УДК 517.983

ОПЕРАТОР φ(А) С ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИЕЙ ЗАДАННОГО ПОРЯДКА РОСТА

Татьяна Николаевна Можарова
к.ф.-м.н., доцент
tatjana.mozharova@yandex.ru
г. Орел

Орловский государственный университет им. И.С.Тургенева

Аннотация. В данной работе продолжено исследование условий существования и непрерывности линейного оператора φ(A) с целой векторнозначной характеристической функцией. Ранее был получен [2] класс целых векторнозначных функций, которому должна принадлежать характеристическая функция оператора φ(A). Рассматривались также ситуации, когда характеристическая функция φ(t) имела высокий порядок и конечный тип роста [1] и более высокий тип роста [2]. Данная работа содержит результат, полученный для случая более высокого порядка роста целой векторнозначной функции φ(t). Рассматривается оператор φ(A), построенный при помощи линейного непрерывного оператора A, имеющего конечный ненулевой порядок β, с характеристической функцией φ(t), порядок роста которой ρ>1/β. Построено пространство, в котором данный оператор φ(A) определен и является, при указанных условиях, линейным и непрерывным. В качестве следствия из доказанной теоремы рассмотрен случай, когда оператор A является оператором дифференцирования.

Ключевые слова: линейный непрерывный оператор, порядок роста характеристической функции.

Пусть H – полная, локально-выпуклая алгебра над полем комплексных чисел, топология которой задается счетной системой норм $\{\|\cdot\|_p\}$, p = 1, 2, … , причем $\forall x, y, \in H$, $\forall$ p, $\exists$ p_1, p_2: $\| xy \|_p \le \| x \|_{p1} \cdot \| y \|_{p2}$. A – линейный непрерывный оператор, действующий в H.

Пусть оператор A: H $\to$ H имеет порядок [1] $\beta \ne 0, \infty$. Пусть, далее,

$$\varphi(t) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} x_\kappa t^\kappa, \quad x_\kappa \in H, \text{ –}$$

целая векторнозначная функция со значениями в H, порядок роста которой $\rho > \frac{1}{\beta}$. Построим пространство, на котором оператор

$$\varphi(A)(x) \equiv \sum_{\kappa=0}^{\infty} x_k A^\kappa(x), \quad x_\kappa \in H, \tag{1}$$

с такой характеристической функцией будет определен.

Рассмотрим пространства

$$H^b = \left\{x \in H : \| A^k(x) \|_p \le C(x, p, \varepsilon) \cdot k^{(b_p+\varepsilon)\cdot k}; \forall k; \forall p; \forall \varepsilon > 0\right\};$$

$\{b_p\}$ – фиксированная последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условию:

$$b_p \nearrow b < \frac{1}{\rho} < \beta, \quad p \to \infty.$$

Топологию пространства H^b зададим системой норм

$$\|x\|_{p,\varepsilon}^{b}=\sup_{(k)}\left\{\frac{\left\|A^{k}(x)\right\|_{p}}{k^{(b_p+\varepsilon)\cdot k}}\right\}<\infty;\quad \forall\varepsilon>0,\ \forall p,\ \forall x\in H^b \tag{2}$$

Отсюда

$$\left\|A^{k}(x)\right\|_{p}\le k^{(b_p+\varepsilon)\cdot k}\cdot\|x\|_{p,\varepsilon}^{b};\ \ \forall x\in H^b;\ \ \forall\varepsilon>0;\ \forall p;\ \ b_1<\ldots<b<\frac{1}{\rho}.$$

При фиксированном $b<\frac{1}{\rho}<\beta$ H^b – пространство векторов из H, операторный порядок которых относительно оператора A не превосходит числа $b<\beta$. Введем в рассмотрение пространство

$$H^{\frac{1}{\rho}}=\bigcup_{b<\frac{1}{\rho}}H^b=\lim_{b\uparrow\frac{1}{\rho}}\operatorname{ind}H^b,$$

и в нем зададим топологию индуктивного предела. В этих обозначениях справедлива

<u>Теорема.</u>

Пусть H – полная локально-выпуклая алгебра; $\{\|\cdot\|_p\}$, p = 1, 2, … , – бесконечная счетная система норм, задающая топологию в H. $A: H\to H$ – линейный непрерывный оператор порядка $\beta\ne 0,\infty$. Пусть функция $\varphi(t)$ – целая векторнозначная со значениями в H, имеющая порядок роста $\rho>\frac{1}{\beta}$. Тогда $\varphi(A)$: $H^{\frac{1}{\rho}}\to H$ – линейный непрерывный оператор, определенный на пространстве $H^{\frac{1}{\rho}}$ и переводящий его в H.

<u>Доказательство.</u>

Т.к. $H^{\frac{1}{\rho}}$ является индуктивным пределом пространств H^b, $b<\frac{1}{\rho}$, то для доказательства теоремы достаточно показать, что оператор $\varphi(A)$ определен и непрерывен в пространстве H^b, где $b<\frac{1}{\rho}$ – любое.

Для любого $x\in H^b$ имеем:

$$\left\|x_k A^{k}(x)\right\|_{p}\le\|x_k\|_{p1}\cdot\|A^{k}(x)\|_{p2}<k^{-\frac{k}{\rho_{p1}+\varepsilon}}\cdot k^{(b_{p2}+\varepsilon)k}\cdot\|x\|_{p2,\varepsilon}^{b},\quad \varepsilon>0,\quad \forall k>k_0(\varepsilon).$$

Так как $b_{p2}\le b<\frac{1}{\rho}$, $\rho_{p1}\le\rho$, то

$$b_{p2}-\frac{1}{\rho_{p1}}\le b-\frac{1}{\rho}<0.$$

Следовательно, при достаточно малом $\varepsilon>0$

$$b_{p2} + \varepsilon - \frac{1}{\rho_{p1} + \varepsilon} < 0.$$

То есть члены ряда (1), начиная с некоторого k, мажорируются членами сходящегося числового ряда, а значит, ряд (1) сходится абсолютно в пространстве H^b, причём

$$\left\|\varphi(A)(x)\right\|_p \le C_p \left\|x\right\|_{p_2,\varepsilon}^b, \qquad \forall p, \quad \exists p_2; \quad \forall x \in H^b,\ b < \frac{1}{\rho}.$$

Теорема доказана.

В качестве следствия доказанной теоремы рассмотрим следующий случай.

Пусть H = H(**C**); $\left\|F\right\|_p = \max\limits_{|z| \le p < \infty} \left|F(z)\right|$; $F \in$ H(**C**). Известно [2], что для оператора $A = \frac{d}{dz}$ в этом пространстве порядок $\beta = 1$, тип $\alpha = 0$. Пусть, далее, $\varphi(t)$ – целая векторнозначная функция, порядок роста которой $\rho > 1$. Порядок роста $\nu > 1$ целой функции $F(z)$ и её операторный порядок $\beta(F)$ относительно оператора $A = \frac{d}{dz}$ связаны соотношением:

$$\beta(F) = \frac{\nu - 1}{\nu} < 1.$$

Отсюда $\qquad \nu = \dfrac{1}{1 - \beta(F)}.$

Тогда в качестве следствия теоремы получаем следующее

Предложение.

Пусть $\varphi(t)$ – целая векторнозначная функция со значениями в H(**C**) – имеет порядок роста $\rho > 1$. Тогда оператор $\varphi\left(\frac{d}{dz}\right)$ определён и непрерывен на пространстве $H^{\frac{1}{\rho}}$ целых функций, операторный порядок которых относительно оператора $\frac{d}{dz}$ меньше $\frac{1}{\rho} < 1$, и переводит его в H(**C**).

Или в терминах роста целых функций: оператор $\varphi\left(\frac{d}{dz}\right)$ определён на пространстве целых функций, порядок роста которых $\nu < \frac{\rho}{\rho - 1}$, переводит его в H(**C**) и является линейным и непрерывным.

Список литературы

1. Можарова Т. Н. Об операторе φ(A) с целой векторнозначной характеристической функцией, имеющей высокий порядок и конечный тип роста // В сборнике: Современные проблемы физико-математических наук. Материалы II международной научно-практической конференции. 2016. С. 50-52.
2. Можарова Т. Н. О применимости и непрерывности операторов с переменными коэффициентами в локально-выпуклых пространствах // Научный альманах Орловского государственного университета. Серия: Естественные науки. Выпуск 3. 2000. С. 22 – 27.

THE OPERATOR φ(A) WITH THE CHARACTERISTIC FUNCTION OF GIVEN THE GROWTH ORDER

T. Mozharova
Cand. Sci. (Phys.–Math.), associate professor
tatjana.mozharova@yandex.ru
Orel

Orel state University named after I. S. Turgenev

Abstract. In this paper, the conditions of existence and continuity of the linear operator φ(A) with an integer vector-valued characteristic function are studied. Earlier [4] the class of integer vector-valued functions, to which the characteristic function of the operator φ(A) should belong, was obtained. Situations were also considered where the characteristic function φ(t) had a high order and finite type of growth [4] and a higher type of growth [4]. This paper contains the result obtained for the case of higher order growth of the whole vector-valued function φ(t).Is considered the operator φ(A) constructed with the linear continuous operator A with finite nonzero order β, the characteristic function of φ(t), where the growth order $\rho>1/\beta$.A space is constructed in which the given operator is defined and, under the specified conditions, linear and continuous. As a consequence of the proved theorem the case when operator a is a differentiation operator is considered.

Key words: linear continuous operator, order of growth of characteristic function.

References

1. Mozharova, T.N. (2016) Ob operatore φ(A) s tceloi` vektornoznachnoi` harakteristicheskoi` funktciei`, imeiushchei` vy`sokii` poriadok i konechny`i` tip rosta [On the operator φ (a) with an integer vector-valued characteristic function having a high order and finite type of growth] // In the collection: Modern problems of physical and mathematical Sciences. Proceedings of the II international scientific and practical conference. C. 50-52.
2. Mozharova, T.N. (2000) O primenimosti i neprery`vnosti operatorov s peremenny`mi koe`ffitcientami v lokal`no-vy`pucly`kh prostranstvakh [On the applicability and continuity of operators with variable coefficients in locally convex spaces] // Scientific almanac of Orel state University. Series: Natural Sciences. Issue 3. P. 22 – 27.