УДК 517.18 + 371.3

О СОВЕРШЕНСТВОВАНИИ ИЗУЧЕНИЯ ПОНЯТИЙ «ПОЛИНОМ» И «РАЦИОНАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ» В ШКОЛЕ И В ВУЗЕ

Сергей Вячеславович Костин
старший преподаватель
kostinsv77@mail.ru
г. Москва

Московский технологический университет (МИРЭА)

Аннотация. Важность работы по совершенствованию методики обучения школьников и студентов ключевым понятиям и утверждениям курса математики не вызывает никаких сомнений. В данной статье мы рассматриваем два крайне важных понятия как школьного, так и вузовского курса математики, а именно, понятия «полином» («многочлен») и «рациональная функция». Мы сопоставляем функциональный и алгебраический подходы к определению понятия полинома (многочлена) и делаем вывод, что в старших классах школы целесообразен переход от рассмотрения полинома как формального выражения (суммы одночленов) к рассмотрению полинома как функции. Также мы обсуждаем различные подходы к определению понятия «рациональная функция» и приводим строгое определение этого понятия. Результаты данной работы, по нашему мнению, могут быть использованы как школьными учителями математики, так и преподавателями математики в вузах.

Ключевые слова: многочлен, полином, рациональная функция, преподавание математики.

Введение

Одной из важнейших линий школьного курса математики является функционально-графическая линия. На протяжении всего курса алгебры основной школы и курса алгебры и начал математического анализа старшей школы учащиеся знакомятся с важнейшими (как для самой математики, так и для практики) функциями и классами функций.

Школьники изучают линейную функцию $y = kx + b$, квадратичную функцию $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, функцию «обратная пропорциональность» $y = \dfrac{k}{x}$ $(k \neq 0)$, функцию «арифметический квадратный корень» $y = \sqrt{x}$, функцию «модуль» $y = |x|$, тригонометрические функции, обратные тригонометрические функции, степенные, показательные, логарифмические функции и т. д. При этом из поля зрения большинства школьных учебников математики по непонятным причинам выпадают два чрезвычайно важных класса элементарных функций, а именно, полиномы и рациональные функции.

Возможно, это связано с тем, что авторы школьных учебников математики ориентируются на действующий государственный образовательный стандарт, составители которого забыли упомянуть в нем полиномы и рациональные функции.

Во избежание недоразумений отметим, что понятие «многочлен», конечно, присутствует в школьных учебниках математики. Однако, к сожалению, в большинстве учебников математики многочлен рассматривается исключительно как формальное выражение (то есть как алгебраическая сумма одночленов), а не как функция.

На начальном этапе изучения математики, когда учащиеся еще не готовы к восприятию понятия функции, и когда школьникам важно овладеть техникой тождественных преобразований («работой с буквами»), рассмотрение многочлена как формального выражения совершенно оправданно и не вызывает никаких вопросов.

Непонятно другое: почему в старших классах школы, когда акцент смещается в сторону математического анализа и в сторону исследования функций (в том числе, средствами математического анализа), авторы многих школьных учебников математики продолжают придерживаться «алгебраического» подхода к понятию многочлена и не переходят к трактовке многочлена как функции.

Что касается рациональных функций, то им «повезло» еще меньше, чем многочленам. В подавляющем большинстве школьных учебников математики вообще не вводится чрезвычайно важное (как для математики, так и для ее приложений) понятие рациональной функции. Вводится лишь понятие дробно-линейной функции, которое является весьма специальным частным случаем понятия рациональной функции.

В нашей статье мы обсудим некоторые вопросы, связанные с изучением понятий «полином» и «рациональная функция» в школе и в вузе.

Сравнение алгебраического и функционального подхода к понятию многочлена (полинома)

В нашей статье мы для простоты ограничимся рассмотрением многочленов (полиномов) с действительными коэффициентами, зависящих от одной действительной переменной.

Для большей четкости терминологии мы будем придерживаться следующего соглашения: термином «многочлен» мы будем называть формальное выражение (сумму одночленов), а термином «полином» мы будем называть функцию. Иначе говоря, полином — это функция, которая определена на множестве всех действительных чисел $\boldsymbol{R}$, причем эта функция на всем своем множестве определения может быть задана аналитически с помощью одной формулы, имеющей вид многочлена.

Многочлен степени n $(n \in \boldsymbol{N} \cup \{0\})$ — это формальное выражение[1] вида $c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0$, где $c_0, c_1, \ldots, c_n$ — действительные числа, причем $c_n \neq 0$. Числа $c_0, c_1, \ldots, c_n$ называются *коэффициентами* многочлена. Число 0 (нуль), по определению, тоже является многочленом. Этот многочлен называется *нулевым* многочленом. Степень нулевого многочлена равна $-\infty$.

Пусть $P_n(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0$ $(c_n \neq 0)$ — многочлен степени n, $Q_m(x) = d_m x^m + d_{m-1}x^{m-1} + \ldots + d_1 x + d_0$ $(d_m \neq 0)$ — многочлен степени m и пусть $n \geq m$. Многочлены $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ называются *равными*, если $m = n$ и при всех $i \in [0\,..\,n]$ имеет место равенство $c_i = d_i$. (Символом $[p\,..\,q]$, где $p, q \in \boldsymbol{Z}$, мы обозначаем множество $\{x \in \boldsymbol{Z} \mid p \leq x \leq q\}$. Это множество мы называем «сегмент от p до q». Другое, более длинное название: «отрезок целых чисел от p до q».)

Суммой многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ называется многочлен $c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots$ $\ldots + c_{m+1}x^{m+1} + (c_m + d_m)x^m + (c_{m-1} + d_{m-1})x^{m-1} + \ldots + (c_1 + d_1)x + (c_0 + d_0)$. *Произведением*

[1] Некоторые авторы (см., например, [Кострикин, 2000: 181]) подходят совсем формально и определяют многочлен просто как упорядоченный набор действительных чисел $\langle c_n, c_{n-1}, \ldots, c_0 \rangle$. Операции над многочленами (сложение многочленов, умножение многочленов и т.д.) определяются в этом случае как некоторые операции над упорядоченными наборами действительных чисел. Такой формальный подход, будучи абсолютно строгим с математической точки зрения, на практике тем не менее оказывается не очень удобным. Поэтому в нашей статье мы определяем многочлен не как упорядоченный набор действительных чисел, а как формальное выражение.

многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ называется многочлен $e_{m+n}x^{m+n} + e_{m+n-1}x^{m+n-1} + \ldots$ $\ldots + e_1x + e_0$, где при всех $k \in [0\,..\,m+n]$ имеет место равенство $e_k = \sum_{i=0}^{k} c_i d_{k-i}$ (считаем, что $c_i = 0$ при $i > n$ и $d_j = 0$ при $j > m$).

Множество всех многочленов с действительными коэффициентами, зависящих от одной переменной x, обозначается символом $\boldsymbol{R}[x]$. Можно доказать, что относительно введенных операций сложения и умножения многочленов множество $\boldsymbol{R}[x]$ является ассоциативно-коммутативным кольцом с единицей (в качестве единицы выступает многочлен нулевой степени, равный числу 1) и без делителей нуля (в качестве нуля, то есть в качестве нейтрального элемента аддитивной группы кольца $\boldsymbol{R}[x]$, выступает нулевой многочлен). Иначе говоря, $\boldsymbol{R}[x]$ — это целостное кольцо или область целостности.

Отметим, что $P_n(x)$ — это просто удобный символ, служащий для краткого обозначения многочлена $c_nx^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1x + c_0$. Запись $P_n(x)$ следует рассматривать как единый символ, то есть эту запись не надо (во всяком случае, пока мы говорим о многочленах) воспринимать как значение некоторой функции P_n в точке x.

Каждому многочлену можно поставить в соответствие определенную функцию. Функция f, которая ставится в соответствие многочлену $P_n(x) =$ $= c_nx^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1x + c_0$ ($c_n \neq 0$), обладает следующими свойствами: 1) множеством определения и множеством прибытия функции f является множество всех действительных чисел $\boldsymbol{R}$, иначе говоря, функция f отображает множество всех действительных чисел $\boldsymbol{R}$ в себя ($f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$); 2) ($\forall x_0 \in \boldsymbol{R}$): $f(x_0) = c_nx_0^n + c_{n-1}x_0^{n-1} + \ldots + c_1x_0 + c_0$.

Функция f называется *полиномом*, соответствующим многочлену $P_n(x)$. Будем говорить также, что многочлен $P_n(x)$ *порождает* полином f.

Для того чтобы упростить обозначения, в дальнейшем мы будем обозначать полином f символом P_n. Таким образом, в равенстве $P_n(x) = c_nx^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots$ $\ldots + c_1x + c_0$ становится возможным воспринимать символ $P_n(x)$ как составной символ, а именно, как значение полинома P_n в точке x.

Пусть $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ — произвольная функция, отображающая множество действительных чисел $\boldsymbol{R}$ в себя. Функция f называется полиномом, если существует многочлен $P_n(x)$, который порождает функцию f.

Множество всех полиномов мы будем обозначать символом $\mathrm{Poly}(\boldsymbol{R})$. Множество $\mathrm{Poly}(\boldsymbol{R})$ является подмножеством множества $M(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}) = \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{R}}$ всех функций, отображающих множество действительных чисел $\boldsymbol{R}$ в себя.

Из определения полинома следует, что сумма и произведение двух полиномов снова являются полиномами. Иначе говоря, множество $\mathrm{Poly}(\boldsymbol{R})$ замкнуто относительно операций сложения и умножения своих элементов. Отсюда следует, что множество всех полиномов $\mathrm{Poly}(\boldsymbol{R})$ является подкольцом в кольце всех функций $M(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R})$.

Кольцо $\mathrm{Poly}(\boldsymbol{R})$ является ассоциативно-коммутативным кольцом с единицей (в качестве единицы выступает функция, тождественно равная единице) и без делителей нуля (в качестве нуля, то есть в качестве нейтрального элемента аддитивной группы кольца $\mathrm{Poly}(\boldsymbol{R})$, выступает функция, тождественно равная нулю). Иначе говоря, $\mathrm{Poly}(\boldsymbol{R})$ — это целостное кольцо или область целостности.

Можно доказать (см., например, [Винберг, 1980: 17]), что отображение $\varphi: \boldsymbol{R}[x] \to \mathrm{Poly}(\boldsymbol{R})$, ставящее в соответствие каждому многочлену $P_n(x) \in \boldsymbol{R}[x]$ порождаемый им полином $P_n(x) \in \mathrm{Poly}(\boldsymbol{R})$, является изоморфизмом кольца $\boldsymbol{R}[x]$ на кольцо $\mathrm{Poly}(\boldsymbol{R})$. Это означает, что соответствие между многочленами и полиномами является взаимно однозначным, а также что операции сложения и умножения многочленов «согласованы» с операциями сложения и умножения полиномов.

В некоторых курсах высшей алгебры (см., например, [Кострикин, 2000], [Куликов, 1979]), предназначенных для студентов математических факультетов университетов и педагогических вузов, рассматриваются многочлены не над полем действительных или комплексных чисел, а над произвольным ассоциативно-коммутативным кольцом с единицей K. В этом случае возможна ситуация, когда двум различным многочленам из кольца $K[x]$ соответствует один и тот же полином из кольца $\mathrm{Poly}(K)$. Это означает, что отображение $\varphi: K[x] \to \mathrm{Poly}(K)$ уже не является изоморфизмом (однако это отображение остается гомоморфизмом кольца $K[x]$ в кольцо $\mathrm{Poly}(K)$).

Например, если $K = \boldsymbol{Z}_3$ — кольцо классов вычетов по модулю 3, то многочлены $P(x) = x$ и $Q(x) = x^3$ порождают один и тот же полином $f: \boldsymbol{Z}_3 \to \boldsymbol{Z}_3$. Действительно, $P(\overline{0}) = \overline{0} = Q(\overline{0})$, $P(\overline{1}) = \overline{1} = Q(\overline{1})$, $P(\overline{2}) = \overline{2} = \overline{8} = Q(\overline{2})$.

Какой же подход к трактовке многочлена (полинома) более уместен в средней школе — алгебраический или функциональный?

В основной школе (во всяком случае, до 7–8 класса включительно) предпочтительным (а на начальном этапе изучения алгебры — единственно возможным) является, по нашему мнению, алгебраический подход. На этом этапе основной задачей школьников является овладение техникой тождественных преобразований (сложение и умножение многочленов, приведение подобных членов, разложение многочленов на множители и т. д.). Функциональная природа многочлена здесь не играет сколько-нибудь существенной роли, да и не может быть в полной мере оценена школьниками.

Напротив, в старшей школе, по нашему мнению, надо переходить к рассмотрению многочлена как функции. Приведем несколько аргументов в пользу нашей точки зрения.

1. Внутренняя логика школьного курса математики. В старших классах учащиеся систематически знакомятся с самыми разными элементарными функциями (тригонометрическими, степенными, показательными, логарифмическими и т. д.). Многочлены образуют один из основных классов элементарных функций и они по праву должны занять свое достойное место среди других элементарных функций, а не оставаться «формальными выражениями» и «суммами одночленов».

2. Преемственность средней и высшей школы. В курсах высшей математики и математического анализа, читаемых в вузах, многочлен обычно рассматривается как функция. Исключение составляют некоторые курсы высшей алгебры, ориентированные на студентов, специализирующихся в области математики

(см., например, [Кострикин, 2000], [Куликов, 1979]). Однако и здесь ситуация далеко не однозначна. Например, в предисловии к учебному пособию [Размыслович, 1987], написанному авторами из Белорусского государственного университета, и предназначенному для студентов факультета прикладной математики, авторы специально подчеркивают одну из особенностей этого пособия: «…принятие в качестве исходного определения многочлена как функции. При таком подходе, во-первых, прослеживается межпредметная связь (с математическим анализом), во-вторых, упрощаются доказательства свойств кольца многочленов».

3. Упрощение ряда формулировок. Если многочлен рассматривается как формальное выражение (то есть как сумма одночленов), то надо специально определять такие понятия, как равенство двух многочленов, сумма двух многочленов, произведение двух многочленов. Если же многочлен рассматривается как функция, то все эти определения становятся лишними, поскольку соответствующие понятия для функций (равенство двух функций, сумма двух функций, произведение двух функций) учащимся уже известны.

Строгое определение понятий «полином» и «рациональная функция»

Во многих учебниках математики (как для средней, так и для высшей школы) приводится, по нашему мнению, не совсем корректное (или, во всяком случае, не совсем полное) определение понятия «полином».

Например, в учебнике [Бугров, 1988], предназначенном для студентов инженерно-технических специальностей вузов, на стр. 89 читаем: «Функция $P(x)=a_0x^n+$ $+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_0$, где a_k — постоянные коэффициенты, называется полиномом степени n». (В оригинале используется слово «многочлен». Мы заменили это слово на слово «полином», имея в виду наше понимание терминов «многочлен» и «полином».)

По поводу этого определения можно сделать сразу несколько замечаний. Во-первых, авторы забыли про условие $a_n\neq 0$. Без этого условия можно утверждать лишь, что $P(x)$ — это полином степени не выше n. Во-вторых, непонятна фраза «a_k — постоянные коэффициенты». В математике есть понятие «коэффициент полинома», есть понятие «коэффициент гомотетии», есть понятие «коэффициент корреляции», но нет абстрактного понятия «коэффициент». Иначе говоря, слово «коэффициент» само по себе, то есть без указания другого понятия, к которому это слово относится, не имеет четко определенного значения. Правильнее говорить, что a_k — это действительные (или комплексные) числа, причем эти числа называются коэффициентами полинома $P(x)$. В-третьих, из приведенного определения не совсем понятно следующее. Предположим, что нам дана некоторая функция. Как определить, является ли эта функция полиномом? Наконец, если функция является полиномом, то однозначно ли определены степень этого полинома и его коэффициенты?

Для того чтобы снять все эти вопросы, мы приведем строгое определение понятия «полином», а также строгое определение понятия «рациональная функция».

Напомним (см., например, [Ляшко, 1988: 16]), что *отображение* f множества A во множество B ($B\neq\varnothing$), — это упорядоченная тройка множеств $\langle A,B,C\rangle$, причем множество C является подмножеством декартова произведения $A\times B$ ($C\subset A\times B$) таким, что:

1) $(\forall\, a\in A)\,(\exists\, b\in B)$: $\langle a,b\rangle\in C$;

2) $(\forall\, a \in A)$ $(\forall\, b_1, b_2 \in B)$: $(\langle a, b_1\rangle \in C) \wedge (\langle a, b_2\rangle \in C) \Rightarrow (b_1 = b_2)$.

Множество A называется *множеством определения* отображения f и обозначается символом $V(f)$. Множество B называется *множеством прибытия* отображения f и обозначается символом $Z(f)$. Множество C называется *носителем* отображения f и обозначается символом $R(f)$. Множество $\{b \in B \mid (\exists\, a \in A) : \langle a, b\rangle \in C\}$ называется *множеством значений* отображения f и обозначается символом $W(f)$. Подробнее об используемой нами терминологии и системе обозначений можно прочитать в нашей статье [Костин, 2009].

Пусть $f = \langle A, B, C\rangle$ — отображение множества A во множество B, пусть $A \neq \varnothing$ и пусть $a \in A$. Из определения отображения следует, что существует и притом ровно один элемент $b \in B$ такой, что $\langle a, b\rangle \in C$. Этот элемент b называется *значением* отображения f на элементе a и обозначается символом $f(a)$.

Отметим, что множество определения $A = V(f)$ отображения $f == \langle A, B, C\rangle$ может быть пустым множеством. Поскольку $C \subset A \times B$, то носитель $C = R(f)$ отображения f тогда тоже является пустым множеством. В этом случае говорят, что f — это *пустое отображение* во множество B, и пишут $f = \varnothing_B$.

Например, действительнозначная функция одной действительной переменной, задаваемая аналитически формулой $f(x) = \arccos x + \ln(x^2 - 4)$, имеет, как легко видеть, пустое множество определения, а значит, является пустой функцией с множеством прибытия $\boldsymbol{R}$ (то есть $f = \varnothing_{\boldsymbol{R}}$).

Отметим, что существует бесконечно много различных пустых отображений, которые различаются своими множествами прибытия, например, $\varnothing_{\boldsymbol{R}}$, $\varnothing_{\boldsymbol{Z}}$ и т. д., тогда как пустое множество $\varnothing$ существует только одно.

Отображение $f = \langle A, B, C\rangle$ называется *функцией*, если множество прибытия $B = Z(f)$ отображения f является подмножеством множества действительных чисел $\boldsymbol{R}$ или подмножеством множества комплексных чисел $\boldsymbol{C}$ (то есть $B \subset \boldsymbol{R}$ или $B \subset \boldsymbol{C}$).

Пусть $f = \langle A, B, C\rangle$ — функция. Множество $\{a \in A \mid f(a) = 0\}$ называется *нулевым* множеством (или нуль-множеством) функции f и обозначается символом $N(f)$.

В школе (да и в вузе) обычно рассматриваются функции одного, и притом числового, аргумента. В этом случае не только множество прибытия $B = Z(f)$, но и множество определения $A = V(f)$ функции f является подмножеством множества действительных чисел $\boldsymbol{R}$ или подмножеством множества комплексных чисел $\boldsymbol{C}$ (то есть $A \subset \boldsymbol{R}$ или $A \subset \boldsymbol{C}$). В нашей статье мы ограничимся рассмотрением действительнозначных функций одного действительного аргумента, то есть мы будем считать, что $A = V(f) \subset \boldsymbol{R}$ и $B = Z(f) \subset \boldsymbol{R}$.

После этого краткого теоретического введения мы вполне подготовлены для того, чтобы дать строгие определения понятий «полином» и «рациональная функция».

Определение 1. Функция f называется *полиномом*, если:

1) множеством определения функции f является множество всех действительных чисел $\boldsymbol{R}$ (то есть $V(f) = \boldsymbol{R}$);

2) множеством прибытия функции f является множество всех действительных чисел $\boldsymbol{R}$ (то есть $Z(f)=\boldsymbol{R}$);

3) имеет место хотя бы одно из следующих двух условий:

3а) $(\exists\, n\in \boldsymbol{N}\cup\{0\})$ $(\exists\, c_0, c_1, \ldots, c_n\in \boldsymbol{R}, c_n\neq 0)$ $(\forall\, x\in \boldsymbol{R})$: $f(x)=c_n x^n+c_{n-1}x^{n-1}+\ldots$ $\ldots+c_1 x+c_0$;

3б) $(\forall\, x\in \boldsymbol{R})$: $f(x)=0$. □

Теорема 1 (теорема единственности). Справедливы следующие два утверждения.

1. Условия 3а) и 3б) не могут иметь место одновременно.

2. Если имеет место условие 3а), то натуральное число n и действительные числа $c_0, c_1, \ldots, c_n$ определены однозначно. □

Определение 2. Если имеет место условие 3а), то полином f называется *ненулевым* полиномом, число n называется *степенью* полинома f, а числа $c_0, c_1, \ldots, c_n$ называются *коэффициентами* полинома f (в частности, c_n — старший коэффициент, c_0 — свободный член).

Если имеет место условие 3б), то полином f называется *нулевым* полиномом, символ $-\infty$ называется *степенью* этого полинома. □

Степень полинома f обозначается символом $\deg f$.

Множество всех полиномов обозначается символом $\mathrm{Poly}(\boldsymbol{R})$. Множество $\mathrm{Poly}(\boldsymbol{R})$ является областью целостности.

Теперь перейдем к определению рациональной функции.

Определение 3. Функция f называется *рациональной* функцией, если множеством прибытия функции f является множество всех действительных чисел $\boldsymbol{R}$ (то есть $Z(f)=\boldsymbol{R}$) и существуют полиномы g и h такие, что:

1) множество определения функции f совпадает с множеством $\boldsymbol{R}\setminus N(h)$ (то есть $V(f)=\boldsymbol{R}\setminus N(h)$); 2) $(\forall\, x\in V(f))$: $f(x)=\dfrac{g(x)}{h(x)}$. □

Из приведенного определения можно сделать, в частности, следующие два вывода.

1. Любой полином f является рациональной функцией. Действительно, функция f получается, например, если положить $g=f$, $h=1$. 2. Пустая функция с множеством прибытия $\boldsymbol{R}$ (то есть функция $\varnothing_{\boldsymbol{R}}$) является рациональной функцией. Действительно, функция $\varnothing_{\boldsymbol{R}}$ получается, например, если положить $g=1$, $h=0$.

Определение 4. Функция $\varnothing_{\boldsymbol{R}}$ называется *пустой* рациональной функцией. □

Пусть f — непустая рациональная функция. Множеством определения $V(f)$ функции f является либо множество всех действительных чисел, либо множество всех действительных чисел за исключением конечного числа точек. Это следует из того, что любой ненулевой многочлен h либо не имеет действительных корней, либо имеет конечное число действительных корней, а значит, нулевое множество $N(h)$ многочлена h либо является пустым множеством, либо состоит из конечного числа точек.

Определение 5. Непустая рациональная функция f называется *нулевой* рациональной функцией, если $(\forall\, x\in V(f))$: $f(x)=0$. □

Существует бесконечно много различных нулевых рациональных функций. (Тогда как нулевой полином существует только один.) Например, $f_1(x)=\dfrac{0}{x-1}$, $f_2(x)=\dfrac{0}{x^2-x}$ и $f_3(x)=\dfrac{0}{x^3-x^2}$ — нулевые рациональные функции, причем различных среди этих функций только две, поскольку функции $f_2(x)$ и $f_3(x)$ совпадают друг с другом (эти нулевые функции имеют одинаковое множество определения). Нулевые рациональные функции образуют класс нулевых рациональных функций.

Пусть f — непустая и ненулевая рациональная функция. Полиномы g и h, о которых идет речь в определении 3, определены неоднозначно. Например, если положить $g_1(x)=g(x)(x^2+1)$, $h_1(x)=h(x)(x^2+1)$, то полиномы g_1 и h_1 задают («порождают») ту же самую рациональную функцию f, что и полиномы g и h. Однако имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Разность $\Delta=\deg g-\deg h$ степеней полиномов g и h определена однозначно. Иначе говоря, разность Δ не зависит от выбора полиномов g и h, порождающих рациональную функцию f, а зависит только от самой рациональной функции f. □

Определение 6. Если $\Delta<0$, то рациональная функция f называется *правильной*. Если $\Delta\ge 0$, то рациональная функция f называется *неправильной*. □

Любой ненулевой полином f является (хотя это может показаться на первый взгляд неожиданным) неправильной рациональной функцией. Действительно, полином f получается, например, если положить $g=f$, $h=1$. Поскольку $\Delta=\deg g-$ $-\deg h=\deg f\ge 0$, то полином f — это неправильная рациональная функция.

Теорема 3. Любую неправильную рациональную функцию можно представить в виде суммы полинома и правильной рациональной функции. □

Множество всех рациональных функций обозначается символом $\mathrm{Rat}(\boldsymbol{R})$. На множестве $\mathrm{Rat}(\boldsymbol{R})\setminus\{\varnothing_{\boldsymbol{R}}\}$ всех непустых рациональных функций можно ввести отношение эквивалентности.

Определение 7. Непустые рациональные функции f и g называются *эквивалентными*, если $(\forall\, x\in V(f)\cap V(g))$: $f(x)=g(x)$. □

Равносильное определение: рациональные функции f и g называются эквивалентными, если их разность $f-g$ является нулевой рациональной функцией.

Можно доказать, что введенное нами отношение является рефлексивным, симметричным и транзитивным, то есть действительно является отношением эквивалентности. Тот факт, что рациональные функции f и g эквивалентны, будем записывать так: $f\sim g$.

Например, рациональные функции $f_1(x)=\dfrac{x-2}{x^2-4}$ и $f_2(x)=\dfrac{x}{x^2+2x}$ являются эквивалентными, то есть $f_1(x)\sim f_2(x)$.

Относительно введенного отношения эквивалентности множество $\mathrm{Rat}(\boldsymbol{R})\setminus\{\varnothing_{\boldsymbol{R}}\}$ всех непустых рациональных функций распадается на классы эквивалентности. Символом $[f]$ будем обозначать класс эквивалентности, содержащий рациональную функцию f.

Стандартным образом вводятся операции сложения и умножения классов эквивалентности: $[f]+[g]=[f+g]$, $[f][g]=[fg]$. (Можно доказать, что результат операции над классами эквивалентности не зависит от выбора представителей f и g этих классов.) Имеет место следующий замечательный факт: относительно введенных операций сложения и умножения классов эквивалентности фактормножество $(\mathrm{Rat}(\boldsymbol{R})\setminus\{\varnothing_{\boldsymbol{R}}\})/\sim$ образует поле. Это поле (возможно, не совсем точно) называют полем рациональных функций.

В качестве нулевого элемента поля рациональных функций выступает класс [0] рациональных функций, эквивалентных константе 0 (это не что иное, как класс нулевых рациональных функций). В качестве единичного элемента поля рациональных функций выступает класс [1] рациональных функций, эквивалентных константе 1.

Отметим, что в некоторых книгах вместо термина «рациональная функция» используется термин «рациональная дробь». Последний термин, по нашему мнению, является не совсем удачным. Дело в том, что прилагательное rational (рациональный) происходит от существительного ratio — отношение, дробь. Поэтому говорить «рациональная дробь» — это все равно, что говорить «масло масляное». Кроме того, слово «функция» представляется нам более точным и содержательным, чем расплывчатое слово «дробь». Исходя из этих соображений, в нашей статье мы используем термин «рациональная функция».

Мы привели строгие определения понятий «полином» (определение 1) и «рациональная функция» (определение 3). Именно такие строгие определения этих понятий, по нашему мнению, должны присутствовать в вузовских курсах высшей математики и математического анализа (во всяком случае, в курсах, предназначенных для студентов математических специальностей университетов и педагогических вузов, а также в курсах, предназначенных для студентов технических вузов с расширенной программой по математике). В средней школе эти определения должны упрощаться с учетом реального уровня подготовки школьников. Естественно, что степень формализации должна зависеть также от того, на каком уровне (базовом или профильном) ведется изложение материала в старших классах школы.

Заключение

В старших классах школы, по нашему мнению, предпочтительным является функциональный (а не алгебраический) подход к понятию многочлена (полинома). Кроме того, крайне полезным, как мы считаем, было бы знакомство школьников с классом рациональных функций. Класс рациональных функций замкнут относительно операций сложения, вычитания, умножения, деления и включает в себя степенные функции с целым показателем степени, полиномы и дробно-линейные функции. Фактически понятие рациональной функции — это исключительно важное интегрирующее понятие, позволяющее учащимся по-новому взглянуть на многие известные им классы функций.

Изучение в старших классах школы полиномов и рациональных функций, по нашему мнению, должно расширить кругозор школьников, повысить их математическую культуру, а также подготовить к дальнейшему обучению в вузе.

Автор будет благодарен читателям за любые комментарии или замечания по затронутым в данной статье вопросам.

Список литературы

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. (1988) Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление. 3-е изд., испр. М.: Наука.

2. Винберг Э.Б. (1980) Алгебра многочленов. М.: Просвещение.
3. Костин С.В. (2009) Система обозначений для основных многозначных функций комплексной переменной и для их значений // Математика в высшем образовании. № 7. С. 39–80.
4. Кострикин А.И. (2000) Введение в алгебру. Ч. 1. Основы алгебры. М.: Физматлит.
5. Куликов Л.Я. (1979) Алгебра и теория чисел. М.: Высш. шк.
6. Ляшко И.И., Емельянов В.Ф., Боярчук А.К. (1988) Основы классического и современного математического анализа. Киев: Выща шк.
7. Размыслович Г.П., Феденя М.М., Ширяев В.М. (1987) Геометрия и алгебра. Минск: Университетское.

ON IMPROVEMENT OF STUDYING OF THE CONCEPTS «POLYNOM» AND «RATIONAL FUNCTION» AT SCHOOL AND IN HIGHER EDUCATION INSTITUTIONS

S.V. Kostin
senior lecturer
kostinsv77@mail.ru
Moscow
Moscow technological university

Abstract. Importance of further work on improvement of techniques of training of school and university students in key concepts and statements of mathematics doesn't raise any doubts. In this article we consider two extremely important concepts of both school and high school mathematics, namely, the concepts «polynomial» and «rational function». We compare functional and algebraic approaches to the definition of a concept of polynomial and draw at a conclusion that in secondary school transition from consideration of a polynomial as a formal expression (sum of monomials) to consideration of a polynomial as a functions is expedient. Also we discuss various approaches to definition of the concept «rational function» and give strict definition of this concept. We hope that results of our work can be used both by school and university mathematics teachers.

Keywords: polynomial, rational function, teaching of mathematics.

References

1. Bugrov Ya.S., Nikol'skiy S.M. (1988) Vysshaya matematika. Differentsial'noe i integral'noe ischislenie. 3-e izd., ispr. [Higher mathematics. Calculus] M.: Nauka.
2. Kostin S.V. (2009) Sistema oboznacheniy dlya osnovnykh mnogoznachnykh funktsiy kompleksnoy peremennoy i dlya ikh znacheniy [System of designations for multi-valued functions of complex variable and for values of these functions] // Matematika v vysshem obrazovanii. № 7. S. 39–80.
3. Kostrikin A.I. (2000) Vvedenie v algebru. Chast 1. Osnovy algebry [Introduction to algebra. Part 1. Basics of algebra] M.: Fizmatlit.
4. Kulikov L.Ya. (1979) Algebra i teoriya chisel [Algebra and number theory] M.: Vyssh. shk.
5. Lyashko I.I., Emel'yanov V.F., Boyarchuk A.K. (1988) Osnovy klassicheskogo i sovremennogo ma-tematicheskogo analiza [Basics of classic and modern calculus]. Kiev: Vyshcha shk.
6. Razmyslovich G.P., Fedenya M.M., Shiryaev V.M. (1987) Geometriya i algebra [Geometry and algebra] Minsk: Universitetskoe.
7. Vinberg E.B. (1980) Algebra mnogochlenov [Algebra of polynomials] M.: Prosveshchenie.