УДК 517.977

УПРАВЛЯЕМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ГИБРИДНЫХ СИСТЕМ НА КОНЕЧНОМ ЧИСЛЕ ИНТЕРВАЛОВ ВРЕМЕНИ

Чаудхари Манитджайсвал Кумар
студент
manit2009@yandex.ru
г. Москва

Российский Университет
Дружбы Народов

Аннотация. Настоящая работа посвящена исследованию свойств управляемости гибридных систем с конечным числом интервалов времени с линейными преобразованиями перехода из одного пространства в другое, разработке метода решения задачи управления линейными гибридными системами. Математическая модель гибридной системы возникает при исследовании процессов управления с учетом взаимодействия объекта управления со средой в соответствии с некоторыми физическими законами, проявляющимися в различные моменты времени. Исследование и решение различных задач управления гибридными системами имеют важное теоретическое и прикладное значение, расширяют область применения соответствующей математической теории.

Ключевые слова: проблема управляемости, линейные гибридные системы, задача Коши, выпуклый компакт, опорные функции.

Решение многих прикладных задач требует выбора управления, которое позволяет обеспечить выполнение краевых условий для заданной управляемой системы, в частности, для гибридных систем, то есть к управлению динамическими системами, описываемыми на различных интервалах времени разными дифференциальными уравнениями в различных пространствах и некоторыми преобразованиями перехода траекторий от одного пространства в другое. Такие системы встречаются во многих прикладных задачах авиастроения, робототехники, электроэнергетики и других областей.

В основу настоящей работы положена работа В.Р. Барсегяна «Конструктивный подход к исследованию задач управления линейными составными системами» [1].

Постановка задачи.

Рассматривается управляемая гибридная автономная система с N интервалами времени, движение которой описывается n_i-мерной системой на каждом интервале $t_{i-1} \leq t \leq t_i$ следующим образом:

$$\dot{x}^i = A_i x^i + B_i u^i, \qquad i=I,\dots,N; \tag{1}$$

где $x^i(t) \in R^{n_i}$, x^i- фазовый вектор системы;

A_i, B_i - постоянные матрицы $(n_i \times n_i)$ и $(n_i \times r_i)$ соответственно;

$u^i(t)$ – вектор $(r_i \times 1)$ управляющих воздействий, $u^i \in L_\infty[t_{i-1}; t_i]$, $u^i \subset \Omega_i$, где Ω_i – выпуклый компакт;

задается преобразование перехода из пространства R^{n_i} в пространство $R^{n_{i+1}}$ и является линейным:

$$x^{i+1}(t_i) = Q_i x^i(t_i), \tag{2}$$

где Q_i – заданная постоянная матрица $(n_i \times n_{i+1})$;

начальное условие для системы на первом интервале времени:

$$x^I(t_0) = x_0; \tag{3}$$

конечное условие на последем интервале:

$$x^N(t_N) = x_l; \tag{4}$$

Задача:

Найти условия, при которых существуют управляющие воздействия u^i, $i = I, \dots, N$, действующие на интервале $[t_{i-1}; t_i]$, переводящие движение гибридной системы (1) из состояния (3) в состояние (4).

Решение задачи.

Решим систему (1) для промежутка времени $[t_0; t_1]$.

Рассмотрим задачу Коши:

$$\begin{cases} \dot{x}^I(t) = A_1 x^I(t) + B_1 u^I \\ x^I(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{5}$$

Рассмотрим однородную часть (5):

$$\dot{x}^I(t) = A_1 x^I(t).$$

Тогда

$$x^{\text{одн}}(t) = e^{A_1(t-t_0)}C,$$

где $e^{A_1(t-t_0)}$ – фундаментальная матрица решений.

Частное решение находим используя метод вариации постоянной:

$$x^{\text{ч}}(t) = e^{A_1(t-t_0)} \int_{t_0}^{t} e^{-A_1(s-t_0)} B_1 u^I(s) ds = \int_{t_0}^{t} e^{A_1(t-s)} B_1 u^I(s) ds.$$

Отсюда

$$x^I(t) = x^{\text{одн}}(t) + x^{\text{ч}}(t) = e^{A_1(t-t_0)}C + \int_{t_0}^{t} e^{A_1(t-s)} B_1 u^I(s) ds.$$

Из условия $x^I(t_0) = x_0$ находим константу C:

$$x^I(t_0) = 1 \cdot C + 0 = x_0; \; => \; C = x_0;$$
$$x^I(t) = e^{A_1(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A_1(t-s)} B_1 u^I(s) ds.$$

В момент времени t_1:

$$x^I(t_1) = e^{A_1(t_1-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^{t_1} e^{A_1(t_1-s)} B_1 u^I(s) ds.$$

Теперь, используя преобразование $x^{i+1}(t_i) = Q_i x^i(t_i)$, данное в условии, преобразуем $x^I(t_1)$ из пространства R^{n_1} в пространство R^{n_2}, получим:

$$x^{II}(t_1) = Q_1 x^I(t_1) = Q_1 \left(e^{A_1(t_1-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^{t_1} e^{A_1(t_1-s)} B_1 u^I(s) ds \right). \tag{6}$$

Далее рассмотрим задачу Коши для II участка с начальным условием (6) на $[t_1; t_2]$:

$$\begin{cases} \dot{x}^{II}(t) = A_2 x^{II}(t) + B_2 u^{II} \\ x^{II}(t_1) = Q_1 x^I(t_1) \end{cases}. \tag{7}$$

Тогда, решая систему (7) аналогично системе (5), получаем для $[t_1; t_2]$:

$$x^{II}(t) = e^{A_2(t-t_1)} x^{II}(t_1) + \int_{t_1}^{t} e^{A_2(t-s)} B_2 u^{II}(s) ds$$

Или

$$x^{II}(t) = e^{A_2(t-t_1)} Q_1 \left(e^{A_1(t_1-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A_1(t-s)} B_1 u^I(s) ds \right) + \int_{t_1}^{t} e^{A_2(t-s)} B_2 u^{II}(s) ds.$$

Далее рассмотрим задачу Коши для k-го участка на $[t_{k-1}; t_k]$:

$$\begin{cases} \dot{x}^k(t) = A_k x^k(t) + B_k u^k \\ x^k(t_{k-1}) = Q_{k-1} x^{k-1}(t_{k-1}) \end{cases}. \tag{8}$$

Тогда, решая систему (8) аналогично системе (5), получаем для $[t_{k-1}; t_k]$:

$$x^k(t) = e^{A_k(t-t_{k-1})}x^k(t_{k-1}) + \int_{t_{k-1}}^{t} e^{A_k(t-s)}B_k u^k(s)ds.$$

Найдем множество достижимости(множество всех таких состояний, в которые можно привести динамическую систему при помощи допустимого управления из начального состояния $x^I(t_0) = x_0$ до заданного момента времени) $K(x_0; t_N)$ системы из x_0 в момент времени t_N:

$$K(x_0; t_N) \; = \; x^N(t_N) = \; e^{A_N(t_N-t_{N-1})}x^N(t_{N-1}) + \int_{t_{N-1}}^{t_N} e^{A_N(t_N-s)}B_N u^N(s)ds\,; (9)$$

Или, если расписать (9) до x_0 и при $N \geq 2$,

$$K(x_0; t_N) = \left(\prod_{i=N}^{2} e^{A_i(t_i-t_{i-1})}Q_{i-1}\right)e^{A_1(t_1-t_0)}x_0 +$$

$$+\sum_{j=2}^{N}\left[\left(\prod_{i=N}^{2} e^{A_i(t_i-t_{i-1})}Q_{i-1}\right)\int\limits_{t_{j-2}}^{t_{j-1}} e^{A_{j-1}(t_{j-1}-s)}B_{j-1}u^{j-1}(s)ds\right]$$

$$+ \int\limits_{t_{N-1}}^{t_N} e^{A_N(t_N-s)}B_N u^N(s)ds\,. (9^*)$$

Докажем, что $K(x_0; t_N)$ – выпуклый компакт. Для этого докажем, что это множество ограничено, замкнуто и выпукло.

1. Сначала докажем, что $K(x_0; t_N)$ – ограничено на всем промежутке времени $[t_0; t_N]$:

На $[t_{N-1}; t_N]$:

$$x^N(t) = e^{A_N(t-t_{N-1})}x^N(t_{N-1}) + \int_{t_{N-1}}^{t} e^{A_N(t-s)}B_N u^N(s)ds$$

$$\|x^N(t)\| \leq \left\|e^{A_N(t-t_{N-1})}\right\| \cdot \|x^N(t_{N-1})\| + \int_{t_{N-1}}^{t} \left\|e^{A_N(t-s)}\right\| \cdot \|B_N\| \cdot \|u^N(s)\|ds\,;$$

$B_N - const, \|B_N\| - const$, поэтому, $\|B_N\| \leq r_1$; $e^{A_N(t-s)}$ непрерывна по s и на отрезке $[t_{N-1}; t]$ – ограничена по непрерывности: $\left\|e^{A_N(t-s)}\right\| \leq r_2$ и $\left\|e^{A_N(t-t_{N-1})}\right\| \leq r_3$; т.к. $u^N \in \Omega_N$- выпуклый компакт, то $\|u^N(s)\| \leq r_4$;

$$\|x^N(t_{N-1})\| =$$

$$= \left\|Q_{N-1}(e^{A_{N-1}(t_{N-1}-t_{N-2})}x^{N-1}(t_{N-2}) + \int_{t_{N-2}}^{t_{N-1}} e^{A_{N-1}(t-s)}B_{N-1}u^{N-1}(s)ds)\right\| \leq$$

$$\leq Q_{N-1}(\left\|e^{A_{N-1}(t_{N-1}-t_{N-2})}\right\|\|x^{N-1}(t_{N-2})\| +$$

$$+ \int_{t_{N-2}}^{t_{N-1}} \left\|e^{A_{N-1}(t_{N-1}-s)}\right\|\|B_{N-1}\|\|u^{N-1}(s)\|ds);$$

На $[t_{N-2}; t_{N-1}]$: $B_{N-1} - const, \|B_{N-1}\| - const$, поэтому, $\|B_{N-1}\| \leq r_1^1$; $e^{A_{N-1}(t-s)}$ непрерывна по s и на отрезке $[t_{N-2}; t]$ – ограничена по непрерывности: $\left\|e^{A_{N-1}(t_{N-1}-s)}\right\| \leq r_2^1$ и $\left\|e^{A_{N-1}(t_{N-1}-t_{N-2})}\right\| \leq r_3^1$; т.к. $u^{N-1} \in \Omega_{N-1}$- выпуклый компакт, то $\|u^{N-1}(s)\| \leq r_4^1$;

Далее делаем так же для $x^{N-1}(t_{N-2})$, $x^{N-2}(t_{N-3})$, … , $x^{II}(t_1)$, $x^1(t_0)$:

На $[t_1; t_2]$:

$$x^{II}(t) = e^{A_2(t-t_1)}x^{II}(t_1) + \int_{t_1}^{t} e^{A_2(t-s)}B_2 u^{II}(s)ds$$

$$\|x^{II}(t)\| \le \left\|e^{A_2(t-t_1)}\right\| \cdot \|x^{II}(t_1)\| + \int_{t_1}^{t} \left\|e^{A_2(t-s)}\right\| \cdot \|B_2\| \cdot \|u^{II}(s)\| ds$$

$B_2 - const, \|B_2\| - const$, поэтому, $\|B_2\| \le r_1^{N-2}$; $e^{A_2(t-s)}$ непрерывна по s и на отрезке $[t_1; t]$ – ограничена по непрерывности: $\left\|e^{A_2(t-s)}\right\| \le r_2^{N-2}$ и $\left\|e^{A_2(t-t_1)}\right\| \le r_3^{N-2}$; т.к. $u^{II} \in \Omega_2$- выпуклый компакт, то $\|u^{II}(s)\| \le r_4^{N-2}$;

$\|x^{II}(t_1)\| = \left\|Q_1(e^{A_1(t_1-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A_1(t-s)}B_1u^I(s)ds)\ \right\| \le$

$$\le Q_1\left(\left\|e^{A_1(t_1-t_0)}\right\|\|x_0\| + \int_{t_0}^{t_1}\left\|e^{A_1(t_1-s)}\right\|\|B_1\|\|u^I(s)\|ds\right);$$

На $[t_0; t_1]$: $B_1 - const, \|B_1\| - const$, поэтому, $\|B_1\| \le r_1^{N-1}$; $e^{A_1(t-s)}$ непрерывна по s и на отрезке $[t_1; t]$ – ограничена по непрерывности; $\left\|e^{A_1(t_1-s)}\right\| \le r_2^{N-1}$ и $\left\|e^{A_1(t_1-t_0)}\right\| \le r_3^{N-1}$; т.к. $u^I \in \Omega_1$- выпуклый компакт, то $\|u^I(s)\| \le r_4^{N-1}$;

$\|x_0\| \le r_5^{N-1}$;

Подставляя все в общую формулу, получим:

$$\|x^N(t)\| \le r, \text{где } r - \text{константа}.$$

Так как $\|x^N(t)\|$ меньше константы r независимо от управления, то множество $K(x_0; t_N)$ – ограничено на $[t_0; t_N]$.

2. Докажем выпуклость множества $K(x_0; t_N)$:

Сначала покажем, что на $[t_0; t_1]$:

$\forall x_1^I(t), x_2^I(t) \in K(x_0; t_1),\ \forall \mu \in [0; 1] \quad [(1-\mu)x_1^I(t) + \mu x_2^I(t)] \in K(x_0; t_1)$

Пусть $u_1^I(t)$ и u_2^I соответсвующие управления $x_1^I(t), x_2^I(t)$;

Пусть $u_\mu^I(t) = (1-\mu)u_1^I(t) + \mu u_2^I(t)$

Так как $u_1^I(t)$ и $u_2^I(t) \in L_\infty[t_0; t_1]$, $u_1^I(t)$ и $u_2^I(t) \subset \Omega_1$, то линейная комбинация $u_\mu^I(t)$ тоже принадлежит множеству допустимых управлений.

$$x_\mu^I(t) = e^{A_1(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A_1(t-s)}B_1u_\mu^I(s)ds =$$

$$= e^{A_1(t-t_0)}x_0 - \mu e^{A_1(t-t_0)}x_0 + \mu e^{A_1(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A_1(t-s)}B_1\big((1-\mu)u_1^I(t) + \mu u_2^I(t)\big)ds =$$

$$= (1-\mu)e^{A_1(t-t_0)}x_0 + \mu e^{A_1(t-t_0)}x_0 + (1-\mu)\int_{t_0}^{t} e^{A_1(t-s)}B_1u_1^I(s)ds +$$

$$+\mu\int_{t_0}^{t} e^{A_1(t-s)}B_1u_2^I(s)ds =$$

$$= (1-\mu)\{e^{A_1(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A_1(t-s)}B_1u_1^I(s)ds\} + \mu\{e^{A_1(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A_1(t-s)}B_1u_2^I(s)ds\} =$$

$$= (1-\mu)x_1^I(t) + \mu x_2^I(t).$$

Поэтому, $K(x_0; t_1)$ – выпукло.

Теперь покажем, что $K(x_0; t_2)$ – выпукло.

$$x_\mu^{II}(t) = e^{A_2(t-t_1)}x^I(t_1) + \int_{t_1}^{t} e^{A_2(t-s)}B_2u_\mu^{II}(s)ds =$$

$$= e^{A_2(t-t_1)}x^I(t_1) - \mu e^{A_2(t-t_1)}x^I(t_1) + \mu e^{A_2(t-t_1)}x^I(t_1) +$$

$$+\int_{t_1}^{t} e^{A_2(t-s)}B_2\big((1-\mu)u_1^{II}(t) + \mu u_2^{II}(t)\big)ds =$$

$$= (1-\mu)e^{A_2(t-t_1)}x^I(t_1) + \mu e^{A_2(t-t_1)}x^I(t_1) +$$

$$+(1-\mu)\int_{t_1}^{t} e^{A_2(t-s)}B_2u_1^{II}(s)ds+\mu\int_{t_1}^{t} e^{A_2(t-s)}B_2u_2^{II}(s)ds=$$

$$=(1-\mu)\{e^{A_2(t-t_1)}x^I(t_1)+\int_{t_1}^{t} e^{A_2(t-s)}B_2u_1^{II}(s)ds\}+$$

$$+\mu\{e^{A_2(t-t_1)}x^I(t_1)+\int_{t_1}^{t} e^{A_2(t-s)}B_2u_2^{II}(s)ds\}=(1-\mu)x_1^{II}(t)+\mu x_2^{II}(t).$$

Так как $x^I(t_1)\in K(x_0;t_1)$, которое является выпуклым, то $K(x_0;t_2)$ – тоже выпукло.

Продолжая так же на всех интервалах времени до N, для последнего интервала докажем:

$\forall x_1^N(t),x_2^N(t)\in K(x_0;t_N),\ \forall\mu\in[0;1]\quad[(1-\mu)x_1^N(t)+\mu x_2^N(t)]\in K(x_0;t_N)$

Пусть $u_1^N(t)$ и u_2^N соответсвующие управления $x_1^N(t),x_2^N(t)$;

Пусть $u_\mu^N(t)=(1-\mu)u_1^N(t)+\mu u_2^N(t)$

Так как $u_1^N(t)$ и $u_2^N(t)\in L_\infty[t_1;t_2]$, $u_1^N(t)$ и $u_2^N(t)\subset\Omega_N$, то линейная комбинация $u_\mu^N(t)$ тоже принадлежит множеству допустимых управлений.

$$x_\mu^N(t)=e^{A_N(t-t_{N-1})}x^N(t_{N-1})+\int_{t_{N-1}}^{t} e^{A_N(t-s)}B_Nu_\mu^N(s)ds=$$

$$=e^{A_N(t-t_{N-1})}x^N(t_{N-1})-\mu e^{A_N(t-t_{N-1})}x^N(t_{N-1})+\mu e^{A_N(t-t_{N-1})}x^N(t_{N-1})+$$

$$+\int_{t_{N-1}}^{t} e^{A_N(t-s)}B_N\big((1-\mu)u_1^N(t)+\mu u_2^N(t)\big)ds=$$

$$=(1-\mu)e^{A_N(t-t_{N-1})}x^N(t_{N-1})+\mu e^{A_N(t-t_{N-1})}x^N(t_{N-1})+$$

$$+(1-\mu)\int_{t_{N-1}}^{t} e^{A_N(t-s)}B_Nu_1^N(s)ds+\mu\int_{t_{N-1}}^{t} e^{A_N(t-s)}B_Nu_2^N(s)ds=$$

$$=(1-\mu)\{e^{A_N(t-t_{N-1})}x^N(t_{N-1})+\int_{t_{N-1}}^{t} e^{A_N(t-s)}B_Nu_1^N(s)ds\}+$$

$$+\mu\{e^{A_N(t-t_1)}x^N(t_{N-1})+\int_{t_{N-1}}^{t} e^{A_N(t-s)}B_Nu_2^N(s)ds\}=(1-\mu)x_1^N(t)+\mu x_2^N(t).$$

Так как $x^N(t_{N-1})\in K(x_0;t_{N-1})$, которое выпуклое, то $K(x_0;t_N)$ – тоже выпукло.

3. Замкнутость $K(x_0;t_N)$. Для доказательства замкнутости покажем, что из любой последовательности $x_1^N(t_N)$, $x_2^N(t_N)$,…, $x_j^N(t_N)$, … в $K(x_0;t_N)$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторой предельной точке в $K(x_0;t_N)$.

Рассмотрим при $m=1,2,3,\ldots:$ $x_m^N(t_N)$ и соответствующие им управления $u_m^N(t_N)$.

Мы имеем (9*):

$$x_m^N(t_N)=\left(\prod_{i=N}^{2} e^{A_i(t_i-t_{i-1})}Q_{i-1}\right)e^{A_1(t_1-t_0)}x_0+$$

$$+\sum_{j=2}^{N}\left[\left(\prod_{i=N}^{2} e^{A_i(t_i-t_{i-1})}Q_{i-1}\right)\int_{t_{j-2}}^{t_{j-1}} e^{A_{j-1}(t_{j-1}-s)}B_{j-1}u_m^{j-1}(s)ds\right]$$

$$+\int_{t_{N-1}}^{t_N} e^{A_N(t_N-s)}B_Nu_m^N(s)ds\,;(10)$$

Здесь $u_m^i(\cdot)$, $i=1,\ldots,N$.

По условию Ω_i – выпуклые компакты. Пусть θ_i – семейство всех измеримых вектор-функций $u^i \subset \Omega_i$ на интервале $[t_{i-1}; t_i]$. Тогда θ_i – слабо компактно[3].

Так как θ_i – слабо компактно, то из последовательности наборов функций $\{u_m^i(\cdot),\ i = 1, \dots, N\}$ можно выделить подпоследовательность, слабо сходящуюся к набору функций $\bar{u}_m^i(\cdot) \subset \Omega_i$, $i = 1, \dots, N$.

Переходя к пределу по подходящей подпоследовательности индексов в (10), получим

$$\bar{x}^N(t_N) = \left(\prod_{i=N}^{2} e^{A_i(t_i - t_{i-1})} Q_{i-1}\right) e^{A_1(t_1 - t_0)} x_0 +$$
$$+\sum_{j=2}^{N}\left[\left(\prod_{i=N}^{2} e^{A_i(t_i - t_{i-1})} Q_{i-1}\right) \int\limits_{t_{j-2}}^{t_{j-1}} e^{A_{j-1}(t_{j-1} - s)} B_{j-1} \bar{u}^{j-1}(s) ds\right] +$$
$$+ \int\limits_{t_{N-1}}^{t_N} e^{A_N(t_N - s)} B_N \bar{u}^N(s) ds.$$

Таким образом, $\bar{x}^N(t_N) \in K(x_0; t_N)$, что доказывает замкнутость $K(x_0; t_N)$.

Следовательно, $K(x_0; t_N)$ – выпуклый компакт.

Далее, требуется найти условия, при которых в момент времени t_N множество $x^N(t_N) \subset K(x_0; t_N)$. Для этого воспользуемся опорными функциями[2]. Так как $K(x_0; t_N)$ – выпуклый компакт, то:

$$C(K(x_0; t), \psi) = \max_{x^N(t) \subset K} (x^N(t), \psi).$$

Для того, чтобы $x^N(t_N)$ содержалось в $K(x_0; t_N)$ нужно:

$$C(x^N(t_N), \psi) \le C(K(x_0; t_N), \psi).$$

Так как

$$\begin{cases} \dot{x}^N(t) = A_N x^N(t) + B_N u^N \\ \dot{\psi}(t) = -A_N^* \psi(t) \end{cases},$$

$$x^N(t) = e^{A_N(t - t_{N-1})} x^N(t_{N-1}) + \int_{t_{N-1}}^{t} e^{A_N(t-s)} B_N u^N(s) ds,$$

$$\psi(t) = e^{-A_N^*(t - t_N)} \psi_0.$$

При $N = 2$ находим скалярное произведение $(x^{II}(t), \psi)$:

$$(x^{II}(t), \psi) = \left(e^{A_2(t - t_1)} x^{II}(t_1), e^{-A_2^*(t - t_1)} \psi_0\right) + \left(\int_{t_1}^{t} e^{A_2(t-s)} B_2 u^{II}(s) ds, e^{-A_2^*(t - t_1)} \psi_0\right) =$$
$$= \left(e^{A_2(t - t_1)} Q_1 \left(e^{A_1(t_1 - t_0)} x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A_1(t-s)} B_1 u^I(s) ds\right), e^{-A_2^*(t - t_1)} \psi_0\right) +$$
$$+ \int\limits_{t_1}^{t} \left(e^{A_2(t_1 - s)} B_2 u^{II}(s) ds, \psi_0\right) =$$
$$= \left(Q_1 \left(e^{A_1(t_1 - t_0)} x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A_1(t-s)} B_1 u^I(s) ds\right), \psi_0\right) + \int\limits_{t_1}^{t} \left(e^{A_2(t_1 - s)} B_2 u^{II}(s) ds, \psi_0\right) =$$

$$= \left(Q_1 e^{A_1(t_1-t_0)}x_0, \psi_0\right) + \left(Q_1 \int_{t_0}^{t} e^{A_1(t-s)} B_1 u^I(s) ds\,, \psi_0\right)$$

$$+ \int_{t_1}^{t} \left(e^{A_2(t_1-s)} B_2 u^{II}(s) ds, \psi_0\right). \quad (11)$$

Теперь находим скалярное произведение $(x^N(t), \psi)$ при $N > 2$:

$$(x^N(t), \psi) = \left(e^{A_N(t-t_{N-1})} x^N(t_{N-1}), e^{-A_N^*(t-t_{N-1})}\psi_0\right) +$$

$$+ \left(\int_{t_{N-1}}^{t} e^{A_N(t-s)} B_N u^N(s) ds\,, e^{-A_N^*(t-t_{N-1})}\psi_0\right) =$$

$$= \left(e^{A_N(t-t_{N-1})} Q_{N-1} \left(\prod_{i=N-1}^{2} e^{A_i(t_i-t_{i-1})} Q_{i-1}\right) e^{A_1(t_1-t_0)} x_0, e^{-A_N^*(t-t_{N-1})}\psi_0\right) +$$

$$+ \left(e^{A_N(t-t_{N-1})} Q_{N-1} \sum_{j=2}^{N} \left[\left(\prod_{i=N}^{2} e^{A_i(t_i-t_{i-1})} Q_{i-1}\right) \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \int_{t_{j-2}}^{t_{j-1}} e^{A_{j-1}(t_{j-1}-s)} B_{j-1} u^{j-1}(s) ds\right], e^{-A_N^*(t-t_{N-1})}\psi_0\right) +$$

$$+ \left(\int_{t_{N-1}}^{t} e^{A_N(t-s)} B_N u^N(s) ds\,, e^{-A_N^*(t-t_{N-1})}\psi_0\right) =$$

$$= \left(Q_{N-1} \left(\prod_{i=N-1}^{2} e^{A_i(t_i-t_{i-1})} Q_{i-1}\right) e^{A_1(t_1-t_0)} x_0, \psi_0\right) +$$

$$+ \left(Q_{N-1} \sum_{j=2}^{N} \left[\left(\prod_{i=N}^{2} e^{A_i(t_i-t_{i-1})} Q_{i-1}\right) \int_{t_{j-2}}^{t_{j-1}} e^{A_{j-1}(t_{j-1}-s)} B_{j-1} u^{j-1}(s) ds\right], \psi_0\right) +$$

$$+ \int_{t_{N-1}}^{t} \left(e^{A_N(t-s)} B_N u^N(s) ds, e^{-A_N^*(t-t_{N-1})}\psi_0\right) =$$

$$= \left(Q_{N-1} \left(\prod_{i=N-1}^{2} e^{A_i(t_i-t_{i-1})} Q_{i-1}\right) e^{A_1(t_1-t_0)} x_0, \psi_0\right) +$$

$$+ \left(Q_{N-1} \sum_{j=2}^{N} \left[\left(\prod_{i=N}^{2} e^{A_i(t_i-t_{i-1})} Q_{i-1}\right) \int_{t_{j-2}}^{t_{j-1}} e^{A_{j-1}(t_{j-1}-s)} B_{j-1} u^{j-1}(s) ds\right], \psi_0\right) +$$

$$+ \int_{t_{N-1}}^{t} \left(e^{A_N(t_{N-1}-s)} B_N u^N(s) ds, \psi_0\right). \qquad (12)$$

По свойствам опорных функций, так как $x^N(t_N) = \left(x_1^N, \dots, x_{n_N}^N\right)$:

$$C(x^N(t_N), \psi) = \sum_{1}^{n_N} x_i^N \psi_i\,;$$

При $N = 2$, используя (11):

$$\sum_{1}^{n_2} x_i^{II} e^{-A_2^*(t_2-t_1)} \psi_{0_i} \le \max_{\psi_0}(\left(Q_1 e^{A_1(t_1-t_0)} x_0, \psi_0\right) + \left(Q_1 \int_{t_0}^{t} e^{A_1(t-s)} B_1 u^I(s) ds\,, \psi_0\right) + \\ + \int_{t_1}^{t} \left(e^{A_2(t_1-s)} B_2 u^{II}(s) ds, \psi_0\right))$$

При $N > 2$, используя (12):

$$\sum_{1}^{n_N} x_i^{N} e^{-A_N^*(t_N-t_{N-1})} \psi_{0_i} \le \max_{\psi_0}(\left(Q_{N-1} \left(\prod_{i=N-1}^{2} e^{A_i(t_i-t_{i-1})} Q_{i-1} \right) e^{A_1(t_1-t_0)} x_0, \psi_0 \right) + \\ + \left(Q_{N-1} \sum_{j=2}^{N} \left[\left(\prod_{i=N}^{2} e^{A_i(t_i-t_{i-1})} Q_{i-1} \right) \int_{t_{j-2}}^{t_{j-1}} e^{A_{j-1}(t_{j-1}-s)} B_{j-1} u^{j-1}(s) ds \right], \psi_0 \right) + \\ + \int_{t_{N-1}}^{t} \left(e^{A_N(t_{N-1}-s)} B_N u^N(s) ds, \psi_0\right))$$

Получили условие, при котором $x^N(t_N) = x_l$ лежит в $K(x_0; t_N)$. И при выполнении данного условия гарантированно будет существовать решение, переводящее систему (1) из начального условия (3) в конечное (4).

Список литературы

1. Барсегян В.Р. Конструктивный подход к исследованию задач управления линейными составными системами. Проблемы управления №4, 2012.
2. Благодатский В.И. «Введение в оптимальное управление». Высшая школа, 2001. 239 с.
3. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 576 с.
4. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функционального анализа. М.: Наука, 1976. 496 с.
5. Johansson M. Piecewise Linear Control Systems. Berlin: Springer, 2003. 202 p.

CONTROLLABILITY OF LINEAR HYBRID SYSTEMS WITH A FINITE NUMBER OF TIME INTERVALS

Chaudhary Manitjaiswal Kumar
student
manit2009@yandex.ru
Moscow

Rudn University

Abstract. The present paper is devoted to analyzing controllability properties for hybrid system with a finite number of time intervals with linear transformations of the transition from one space to another, developing a method of solving the control problem with the help of linear hybrid systems. A mathematical model of a hybrid system arises in the control processes investigation, taking into account the interaction of an object of control with the environment in accordance with certain physical laws manifesting themselves at different times. The analysis and solution of various hybrid systems control problems have an important theoretical and practical significance, broaden the scope of the relevant mathematical application.

Keywords: problem of controllability, linear hybrid systems, Cauchy problem, convex compact set, support functions.

References

1. Barseghyan V.R. (2012). Constructivny`i` podhod k issledovaniu zadach upravleniia lineiny`mi sostavny`mi sistemami [A constructive approach to analyzing problems of control with the help of linear composite systems]. Control Sciences № 4, 2012.
2. Blagodatskiy V.I. (2001). Vvedeniy`e v optimal`noe upravlenie [Introduction to optimal control]. High School, 2001. 239 p.
3. Lee E.B., Marcus L. (1972) Osnovy` teorii optimal`nogo upravleniy`a [Foundations of Optimal Control Theory]. M.: Nauka, 1972. 576 p.
4. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. (1976) Elementy` teorii functsional`nogo analiza [Elements of the theory of functional analysis]. M.: Nauka. 496 p.
5. Johansson M. (2003) Piecewise Linear Control Systems. Berlin: Springer. 202 p.