17. Kriz J. (2001) Self-Organization of Cognitive and Interactional Processes. Published in: Matthies, M., Malchow, H. & Kriz, J (Eds): Integrative Systems Approaches to Natural and Social Dynamics. Heidelberg /New York: Springer, pp. 517-537.
18. Sanders M. (2011) Embracing Critical Thinking as a Model for Professional Development. Inquiry: Critical Thinking Across the Disciplines. Vol. 26, pp. 29-37-108.
19. Sekovanov, V., Ivkov V., Piguzov, A., Fateev, A. (2016) Exegution of Mathematics and Information multistep task "BUILDING A FRACTAL SET WITH L-SYSTEMS AND INFORMATION TECHNOLOGIES" as a means of creativity of students. Selected Papers of the XI International scientific-practical conference «Modern information technologies and IT-education» (SITITO 2016), pp. 204-211.
20. Smirnov E.I. (2017) Synergy of Researching «a Problem Zone» of a Basic Educational Element of Mathematical Education Content. Yaroslavl Pedagogical Bulletin. V. 5, pp. 82-89.

УДК 37.016:51

ПАРАБОЛА КАК СРЕДСТВО ДЕМОНСТРАЦИИ ЕДИНСТВА ТЕОРИИ И ПРАКТИКИ (ИЗ ОПЫТА КРУЖКОВОЙ РАБОТЫ)

Никита Александрович Казаков
студент-бакалавр
alphan95@mail.ru
г. Москва
Московский государственный областной университет

Татьяна Ивановна Кузнецова
д.п.н., профессор
kuzti45@gmail.com
г. Москва
Институт русского языка и культуры Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова

Аннотация. В статье раскрываются вопросы организации деятельности обучающихся на основе использования разнообразного материала, касающегося квадратичной функции и её графика. Предложены материалы для работы с обучающимися, находящимися на различных уровнях восприятия и усвоения математического материала: на базовом и профильном уровнях. Задачи статьи демонстрируют межпредметные связи математики с другими науками, ярко выражают возможности практического применения изучаемой тематики. В работу также привнесены аспекты математического моделирования в интерактивной среде GeoGebra (при реализации чертежей олимпиадной задачи) и демонстрации справедливости математических отношений. Организация проектной работы обучающихся на основе материалов статьи реализует возможности их деятельности на творческом уровне.

Ключевые слова: парабола; уравнение; практическая задача; модель; чертёж; проектная деятельность.

Общенаучный подход. Линиями второго порядка называются плоские линии, декартовы прямоугольные координаты которых удовлетворяют алгебраическому уравнению второй степени

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0\,.$$

Парабола является частным случаем линии второго порядка [1].

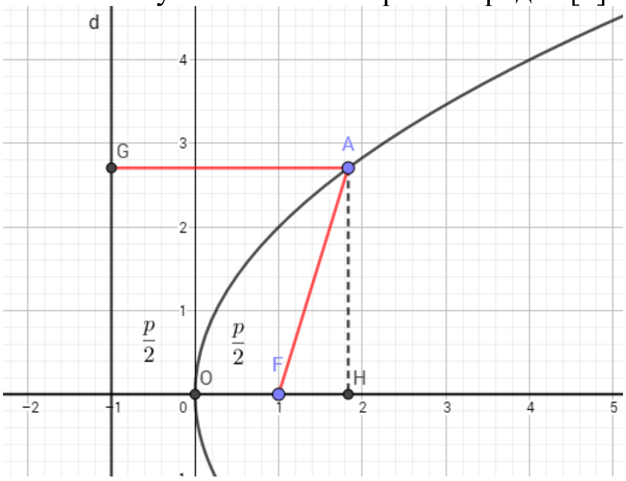

Рис.1. К общему определению параболы

1. Геометрическое определение. Параболой называется геометрическое место точек плоскости, равноудалённых от заданной точки F и заданной прямой d.

Точка $F(\frac{p}{2};0)$ называется фокусом параболы, прямая d называется директрисой параболы. Число p есть расстояние от фокуса параболы до её директрисы и называется фокальным параметром параболы.

Уравнение директрисы: $x=-\frac{p}{2}$.

Из геометрического определения параболы можно получить её каноническое уравнение, рассмотрев на рис. 1 прямоугольный ΔFHA. По теореме Пифагора:

$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2$$

$$x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2=x^2+px+\frac{p^2}{4}$$

$$y^2=2px \quad (1).$$

Уравнение (1) — каноническое уравнение параболы.

2. При обучении в средней школе парабола определяется как линия, являющаяся графиком квадратичной функции, задаваемой уравнением:

$$y=ax^2+bx+c \text{ , где } a\neq 0. \ (2)$$

Основное отличие уравнения (1) от уравнения (2) заключается в том, что в первом случае квадратичная зависимость представлена по аргументу y, а во втором – по аргументу x, что, по сути, меняет лишь ориентацию параболы относительно осей координат. При выявлении общего вида графика квадратичной функции школьниками используется метод «сгущения точек», т. е. рассчитывается таблица значений независимой и зависимой переменных, по ней строятся точки, которые затем соединяются плавной линией.

Важнейшим компонентом при обучении математике является мотивировка и актуализация знаний [2]. К сожалению, при формировании у обучающихся основных знаний и способов действий, не всегда эти знания подкреплены яркими примерами и задачами из повседневной жизни, в которых полученные знания имели бы прикладное значение. В связи с этим, по нашему мнению, возникает необходимость в расширении базовых знаний и умений. Первым шагом к достижению поставленной цели является решение следующих задач:

1) расширение круга задач, имеющих практическую значимость;
2) расширение теоретического блока знаний, решение нестандартных задач;
3) демонстрация связи изучаемой темы с повседневной жизнью;
4) организация творческой проектной деятельности обучающихся.

Приведём возможные варианты решения сформулированных задач.

3. Прежде всего, необходимо продемонстрировать межпредметные связи [5; 7], рассказав обучающимся, например, о том, что любое равноускоренное движение тела может быть описано квадратичной функцией, зависящей от времени. Целесообразно написать уравнение зависимости координаты от времени: $x(t) = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}$, можно предложить решить задачу из физики на нахождение времени пути при известной проекции скорости, ускорения, начального и конечного положения тела на оси абсцисс. Ценность и необходимость решения таких задач состоит в том, что осуществляется варьирование несущественными признаками и отход от «шаблонного» восприятия параболы и квадратичной функции.

Далее, можно обратить внимание обучающихся на то, что любое тело, брошенное под углом к горизонту, опишет своим полётом траекторию, которая будет являться параболой. В качестве творческого задания и одновременно для активизации умственной деятельности можно попросить учеников привести как можно больше примеров, в которых объект движется по параболе (снаряд пушки, прыжок дельфина, полёт футбольного мяча). В связи с получением новых знаний расширяется круг задач. Например, можно предложить школьникам следующую задачу.

Задача 1. Из пушки, стоящей на земле, вылетает снаряд. Пусть центр системы координат – пушка. Известно, что в своей верхней точке на высоте 50 ед. снаряд пролетал тело, отдалённое от пушки на 5 единиц. Требуется:

а) ответить на вопрос: какую координату по оси абсцисс будет иметь тело, в который попадёт снаряд (на земле);

б) описать формулой траекторию движения снаряда.

Решение:

а) поскольку пушка помещена в начало координат, то задача сводится к определению абсциссы точки пересечения параболы с положительной полуосью абсцисс. Пусть уравнение $y = ax^2 + bx + c$ описывает траекторию движения снаряда, тогда $c = 0$, $-\frac{b}{2a} = 5$. Координата падения снаряда будет одним из решений уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, причём, не нулевым, поскольку нулевое решение соответствует выбросу снаряда из пушки. Тогда, $x(ax + b) = 0,\ \ b = -10a$

Следовательно, $ax - 10a = 0,\ \ a \neq 0$ значит $x = 10$. Точно такой же ответ можно получить, рассуждая о свойстве параболы. Поскольку ось параболы пройдёт через точку (5; 0), то точка падения будет симметрична началу координат относительно этой точки. Значит, искомая координата $x = 5 + 5 = 10$.

б) Используем вышеизложенные результаты, а также то, что точка с координатами (5; 50) принадлежит искомому графику функции $y = ax^2 + bx + c$. Значит, $50 = 25a + 5b + 0,\ \ b = -10a$, откуда получаем: $-25a = 50$; следовательно,

$a = -2$, $b = 20$. Итак, искомое уравнение траектории полёта снаряда будет иметь вид: $y = -2x^2 + 20x$.

Замечание. Необходимо варьировать условия задачи, привязывая их к жизненным ситуациям. (Например) Кроме того, ту же задачу можно сформулировать иначе:

Задача 1.1. Футболист сборной России даёт пас игрокам, находящимся на разных расстояниях от него. В максимальной точке полёта мяч пролетел над игроком № 1, удалённым на 5 метров от пасующего игрока, на высоте 50 метров. Перелетит ли мяч игрока № 2, находящегося на расстоянии 12 метров от пасующего или не долетит до него? Сколько метров останется добежать игроку № 2 для того, чтобы завладеть мячом? Опишите траекторию полёта мяча.

4. Итак, на этапе изучения школьниками основного теоретического материала следует представить им общенаучный подход к трактовке понятия «парабола», сформулировать геометрическое определение и дать общее каноническое уравнение (1). Для того чтобы обучающиеся глубже ощутили различие и сходство подходов, целесообразно предложить им задание на построение графиков.

Задача 2. Построить в одной системе координат графики следующих уравнений: $x^2 = 4y$, $y^2 = -4x$.

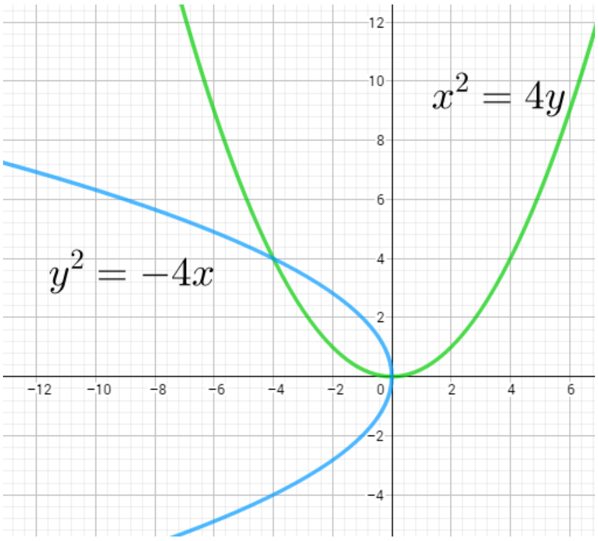

Рис. 2. Взаимное расположение двух парабол

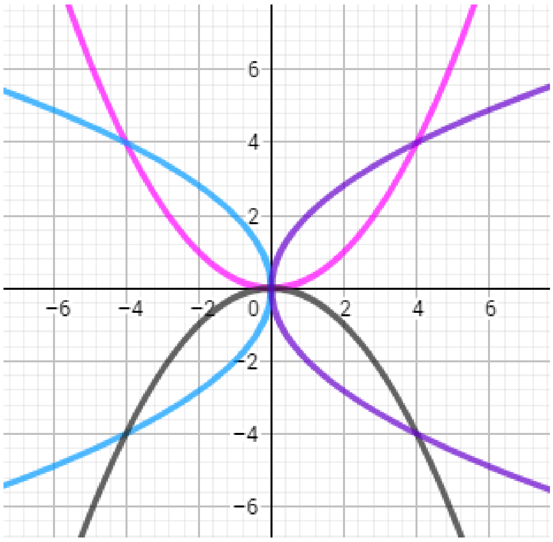

Рис. 3. Симметрия в четырёх параболах

На рис. 2 представлены искомые графики, над которыми желательно поработать фронтально, задавая школьникам следующие вопросы:

- что общего и в чём различия данных графиков?
- в скольких точках пересекаются графики?
- каковы координаты точек пересечения графиков?
- какие графики и сколько ещё нужно достроить, чтобы общая картина воспринималась бы симметричной относительно начала координат? (См. рис. 3).

После знакомства обучающихся с каноническим уравнением параболы, можно продемонстрировать им специальный инструмент для построения парабол — параболограф Кавальери и обсудить принцип его работы.

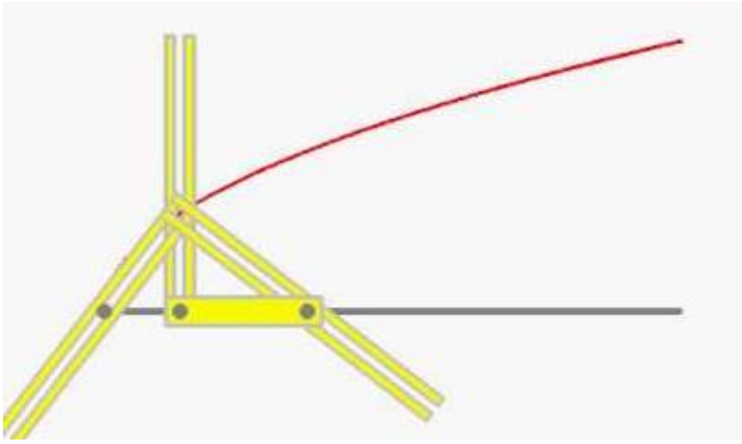

Рис. 4. Модель парабололографа

Модель основывается на геометрическом определении параболы. Кроме того, легко установить квадратичную зависимость, рассматривая модель как прямоугольный треугольник, в котором высота, проведённая из вершины прямого угла, есть среднее геометрическое проекций катетов.

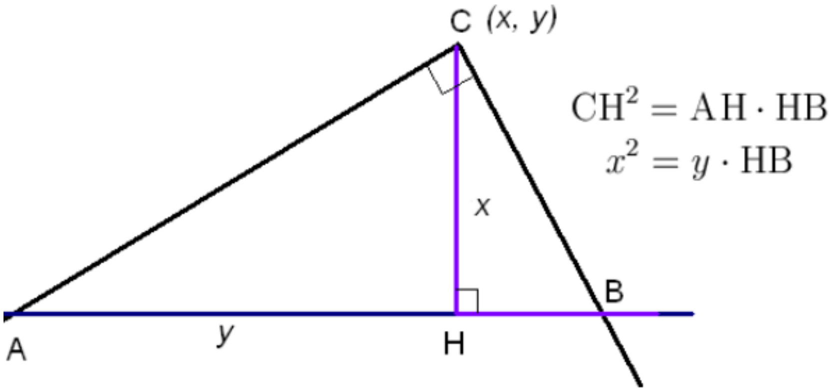

Рис. 5. Геометрическое обоснование парабололографа

В качестве нестандартной задачи можно предложить задачу из журнала «Квант».

Задача 3. Сетка линий, изображённая на рисунке, состоит из концентрических окружностей с радиусами 1, 2, 3, 4,... и общим центром, а также прямой, горизонтально проходящей через общий центр, и всевозможных касательных к окружностям, параллельных этой прямой. Вся плоскость разбита этими линиями на клетки, которые раскрашены в шахматном порядке. В цепочке точек, показанных на рисунке, каждые две соседние точки являются противоположными вершинами тёмной клетки. Докажите, что все точки такой бесконечной цепочки лежат на одной параболе (поэтому рисунок словно соткан из светлых и тёмных парабол).

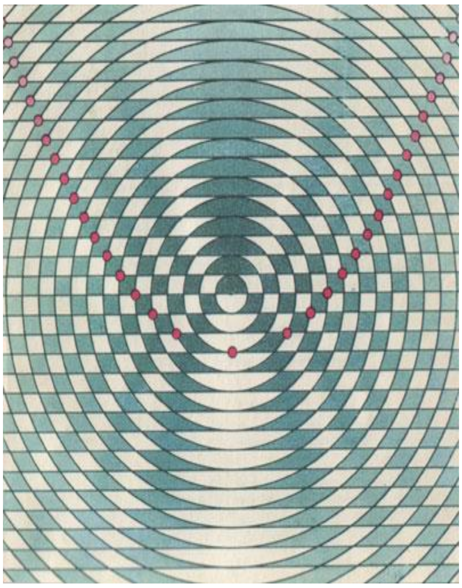

Рис. 6. К условию задачи 3

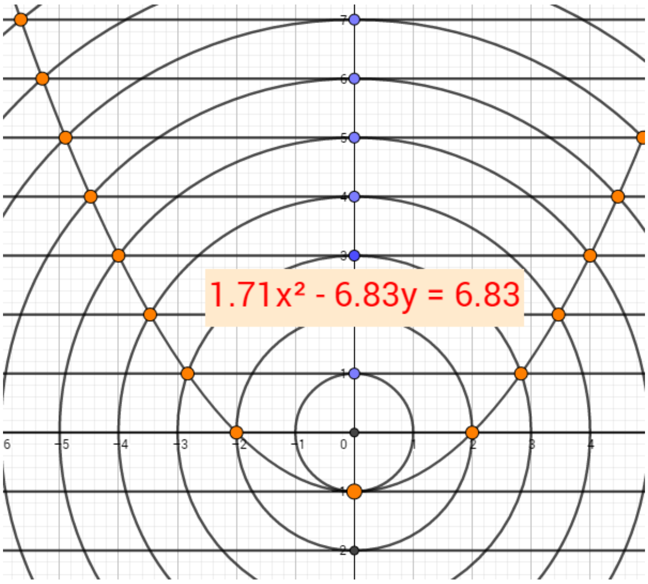

Рис. 7. Опытная проверка результатов построения

Визуализация задачи в интерактивной среде GeoGebra даёт возможность автоматически определить уравнение кривой. На рис. 7 представлен частный случай, из которого видно, что уравнением кривой служит парабола.

Для строгого доказательства необходимо обратиться к геометрическому определению параболы, приведённому нами ранее. Легко убедиться в том, что каждая точка удовлетворяет условиям определения. Это также можно заметить, выбирая любую точку чертежа. Достаточно лишь определить фокус параболы и её директрису. Возможность автоматизированного вычисления длин отрезков в среде GeoGebra показана на рис. 8.

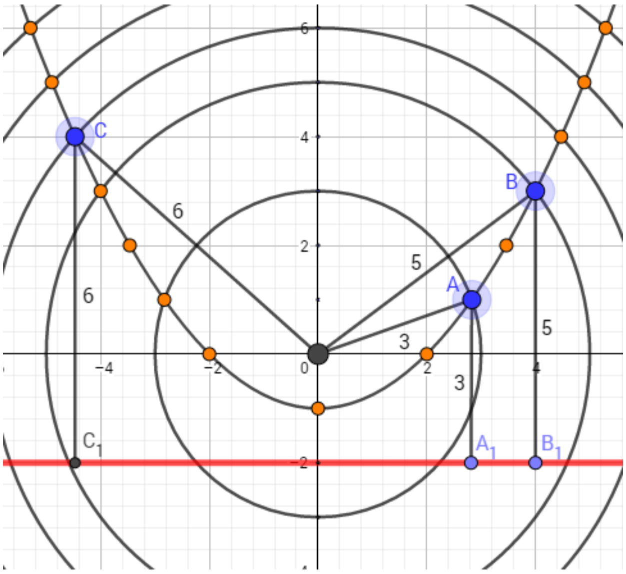

Рис. 8. Геометрическое доказательство задачи.

Из рис. 8 видно выполнение условий для точек *A*, *B* и *C* соответственно:

$$OA = AA_1 = 3$$
$$OB = BB_1 = 5$$
$$OC = CC_1 = 6$$

Необходимо отметить, что численное равенство отрезков видно из построения, например, CC_1 = 4+2=6 и, кроме того, OC = 6 как радиус окружности. Не нарушая общности, при условии выбора произвольной точки и произвольной параболы обобщаем вывод на остальные множества точек, получая при этом верное утверждение для остальных парабол.

5. Ярким примером из жизни, служащим демонстрацией практической значимости параболы, является проявление её оптического свойства. Если из фокуса параболы выпустить луч света в сторону отражающей поверхности, то после отражения от параболы он станет параллелен ее оси. Если же на поверхность параболы пустить луч, параллельный её оси, то он непременно отразится от поверхности в её фокус. За счёт этих свойств появляется возможность собирать поток лучей и волн в фокусе параболы. Это свойство широко используется не только в оптике, для концентрации энергии в точке, но и в спутниковой связи, в которой используются параболические тарелки. Если параболу «провращать» вокруг оси, то получится тело, называемое параболоидом, в каждом центральном сечении которого мы наблюдаем одну и ту же параболу. Спутниковые тарелки имеют форму параболоидов. В фокусе спутниковой тарелки находится приёмник, который получает сигнал от спутника и отправляет его уже по кабелю в необходимое место. Если тарелка не будет строго направлена на спутник, то сбора лучей в фокусе не произойдёт, поскольку именно спутник излучает параллельные потоки. Свойство рассеивания также используется, например, в фарах автомобилей. От одной лампочки, помещённой в фокусе параболического отражателя фары, свет, отражаясь от стенок, выходит параллельными лучами, что и обеспечивает направленность света.

6. В качестве творческого задания может быть предложена подготовка учащимися докладов о многообразиях применения параболы в повседневной жизни. Кроме того, после знакомства с каноническим уравнением параболы, а также её оптическим свойством, в качестве задания может быть организация проектной деятельности школьников. Например, проект первый – создание модели парабολографа Кавальери, наглядно демонстрирующей построение параболы и её геометрическое определение. Проект второй – построение модели «беспроигрышного бильярда», в котором прицельный шар помещён в фокус, а любой биток, выпущенный параллельно оси параболической формы стенки игровой площадки, при отскоке от стенки в любом случае попадал бы в биток. Этот проект наглядно демонстрирует оптическое свойство параболы в плоскости. Проект третий – моделирование параболической поверхности – линзы, которая, собирая в фокусе пучок света, может поджечь кусок картона, находящийся в фокусе. Последний проект наиболее трудоемок и подходит для юных изобретателей, демонстрирует оптические свойства параболоида. Четвёртый проект – анимационное моделирование параболы по её геометрическому определению в интерактивной геометрической среде GeoGebra [3; 6].

Таким образом, наблюдая широту и красоту рассмотренной тематики, целесообразно привносить представленные элементы в работу с обучающимися, наглядно демонстрируя единство теории и практики [4]. Настоящий материал может служить основой для организации различных форм учебной деятельности (урочной и внеурочной) в условиях кружка, при подготовке к олимпиадам, в проектной работе и т. п.

Список литературы

1. Жаров В.К., Матвеев О.А. (2008) Математика. Лекции по аналитической геометрии на плоскости и в пространстве. Выпуск 1. М.: Янус-К. 112 с.
2. Казаков Н.А., Артамонова Е.И. (2016) Роль мотивации учителя в учебной деятельности / Студенты – будущие педагоги об актуальных проблемах теории и практики образования: Сборник статей. С. 15–17.
3. Казаков Н.А., Кузнецова Т.И. (2018) Из истории терминов «модель» и «моделирование». Часть 3. Чертежи — модели задач / Проблемы учебного процесса в инновационных школах: Сб. науч. тр. / Под ред. О.В. Кузьмина. Иркутск: Изд-во ИГУ. Вып. 21. С. 54–58.
4. Кузнецова Т.И. (2011) Модель выпускника подготовительного факультета в пространстве предвузовского математического образования. 2-е изд. М.: ЛЕНАНД. 480 с. (Серия «Психология, педагогика, технология обучения».)
5. Саранцев Г.И. Методика обучения математике: методология и теория. [Электронный ресурс]. URL: http://www.twirpx.com/file/583820/ (дата обращения: 15.04.2017)
6. Страница сети Интернет математического пакета GeoGebra [Электронный ресурс]. URL: https://www.geogebra.org/ (дата обращения: 16.12.2017)
7. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования / М-во образования и науки РФ. 3-е изд. М.: Просвещение, 2014. 48 с.

PARABOLA AS MEANS OF DEMONSTRATION OF UNITY OF THE THEORY AND PRACTICE (FROM EXPERIENCE OF KRUZHKOVY WORK)

N.A. Kazakov
student
alphan95@mail.ru
Moscow
Moscow State Regional University

T.I. Kuznecova
Dr. Sci. (Pedagogy), professor
kuzti45@gmail.com
Moscow
The Institute of Russian and Culture of The Lomonosov Moscow State University

Abstract. This article reveals the questions of organizing the activity of students on the basis of using a variety of material relating to the quadratic function and its graph. Materials for work with students who are at different levels of perception and assimilation of mathematical material are offered at the basic and profile level. The tasks of the article demonstrate the inter-disciplinary connection of mathematics with other sciences, and also express clearly the possi-bilities of practical application of the studied subjects. The work also introduces aspects of mathematical modeling in GeoGebra interactive environment when implementing drawings of the Olympiad task and demonstrating the validity of mathematical relations. Possibilities of or-ganizing the project work of students on the basis of the materials of the article realize the or-ganization of activity at the creative level.

Keywords: parabola; equation; practical problem; model; drawing; project activity.

References

1. Zharov V.K., Matveyev O.A. (2008) Matematika. Lektsii po analiticheskoy geo-metrii na plos-kosti i v prostranstve. Vypusk 1. [Lectures on analytical geometry on the plane and in space. Issue 1] M.: Yanus-K. 112 p.
2. Kazakov N.A., Artamonova Ye.I. (2016) Rol' motivatsii uchitelya v uchebnoy deyatel'nosti [The role of teacher motivation in learning activities]. Studenty – budushchiye pedagogi ob aktual'nykh problemakh teorii i praktiki obrazovaniya: Sbornik statey. P. 15–17.
3. Kazakov N.A., Kuznetsova T.I. (2018) Iz istorii terminov «model'» i «modelirova-niye». Chast' 3. Chertezhi - modeli zadach [From the history of terms "model" and "modeling." Part 3. Drawings - task models] Problemy uchebnogo protsessa v innovatsion-nykh shkolakh: Sb. nauch. tr. / Pod red. O.V. Kuz'mina. Irkutsk: Izd-vo IGU. Vyp. 21. P. 54–58.
4. Kuznetsova T.I. (2011) Model' vypusknika podgotovitel'nogo fakul'teta v pro-stranstve predvuzovskogo matematicheskogo obrazovaniya. 2-ye izd. [From the history of terms "model" and "modeling." Part 3. Drawings - task models] M.: LENAND, 2011. 480 p. (Seriya «Psikhologiya, pedagogika, tekhnologiya obucheniya».)
5. Sarantsev G.I. (2017) Metodika obucheniya matematike: metodologiya i teoriya. [Elek-tronnyy resurs] [Methodology for teaching mathematics: methodology and theory]. URL: http://www.twirpx.com/file/583820/ (data obrashcheniya: 15.04.2017)
6. Stranitsa seti Internet matematicheskogo paketa GeoGebra (2017) [Elektronnyy resurs] [The Internet page of the GeoGebra math package]. URL: https://www.geogebra.org/ (data obrashcheniya: 16.12.2017)
7. Federal'nyy gosudarstvennyy obrazovatel'nyy standart osnovnogo obshchego obrazovaniya (2014) [Federal state educational standard of basic general education] M-vo obrazovaniya i nauki RF. 3-ye izd. M.: Prosveshcheniye. 48 p.

УДК 378.147.88

ФОРМИРОВАНИЕ ГОТОВНОСТИ БАКАЛАВРОВ – БУДУЩИХ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ К ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ В ПРОЦЕССЕ ПРОХОЖДЕНИЯ СИСТЕМЫ ПРАКТИК

Тарасова Оксана Викторовна
д.п.н., профессор
tarasova_orel@mail.ru
г. Орел

Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева

Аннотация. В статье изложен опыт организации обучения бакалавров - будущих учителей математики и информатики в Орловском государственном университете имени И.С. Тургенева. Сформулированы принципы построения основной образовательной программы. В статье поднимается вопрос о формировании