* + \Pi \circ M^* + N^*,$$
$$K_7^* = \Pi \circ L^* + \Pi \circ M^* + \Pi \circ N^*.$$

Их вид найден с помощью теоремы Фубини и определения сопряженного оператора.

Для уравнения (6) типа Романовского с частными интегралами получены критерии фредгольмовости в случае непрерывных в целом и интегрально ограниченных ядер операторов K_i ($i = 1, \ldots, 4$), определяемых формулами (5). Установлено, если ядра $l(t,s,\tau)$, $m(t,s,\sigma)$, $n(t,s,\tau,\sigma)$ непрерывные в целом и интегрально ограниченные функции на $D \times [a,b]$ и $D \times D$ соответственно, то фредгольмовость в $\mathrm{C}(D)$ оператора $I - K_i$ $(i = 1, 2)$ равносильна фредгольмовости в $\mathrm{C}(D)$ оператора $I - M$, а при $i = 3, 4$ равносильна фредгольмовости оператора $I - L$. При этом фредгольмовость уравнения $x = K_i x + f$ $(i = 1, \ldots, 4)$ равносильна при $i = 1, 2$ обратимости уравнения $x = Mx + f$, а при $i = 3, 4$ – обратимости уравнения $x = Lx + f$. Здесь I – тождественный оператор.

В случае вырожденных ядер

$$l(t,s,\tau)=\sum_{i=1}^{p} l_i(t,s)a_i(\tau)\,,m(t,s,\sigma)=\sum_{j=1}^{q} m_j(t,s)b_j(\sigma),$$

$$n(t,s,\tau,\sigma)=\sum_{k=1}^{r} n_k(t,s)c_k(\tau,\sigma),$$

где $l_i, a_i\ (i=1,2,\dots,p), m_j, b_j\ (j=1,2,\dots,q), n_k, c_k\ (k=1,2,\dots,r)$ – непрерывные функции, а системы функций $\{a_i|i=1,2,\dots,p\}$ и $\{b_j|j=1,2,\dots,q\}$ ортонормированы, фредгольмовость уравнения $x=K_ix+f$ равносильна условию

$$D_1(t)=\begin{vmatrix} 1-v_{11}(t) & \cdots & -v_{1q}(t) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ -v_{q1}(t) & \cdots & 1-v_{qq}(t) \end{vmatrix} \neq 0 \text{ для } i=1,2,$$

$$v_{jk}=\int_a^b b_j(\sigma)m_k(t,\sigma)d\sigma\ \ (j,k=1,\dots,q)$$

и условию

$$D_2(s)=\begin{vmatrix} 1-\mu_{11}(s) & \cdots & -\mu_{1p}(s) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ -\mu_{p1}(s) & \cdots & 1-\mu_{pp}(s) \end{vmatrix} \neq 0 \text{ для } i=3,4,$$

$$\mu_{ij}(s)=\int_a^b a_i(\tau)l_j(\tau,s)d\tau\ (i,j=1,\dots,p).$$

Рассмотрим теперь пространство $L^p=L^p(D)$. Уравнение (6) при $i=1$ и $i=2$ равносильно уравнению

$$(I-M)\circ(I-L\circ\Pi)x=f+\Big(N\circ\Pi^j+M\circ(L\circ\Pi)\Big)x \qquad (8)$$

при $j=0$ и $j=1$ соответственно. Поэтому в случае существования обратных операторов $(I-M)^{-1}$ и $(I-L\circ\Pi)^{-1}$ уравнение (8) эквивалентно уравнению

$$(I-P)x=g, \qquad (9)$$

где

$$P=(I-L\circ\Pi)^{-1}\circ(I-M)^{-1}\circ\Big(N\circ\Pi^j+M\circ(L\circ\Pi)\Big),$$
$$g=(I-L\circ\Pi)^{-1}\circ(I-M)^{-1}f.$$

Для того чтобы оператор $I-K_i\ (i=1,2)$ был обратим в пространстве L^p, достаточно, чтобы в этом пространстве были обратимы операторы $I-M$, $I-L\circ\Pi$, $I-P$. Аналогичное утверждение справедливо для случая $i=3,4$: оператор $I-K_i$ обратим в L^p, если обратимы в пространстве L^p операторы $I-L$, $I-M\circ\Pi$, $I-H$, где

$$H=(I-L)^{-1}\circ(I-M\circ\Pi)^{-1}\circ\Big(N\circ\Pi^j+L\circ(M\circ\Pi)\Big).$$

Так как операторы $N\circ\Pi^j+M\circ(L\circ\Pi)$ и $N\circ\Pi^j+L\circ(M\circ\Pi)$ при естественных условиях являются двумерными интегральными операторами, то уравнения (9) и уравнение $(I-H)x=v$, где $v=(I-L)^{-1}\circ(I-M\circ\Pi)^{-1}f$, есть обычные интегральные уравнения, к которым можно применять все основные результаты классической теории интегральных уравнений.

Для уравнения (6) в пространстве L^p в [Елецких, 2005: 95-97] доказана альтернатива Фредгольма в предположении о непрерывности операторов L, M, N, компактности операторов $(L \circ \Pi)^2$ и $N \circ \Pi^i + L \circ (M \circ \Pi)$ $(i = 1, 2)$ и выполнения условия $1 \notin \sigma(M)$:

1) либо уравнения $x = K_i x + f$ $(i = 1, 2)$ и $y = K_i^* y + g$ $(i = 1, 2)$ разрешимы при любых правых частях и их решения единственны;

2) либо однородные уравнения $x = K_i x$ и $y = K_i^* y$ имеют одинаковое число линейно-независимых решений $x_1, \dots, x_n$ и $y_1, \dots, y_n$ соответственно.

В пространстве C(D) непрерывных функций условия фредгольмовости уравнений (6) формулируются в зависимости от вида ядер операторов L, M и N. Для непрерывных в целом и интегрально ограниченных ядер альтернатива Фредгольма для уравнения $x = K_i x + f$ $(i = 1, 2)$ $\big(x = K_i x + f$ $(i = 3, 4)\big)$ справедлива точно тогда, когда $1 \notin \sigma(M)$ $\big(1 \notin \sigma(L)\big)$. С другими свойствами операторов и уравнений типа Романовского с частными интегралами можно детально ознакомиться в приведённой ниже литературе. Основные результаты были получены с применением общей и спектральной теории линейных операторов, а также методов теории интегральных уравнений.

Таким образом, из приведенного обзора можно сделать вывод о том, что свойства операторов типа Романовского с частными интегралами лежат в основе исследования разрешимости соответствующих уравнений типа Романовского и могут быть использованы при исследовании интегральных уравнений некоторых прикладных задач.

Список литературы

1. Елецких И.А. Вопросы теории операторов и уравнений типа Романовского с частными интегралами: Дисс. … канд. физ.-матем. наук. Липецк, 2005. 112 с.
2. Калитвин А.С. Интегральные уравнения типа В.И. Романовского с частными интегралами. Липецк: ЛГПУ, 2014. 195 с.
3. Фролова Е.В. Линейные операторы с частными интегралами в пространстве непрерывных функций: Дисс. … канд. физ.-матем. наук. Липецк, 2000. 123 с.
4. Appell J. A note on the Fredholm property of partial integral equations of Romanovskij type / J. Appell, I.A. Eletskikh, A.S. Kalitvin // J. Integral Equ. Applications. 2004. V. 16, № 1. P. 25-32.

ON ROMANOVSKY TYPE OPERATORS AND EQUATIONS WITH PARTIAL INTEGRALS

I.A. Yeletskikh
Cand. Sci. (Phys.–Math.), associate professor
yeletskikh.irina@yandex.ru
Yelets
Bunin Yelets State University

Abstract. The article presents the problem of the theory of Markov chains, formulated in 1932 by the famous Soviet mathematician V.I. Romanovskii, we introduce the definition of operators of Romanovskii type and classify theirs. We investigate linear Romanovsky type operators with partial integrals in the space of continuous functions. The properties of such operators underlie the investigation of the solvability of the corresponding Romanovsky type equations and can be used in the investigation of integral equations of some applied problems. The main results are obtained using the general and spectral theory of linear operators, as well as the methods of the theory of integral equations. In the under investigation, various classes of such operators (with continuous, degenerate, with global continuous and indecomposable kernels) and their spaces are studied. Criteria for the Fredholm property, and invertibility of Romanovsky type operators with the types of kernels listed above are applied to the study of the solvability conditions for the corresponding equations. The compositions of operators are studied and a class of operators whose compositions are integral operators is singled out. Using the Riesz and Radon Theorems on the representation of linear functionals and operators in the space of continuous functions of two variables, we obtain criteria for the action of operators of Romanovsky type with partial integrals in this space. These criteria are applied to the study of the properties of spaces of Romanovsky type operators with partial integrals. Sufficient conditions for the action of such operators in the space of continuous functions and in Lebesgue spaces, criteria for regularity of operators, conditions for the existence of dual operators are obtained. The structure of dual operators in Lebesgue spaces is studied.

Keywords: operators with partial integrals, Fredholm property, linear functional, spectral theory, dual operators.

References

1. Yeletskikh I.A. (2005) Voprosy teorii operatorov i uravneniy tipa Romanovskogo s chastnymi integralami [Questions of the theory of operators and equations of Romanovskii type with partial integrals]: Diss. ... kand. fiz.-matem. nauk. Lipetsk. 112 p.
2. Kalitvin A.S. (2014) Integral'niye uravneniya tipa V.I. Romanovskogo s chastnymi integralami [Integral equations of Romanovskii type with partial integrals] Lipetsk.195 p.
3. Frolova Ye.V. (2000) Linejnye operatory s chastnymi integralami v prostranstve nepreryvnyh funkcij [Linear operators with partial integrals in the space of continuous functions]: Diss. ... kand. fiz.-matem. nauk. Lipetsk. 123 p.
4. Appell J. (2004) A note on the Fredholm property of partial integral equations of Romanovskij type / J. Appell, I.A. Eletskikh, A.S. Kalitvin // J. Integral Equ. Applications. V. 16, № 1. P. 25-32.

УДК 519.6, 519.7

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА СТАБИЛИЗАЦИИ УПРАВЛЯЕМОЙ МАЯТНИКОВОЙ СИСТЕМЫ В УСЛОВИЯХ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Елена Викторовна Игонина
к.ф.-м.н., доцент
elenaigonina7@mail.ru
г. Елец

Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина

Аннотация. Сложность большого количества современных систем управления зачастую не позволяет получить заранее полное описание процессов, протекающих внутри системы, и ее взаимодействия со средой. Достаточно часто математическая модель управляемой системы учитывает лишь допустимые области изменения ее параметров и характеристик отдельных элементов без их конкретизации. В связи с этим возникает, с одной стороны, необходимость в развитии методов исследования систем с неполной информацией, предваряющих компьютерное моделирование, а с другой стороны – в разработке и использовании новых программных средств вычислительной техники. Математические модели управляемых маятниковых систем служат для описания широкого класса управляемых процессов и объектов, которые обладают нестабильным поведением. В режиме реального времени эксперименты с данными системами без надлежащего контроля могут представлять опасность. Построение алгоритмов стабилизации управляемых маятниковых систем в условиях