УДК 517.927.4

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ВАРИАЦИОННЫХ ИТЕРАЦИЙ К ПРИБЛИЖЕННОМУ РЕШЕНИЮ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ГИДРОДИНАМИКИ

Аблакул Абдирашидов
к.ф.-м.н., доцент
abdira@mail.ru
г. Самарканд
Самаркандский государственный университет

Бекзод Бахтиёр угли Ортиков
студент
г. Самарканд
Самаркандский государственный университет

Нуршод Холмухаммад угли Кадиров
студент
г. Самарканд
Самаркандский государственный университет

Акмалжон Аблакулович Абдурашидов
ассистент
г. Самарканд
Самаркандский государственный университет

Аннотация. Работа посвящена приближенному решению некоторые краевых задач с линейными и нелинейными обыкновенными дифференциальными уравнениями приведением их к начальной задаче с помощью метода вариационных итераций. Рассмотренные краевые задачи относятся к гидродинамике. Результаты приближенных решений сравнены с известным точным решением и решениями других методов. Результаты данной работы позволяют расширить применение приближенного метода вариационных итераций к решению многих нелинейных проблем инженерных наук.

Ключевые слова: метод вариационных итераций, дифференциальные уравнения, краевые и начальные задачи, приближенное решение.

Введение. Решение краевых задач с нелинейными обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ) являются одной их основных проблем инженерных наук. За прошлые несколько десятилетий и математики и физики сделали значительные успехи в этом направлении [8, 10]. Многие из этих уравнений не имеют точные аналитические решения. С другой стороны, решать эти нелинейные уравнения аналитически могут некоторые авторы, которые глубоко знают описание некоторых физических процессов, что иногда принуждает их знать некоторые факты, которые просто не поняты посредством общих наблюдений. В результате эти уравнения должны быть решены, используя другие методы. В последние годы были разработаны различные методики решения таких уравнений, например, метод гомотопического анализа [1, 7], метод вариационных итераций (МВИ) [6, 7, 8], метод разложения Адомиана [3, 8], метод гомотопического возмущения [5, 8], упрошенный метод укороченных разложений [2, 9, 10] и др., а также их различные модифицированные варианты [8, 10]. Для оценки преимущества МВИ ниже приближенно решены некоторые краевые задачи гидродинамики.

Постановка задачи и алгоритм МВИ. Рассмотрим приближенное решение нелинейного дифференциального уравнения вида $Ly(x)+Ny(x)=q(x)$, где L и N - линейные и нелинейные операторы, соответственно; $y(x)$ – искомая функция; $q(x)$ – известная функция. Метод вариационных итераций допускает использование коррекции функционала для заданного уравнения в виде $y_{n+1}(x)=y_n(x)+\int_0^x \lambda(s)\left[Ly_n(s)+N\tilde{y}_n(s)-q(s)\right]ds$, где λ - общий множитель Лагранжа, который может быть определен оптимальным образом с помощью вариационной теории и изменение $\tilde{y}_n$ ограничено, а это означает, что $\delta\,\tilde{y}_n=0$. Множитель λ имеет решающее значение и критический в методе, и это может быть константой или функцией. Определяя λ, итерационная формула должна быть использована для определения последовательности приближения $y_{n+1}(x)$, $n \geq 0$, которая приближается к решению $y(x)$. Нулевое приближение y_0 может быть выборочной функцией. Тем не менее, с использованием начальных значений $y(0)$, $y'(0)$, $y''(0)$ и т.д. предпочтительно используем для выборочного нулевого приближения y_0, как будет показано ниже. Следовательно, имеем решение $y(x)=\lim\limits_{n\to\infty} y_n(x)$.

Ниже приведены иллюстративные примеры. В них решены различные краевые задачи из гидродинамики с ОДУ.

Пример 1. Дано безразмерное уравнение движение жидкости с постоянной скорости в круговом цилиндре радиусом R и длиной L. Температура жидкости по течению изменяется медленно, а стенкой цилиндром наблюдается конвективный теплообмен. На краях цилиндра даны постоянные температуры. Тогда после некоторых упрощений получим следующую краевую задачу с однородным линейным ОДУ второго порядка [11]:

$$y''+y'-2y=0,\;\; y(0)=0,\;\; y(4)=1.$$

Решение. Для решения данной краевой задачи ее приведем к начальной, т.е. введем новые краевые условия $y(0)=a$, $y'(0)=b$, где a, b – пока неизвестные константы.

Теперь рассмотрим начальной задачи и для ее решения применяем вышеописанную алгоритм МВИ. Для заданной задачи $\lambda = s - x$ и начальное приближение равно $y_0(0) = y(0) + xy'(0) = a + bx$. Соответствующая итерационная формула имеет вид

$$y_{n+1}(x)=y_n(x)+\int_0^x (s-x)\left[y_n''(s)+\tilde{y}_n'(s)-2\tilde{y}_n(s)\right]ds,\quad n\geq 0.$$

Из краевых условий $y_1(0)=0$, $y_1(4)=1$ и первого приближения

$$y_1(x)=y_0(x)+\int_0^x (s-x)\left[y_0''(s)+y_0'(s)-2y_0(s)\right]ds=a+bx+(a-\frac{1}{2}b)x^2+\frac{1}{3}bx^3$$

находим $a = 0$, $b = 3/52$. Тогда

$$y_1(x)=\frac{3}{52}x-\frac{3}{104}x^2+\frac{1}{52}x^3.$$

Далее имеем

$$y_2(x)=\frac{3}{52}x-\frac{3}{104}x^2+\frac{3}{104}x^3-\frac{1}{104}x^4+\frac{1}{520}x^5 \text{ и т.д.}$$

Решение краевой задачи ведем с помощью методом ряда Тейлора:

$$y''=2y-y' \;\;\Rightarrow\;\; y^{(n)}=2y^{(n-2)}-y^{(n-1)},\quad y^{(n)}(0)=2y^{(n-2)}(0)-y^{(n-1)}(0),\quad n>2.$$

Получим следующие результаты:

$y''(0)=-b;\quad y'''(0)=3b;\quad y^{(IV)}(0)=-5b;$

$y^{(V)}(0)=11b;\; y^{(VI)}(0)=-21b$ и т.д. $y(x)=y(0)+\dfrac{y'(0)}{1!}x+\dfrac{y''(0)}{2!}x^2+\dfrac{y'''(0)}{3!}x^3+\ldots;$

$$y(x) = a + b\left(x - \frac{x^2}{2!} + \frac{3x^3}{3!} - \frac{5x^4}{4!} + \frac{11x^5}{5!} - \frac{21x^6}{6!} + \ldots \right) = a + \frac{b}{3}(e^x - e^{-2x}),$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow a = 0; \quad y(4) = 1 \Rightarrow b = \frac{3}{e^4 - e^{-8}}.$$

В результате получим точное решение задачи: $y(x) = \dfrac{e^x - e^{-2x}}{e^4 - e^{-8}}$. Точно такое же аналитическое решение краевой задачи получим с помощью характеристическое уравнение $y_a(x) = y(x)$, а также методами стрельбы, коллокации и Галеркина. Полученной начальной задачи решили также с помощью Maple 17: $y_m(x) = (e^x - e^{-2x})/52$. Относительная погрешность результатов $y(x),\ y_m(x),\ y_a(x),\ y_2(x)$ не превышает 5%.

Пример 2. Рассмотрена баланс количества движения вокруг критической точки ламинарного течения жидкости и с помощью подобных преобразований уравнение в частных производных приведен к ОДУ. В результате получен следующая краевая задача с неоднородным нелинейным ОДУ третьего порядка [11]:

$$y''' + (y - y'')y'' + 1 = 0,\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 0,\ \ y'(5) = 1.$$

Решение. Для решения данной краевой задачи ее приведем к начальной, т.е. введем новые краевые условия $y(0) = a$, $y'(0) = b$, $y''(0) = c$, где a, b, c – пока неизвестные константы. Теперь рассмотрим начальной задачи и для ее решения применяем вышеописанную алгоритм МВИ. Для заданной задачи $\lambda = -0{,}5(s - x)^2$ и начальное приближение равно $y_0(0) = y(0) + xy'(0) + 0{,}5x^2y''(0) = a + bx + 0{,}5cx^2$. Соответствующая итерационная формула имеет вид

$$y_{n+1}(x) = y_n(x) - \frac{1}{2}\int_0^x (s - x)^2\left[y_n'''(s) + (y_n(s) - y_n''(s))y_n''(s) + 1\right]ds, \quad n \ge 0.$$

Из краевых условий $y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y'(5) = 1$ и первого приближения

$$y_1(x) = y_0(x) - \frac{1}{2}\int_0^x (s - x)^2\left[y_0'''(s) + (y_0(s) - y_0''(s))y_0''(s) + 1\right]ds = a + bx + \frac{1}{2}cx^2 +$$

$$+ \frac{1}{6}(c^2 - ac - 1)x^3 - \frac{1}{24}bcx^4 - \frac{1}{120}c^2x^5$$ находим a=0, b=0, c=1,23259. Тогда

$$y_1(x) = 0{,}616295x^2 + 0{,}0865463513x^3 - 0{,}0126606509x^5; \quad y_2(x) = 0{,}616295x^2 +$$
$$+ 0{,}0865463513x^3 + 0{,}0533380838x^4 - 0{,}0081664884x^5 - 0{,}0087576694x^6 -$$
$$- 0{,}0014662742x^7 + 0{,}0005108908x^8 + 0{,}0001837419x^9 - 0{,}0000032382x^{11}$$

и т.д. Такой же результат аналогично получим методом ряда Тейлора. Полученной начальной задачи решили численно $(y_m(x))$ и аналитически с помощью Maple 17:

$$y_a(x) = 0{,}616259\,x^2 + 0{,}0865463513\,x^3 + 0{,}0533808361x^4 + 0{,}0181311071x^5.$$

Относительная погрешность результатов $y_m(x),\ y_a(x),\ y_2(x)$ не превышает 4%.

Пример 3. Рассмотрим установившее течение неньютоновской жидкости в пористом канале, которое описывается с нелинейным ОДУ вида [4]:

$$y'''(x) - M^2y'(x) + \mathrm{Re}\left[y'(x)^2 - y(x)y''(x)\right] - \alpha\left[2y(x)y'''(x) - y''(x)^2 - y(x)y^{IV}(x)\right] = 0,$$
$$y(0) = 0,\ \ y''(0) = 0,\ \ y(0{,}5) = 0{,}5,\ \ y'(0{,}5) = 0.$$

Здесь Re – число Рейнольдса; M, α – некоторые константы.

Решение. Для решения данной краевой задачи ее приведем к начальной, т.е. введем не достающиеся начальные условия. Начальное приближение равно

$y_0(0)=a+bx+cx^2/2+dx^3/6$, где a, b, c, d – неизвестные постоянные из начальных условий: $y(0)=a$; $y'(0)=b$; $y''(0)=c$; $y'''(0)=d$. Для ее решения применяем вышеописанную алгоритм МВИ. Для заданной задачи $\lambda=(s-x)^3/6$. Соответствующая итерационная формула имеет вид

$$y_{n+1}(x)=y_n(x)+\frac{1}{6}\int_0^x (s-x)^3\left\{\left[y_n'''(x)-M^2 y_n'(x)+\mathrm{Re}\left[y_n'(x)^2-y_n(x)y_n''(x)\right]-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\alpha\left[2y_n(x)y_n'''(x)-y_n''(x)^2-y_n(x)y_n^{IV}(x)\right]\right]\right\}ds,\quad n\geq 0.$$

Из краевых условий

$$y(0)=0,\ y''(0)=0,\ y(0{,}5)=0{,}5,\ y'(0{,}5)=0$$

и первого приближения

$$y_1(x)=a+bx+\frac{1}{2}cx^2+\frac{1}{6}dx^3+\frac{1}{24}(bM^2+ac\,\mathrm{Re}+2\alpha ad-d-\alpha c^2-b^2\,\mathrm{Re})x^4+$$
$$+\frac{1}{120}(2\alpha bd-2\alpha cd+ad\,\mathrm{Re}-bc\,\mathrm{Re}+cM^2)x^5+\frac{1}{720}(2\alpha cd-2\alpha d^2-c^2\,\mathrm{Re}+dM^2)x^6+$$
$$+\frac{1}{2520}(\alpha d^2-cd\,\mathrm{Re})x^7-\frac{1}{20160}d^2\,\mathrm{Re}\,x^8$$

при $M=2,\ \mathrm{Re}=0,\ \alpha=0{,}2$ находим

$$a=0;\ b=1{,}541648557;\ c=0;\ d=-15{,}42309491;$$

$$y_1(x)=1{,}541648557x-2{,}570515818x^3+0{,}8995703808x^4-0{,}07925664x^5-$$
$$-0{,}217834892x^6+0{,}0188787188x^7.$$

Расчет ведем также методом ряда Тейлора и получим:

$$a=0;\ b=1{,}459968718;\ c=0;\ d=-9{,}871795450;$$

$$y_1(x)=1{,}459968718x-1{,}645299242x^3-0{,}1859208249x^4-0{,}3376987523x^5-$$
$$-0{,}082573259x^6-0{,}1099019728x^7.$$

Полученной начальной задачи решили также численно приближенным методом Рунге-Кутта с помощью Maple 17: Эти и другие результаты при различных значениях M, Re, α соответствуют с результатами [4]. Относительная погрешность этих результатов не превышает 5%.

Выводы. Таким образом, изучены применения метода вариационных итераций к приближенному решению краевых задач с линейным и нелинейным ОДУ. Результаты сравнены с точными решениями краевой задачи и результатами, полученными с помощью других методов (метод ряда Тейлора, аналитически и численно со стандартными процедурами математического пакета Maple 17) и результатами других авторов. Из сравнений ясно, что результаты МВИ достаточно точны. Поэтому этот метод – мощный математический инструмент и с его помощью может быть решен большой класс нелинейных краевых задач, используемых в инженерных науках.

Список литературы

1. Abbasbandy S. (2006) The application of homotopy analysis method to nonlinear equations arising in heat transfer. Phys. Left. A, 360: 109-113.
2. Abdurashidov A.A., Ortiqov B.B., Qadirov N.X., Abdirashidov A. (2018) Exact solution of some nonlinear evolutionary equations using the modified simple equation method // Theoretical and Applied Science, 3(59).

3. Adomian G. (1994). Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method. 1st Edn., Kluwer Academic, Boston.
4. Hayat T., Ahmed N., Sajid M., Asghar S. (2007) On the MHD flow of a second grade fluid in a porous channel. Comp. Math. Appl., 54: 407-414.
5. He J.H. (2003) Homotopy perturbation method: A new nonlinear analytical technique. Applied Math. Comput., 135: 73-79.
6. He J.H., Wu X.H. (2007) Variational iteration method: New development and applications. Comp. Math. Appl., 54: 881-894.
7. Khatami I., Tolou N., Mahmoudi J., Rezvani M. (2008) Application of homotopy analysis method and variational iteration method for shock wave equation. J. Applied SCI. 8: 848-853.
8. Wazwaz, A.M. (2009) Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory. Higher Education Press, Berlin Heidelberg. 761 p.
9. Абдурашидов А.А. Точное решение некоторых нелинейных уравнений Гарднера упрошенным методом укороченных разложений // Международный сетевой научно-практический журнал «Наука среди нас». Выпуск: 6, феврал, 2018 г.
10. Кудряшов Н.А. Методы нелинейной математической физики: Учебное пособие. 2-е изд. Долгопрудний: Интеллект, 2010. 368 с.
11. Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990. 512 с.

APPLICATION OF THE VARIATIONAL ITERATIONS METHOD TO THE APPROXIMATE SOLUTION OF SOME BOUNDARY PROBLEMS OF HYDRODYNAMICS

Abdirashidov Ablakul
Cand. Sci. (Phys.–Math.), associate professor
abdira@mail.ru
Samarkand
Samarkand State University

Ortikov Bekzod
student
Samarkand
Samarkand State University

Kadirov Nurshod
student
Samarkand
Samarkand State University

Abdurashidov Akmaljon Ablakulovich
assistant
Samarkand
Samarkand State University

Abstract. The article is devoted to the approximate solution some boundary problems with the linear and nonlinear ordinary differential equations their reduction initial-value problems with the help by of variational iterations method. The considered boundary problems belong to hydrodynamics. Results of approximate solutions are compared to the known exact solution and solutions of other methods. Results of this article allows to expand application of the approximate of variational iterations method to the solution of many nonlinear problems of engineering sciences.

Keywords: variational iteration method, differential equations, boundary and initial-value problems, approximate solution.

References

1. Abbasbandy S. (2006) The application of homotopy analysis method to nonlinear equations arising in heat transfer. Phys. Left. A, 360: 109-113.
2. Abdurashidov A.A., Ortiqov B.B., Qadirov N.X., Abdirashidov A. (2018) Exact solution of some nonlinear evolutionary equations using the modified simple equation method // Theoretical and Applied Science, 3(59).
3. Adomian G. (1994). Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method. 1st Edn., Kluwer Academic, Boston.
4. Hayat T., Ahmed N., Sajid M., Asghar S. (2007) On the MHD flow of a second grade fluid in a porous channel. Comp. Math. Appl., 54: 407-414.
5. He J.H. (2003) Homotopy perturbation method: A new nonlinear analytical technique. Applied Math. Comput., 135: 73-79.
6. He J.H., Wu X.H. (2007) Variational iteration method: New development and applications. Comp. Math. Appl., 54: 881-894.
7. Khatami I., Tolou N., Mahmoudi J., Rezvani M. (2008) Application of homotopy analysis method and variational iteration method for shock wave equation. J. Applied SCI. 8: 848-853.
8. Wazwaz, A.M. (2009) Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory. Higher Education Press, Berlin Heidelberg. 761 p.
9. Abdurashidov, A.A. (2018) Tochnoye resheniye nekotorix nelineynix uravneniy Gardnera uproshyennim metodom ukorochennix razlojeniy [The exact solution of certain nonlinear Gardner equations by the simplified method of truncated expansions] // Mejdunarodniy setevoy nauchno-prakticheskiy jurnal «Nauka sredi nas». Vipusk 6.
10. Kudryashov, N.A. (2010) Metodi nelineynoy matematicheskoy fiziki: Uchebnoye posobiye [Methods of nonlinear mathematical physics]. 2-ye izd. Dolgoprudniy: Intellekt, 368 p.
11. Xayrer, E., Nyorsett, S., Vanner, G. (1990) Resheniye obiknovennix differensialnix uravneniy. Nejestkiye zadachi [The solution of ordinary differential equations]. M.: Mir. 512 p.