УДК 517.9

КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДВУМЕРНЫХ ОДНОРОДНЫХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Яхъё Мухтарович Мухтаров
к.ф.-м.н., доцент
ya-muxtarov@rambler.ru
г. Самарканд
Самаркандский государственный университет

Толибжон Эргашевич Буриев
к.ф.-м.н., доцент
tolibjonb@yahoo.com
г. Самарканд
Самаркандский государственный университет

Аннотация. Предлагаемая работа посвящена качественному исследованию однородных полиномиальных двумерных динамических систем. Используются иннорные матрицы для нахождения достаточных условий устойчивости изолированной особой точки однородной полиномиальной системы. Доказывается, что для того чтобы нулевое решение было асимптоттически устойчивым в целом, необходимо и достаточно, чтобы характеристические числа инвариантных прямых имели одинаковые знаки.

Ключевые слова: система двумерных дифференциальных уравнений, полином, однородность, изолированная особая точка, устойчивость, инвариантные лучи (прямые), матрицы, инноры.

Целью настоящей работы является качественное исследование асимптотической устойчивости изолированной особой точки системы:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sum\limits_{i=0}^{5} a_{5-i,i} x^{5-i} y^{i} \equiv P(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} = \sum\limits_{i=0}^{5} b_{5-i,i} x^{5-i} y^{i} \equiv Q(x,y) \end{cases} \qquad (1)$$

где $a_{5-i,i}$, $b_{5-i,i} (i = \overline{0,5})$ вещественные числа и $(P, Q) = 1$.

Известно, что луч $y = kx$ $(x = ky)$ будет инвариантным лучом если k является корнем уравнения

$$Q(1,k) = kP(1,k) [P(1,k) = kQ(1,k)]. \qquad (2)$$

Если в системе (2) b_{50}=0 то, ось Ox $\{y = 0\}$ (если a_{05}=0 то, ось Oy $\{x = 0\}$) является инвариантным лучом.

Если уравнение (2) не имеет вещественных решений, то есть, если

$$Var\left[1, -\left|\Delta^{I}{}_{1}\right|, \left|\Delta^{I}{}_{3}\right|, -\left|\Delta^{I}{}_{5}\right|, \left|\Delta^{I}{}_{7}\right|, -\left|\Delta^{I}{}_{9}\right|, \left|\Delta^{I}{}_{11}\right|\right] = Var\left[1, \left|\Delta^{I}{}_{1}\right|, \left|\Delta^{I}{}_{3}\right|, \left|\Delta^{I}{}_{5}\right|, \left|\Delta^{I}{}_{7}\right|, \left|\Delta^{I}{}_{9}\right|, \left|\Delta^{I}{}_{11}\right|\right]$$

где $\left|\Delta^{I}{}_{2i-1}\right| (\overline{i = 0,5})$ определители инноров матрицы [2]

$$\Delta'_{11} = \begin{pmatrix} c_6 & . & . & . & c_3 & c_2 & c_1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & 0 & c_6 & c_5 & . & . & . & c_0 \\ 0 & . & . & . & 0 & 0 & 6c_6 & . & . & . & c_1 \\ 0 & . & . & . & 0 & 6c_6 & 5c_5 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 6c_6 & . & . & . & 3c_3 & 2c_2 & c_1 & . & . & . & 0 \end{pmatrix}$$

то система (1) будет иметь особую точку второй группы (центр или фокус).

Здесь $c_i = b_{5-i,i} - a_{6-i,i-1} \left(i = \overline{0,6}\right), a_{6,-1} = b_{-1,6} = 0$. В зависимости от того является ли особая точка $O(0,0)$ системы (1) обобщенным узлом или обобщенным седлом, нулевое решение будет асимптотически (обратно асимптотически) устойчиво либо неустойчиво.

В частности, когда $a_{05} = b_{50} = 0$ система (1) имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x\sum_{i=0}^{4} a_{5-i,i} x^{4-i} y^i, \\ \dfrac{dy}{dt} = y\sum_{i=0}^{4} b_{4-i,i+1} x^{4-i} y^i, \end{cases} \qquad (3)$$

траектории которого примыкают к особой точке только по инвариантным лучам.

Имеет место

Теорема. Для того, чтобы нулевое решение системы (3) было асимптотически (обратно асимптотически) устойчивым в целом, необходимо и достаточно, чтобы характеристические числа инвариантных лучей имели один и тот же знак.

Число инвариантных лучей системы (3) зависит от числа вещественных корней характеристического уравнения

$$\Phi(k) = \sum_{i=0}^{4} (b_{4-i,i+1} - a_{5-i,i}) k^i = \sum_{i=0}^{4} c_i k^i = 0. \qquad (4)$$

Если в уравнении (4) $c_0 = 0$ ось Ox (при $c_4 = 0$ ось Oy) будет инвариантным лучом кратности два.

Пусть $c_4 > 0$, составим матрицу [2].

$$\Delta_7 = \begin{pmatrix} c_4 & c_3 & c_2 & c_1 & c_0 & 0 & 0 \\ 0 & c_4 & c_3 & c_2 & c_1 & c_0 & 0 \\ 0 & 0 & c_4 & c_3 & c_2 & c_1 & c_0 \\ 0 & 0 & 0 & 4c_4 & 3c_3 & 2c_2 & c_1 \\ 0 & 0 & 4c_4 & 3c_3 & 2c_2 & c_1 & 0 \\ 0 & 4c_4 & 3c_3 & 2c_2 & c_1 & 0 & 0 \\ 4c_4 & 3c_3 & 2c_2 & c_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Для того, чтобы система (3) имела шесть инвариантных лучей, необходимо и достаточно иннорно положительность матрицы Δ_7.

В силу теоремы 2.8[2] получим условия о количестве инвариантных лучей системы (3):

Δ_3	Δ_5	Δ_7	
+ + – –	+ – + –	– – – –	инвариантных лучей 4 пары
+ – –	– + –	+ + +	инвариантных лучей 2 пары

Полученные инвариантные лучи некратные.

Рассмотрим случаи: $c_0 = 0$ или $c_4 = 0$.

1. Пусть $c_0 = 0$, $c_4 \neq 0$, тогда количество инвариантных лучей зависить от знака

$$D_1 = (2c_3^3 - 9c_2c_3c_4 + 27c_1c_4^2)^2 + 4(3c_2c_4 - c_3^2)^3.$$

Если $D_1 > 0$, то система имеет 3 пары исключительных направлений, если $D_1 = 0$ то 4 пары исключительных направлений, если $D_1 < 0$ - 5 пар исключительных направлений.

2. Если $c_0 \neq 0,$ $c_4 = 0$, тогда в зависимости от знака

$$D_2 = (2c_2^3 - 9c_1c_2c_3 + 27c_0c_3^2)^2 + 4(3c_1c_3 - c_2^2)^3.$$

имеем: при $D_2 > 0$ 3 пары, при $D_2 = 0$ 4 пары, при $D_2 < 0$ 5 пар исключительных направлений.

3. Если $c_0 = c_4 = 0$, то в зависимости от знака $D_3 = c_2^2 - 4c_1c_2$ имеем:

при $D_3 > 0$ 4 пары, при $D_1 < 0$ 2 пары, при $D_3 = 0$ 3 пары исключительных направлений

Таким образом, из теоремы вытекает следующее.

Следствие.Если числа $a_{50}, b_{05}, \sum_{i=0}^{4}(a_{5-i,i} + k_j^2 b_{4-i,i+1})k_j^i$ имеют одинаковые знаки, то нулевое решение системы (3) будет асимптотически (обратно асимптотически) устойчивым.

Здесь k_j вещественный корень уравнения (4).

Список литературы

1. Шарипов Ш.Р. Теория однородных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Самарканд. 1977 г. 165с.
2. Джури Э. Инноры и устойчивостъ динамических систем. М. Наука, 1979 г. 304 с.
3. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.Наука, 1976 г. 245с.

QUALITATIVElY ANALYZED TWO DIMENSIONAL HOMOGENEOUS POLINOMIAL DYNAMICAL SYSTEM

I. Mukhtarov
Cand. Sci. (Phys.–Math.), associate professor
ya-muxtarov@rambler.ru
Samarkand
Samarkand State University

T. Buriev
Cand. Sci. (Phys.–Math.), associate professor
tolibjonb@yahoo.com
Samarkand
Samarkand State University

Abstract. In this work the problems about stability of asimptotically stability of trivial equilibrium state in special type system of two ordinary homogeneous polinomial differential equations is analyzed. To investigate stability of equilibrium state we used the innors of matrix of system ODE.We show, that trivial equilibrium state is asimptotically stability when characteristic numbers of invariant lines have same signs.

Keywords: ordinary differential equations, system, equilibrium state, asimptotically stability, homogeneous, polinomial, invariant lines, innors of matrix, characteristical equation.