УДК 372.851

ОБ АЛГОРИТМИЧЕСКОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ СТЕРЕОМЕТРИИ

Ольга Владимировна Головина
к.п.н.
dir-ktep@yandex.ru
г. Калуга
Калужский техникум электронных приборов

Татьяна Михайловна Соболева
преподаватель
ktep@mail.ru
г. Калуга
Калужский техникум электронных приборов

Аннотация. В статье рассматривается алгоритмический подход к организации обучения типовым (базовым) задачам стереометрии. Формирование универсальных учебных умений (УУД) является одним из определяющих факторов организации учебного процесса. УУД формируются в ходе применения алгоритмического подхода. Понятие алгоритм достаточно строгое, поэтому с учетом некоторых допущений будем использовать алгоритмическое предписание: допустимы операции содержательного и субъективного характера; элементарность операций относительна и зависит от уровня знаний; допустим выбор из множества альтернатив (ослабление свойства детерминированности). С помощью системы ключевых вопросов сформулированы алгоритмы нахождения расстояния от точки до плоскости, от прямой до плоскости.

Ключевые слова: универсальные учебные действия, алгоритм, алгоритмическое предписание, стереометрия.

Современное общество характеризуется стремительным развитием науки и техники, созданием новых информационных технологий, коренным образом преобразующих жизнь людей. Темпы обновления знаний настолько высоки, что на протяжении жизни человеку приходится неоднократно переучиваться, овладевать новыми профессиями. Непрерывное образование становится реальностью и необходимостью в жизни человека. Развитие коммуникаций и сети Интернет приводит к тому, что образовательная организация перестает быть единственным источником знаний и информации для обучающихся.

В общественном сознании происходит переход от понимания социального предназначения образовательного учреждения как задачи простого формирования компетенций к новому пониманию функции образования. Приоритетной целью образования становится развитие у обучающихся способности самостоятельно ставить цели, проектировать пути их реализации, контролировать и оценивать свои достижения. Иначе говоря, формирование умения учиться. Обучающийся сам должен стать «архитектором и строителем» образовательного процесса.

Последнее время одним из вопросов для обсуждения являются образовательные стандарты. Новые социальные запросы определяют цели образования как общекультурное, личностное и познавательное развитие обучающихся, обеспечивающие такую ключевую компетенцию образования как «научить учиться». Важнейшей задачей современной системы образования является не только освоение учащимися конкретных предметных знаний и навыков в рамках отдельных дисциплин, а формирование совокупности «универсальных учебных действий», обеспечивающих компетенцию «научить учиться». Достижение данной цели становится возможным благодаря формированию системы универсальных учебных действий (УУД). Возникновение понятия УУД связано с изменением парадигмы образования: от усвоения знаний, умений и навыков к развитию личности. Универсальные учебные действия – это способность субъекта к саморазвитию и самосовершенствованию путем сознательного и активного присвоения нового социального опыта.

Формирование УУД как цель образовательного процесса определяет его содержание и организацию. Выделяют следующие виды УУД:

1. Коммуникативные (планирование учебного сотрудничества, постановка вопросов, построение речевых высказываний, взаимоотношения);
2. Познавательные, включая общеучебные и логические (общеучебные, логические, постановка и решение проблем);
3. Регулятивные, включая действия саморегуляции (целеполагание, планирование, прогнозирование, контроль, коррекция, оценка).

Через алгоритмический подход в процессе обучения у обучающихся формируются УУД, что приводит к развитию личности. Алгоритмический подход – это обучение учащихся какому-либо общему методу решения посредством алгоритма, выражающего этот метод.

Под алгоритмом обычно понимают точное общепонятное предписание о выполнении в заданной последовательности (в каждом конкретном случае) простых операций (шагов) для решения задач определенного типа. В настоящее время существует множество определений данного термина, но суть заключается в следующем: алгоритм – конечная последовательность точно сформулированных правил или действий, приводящих к решению поставленной цели (ожидаемому результату).

Более четкое представление об алгоритме можно увидеть через его свойства:

- массовость – возможность с помощью алгоритма решать задачи определенного типа, а не только одну конкретную задачу;
- дискретность (пошаговый (дискретный) характер алгоритма);
- детерминированность (каждое указание алгоритма понятно исполнителю;
- результативность – это последовательное выполнение всех предписываемых действий, которое должно привести к получению искомого результата. Преобразование исходных данных в конечный результат, осуществляется дискретно. Должна соблюдаться строгая последовательность действий;
- конечность – результат должен быть получен за конечное число шагов.

Сущность алгоритмизации в обучении заключается в решении следующих двух основных проблем:

- разработки алгоритмов решения определенных задач и обучения им обучающихся;
- построения алгоритмов самого обучения, т.е. алгоритмов, используемых обучающимися (преподавателем или компьютерной системой обучения) в процессе обучения.

Требование разработки алгоритмов решения определенных задач и обучения им учащихся естественным образом следует из основных положений теории поэтапного формирования умственных действий и теории уровней усвоения В.П.Беспалько. Необходимо отметить двойственный характер рассматриваемых алгоритмов решения задач: с одной стороны они служат средством усвоения некоторой суммы знаний, с другой стороны одновременно входят и в содержание цели обучения.

Так как в процессе обучения исполнительным устройством для анализируемых алгоритмов является человек (обучаемый), то они существенным образом могут отличаться от математического понятия алгоритма (машины Тьюринга, нормального алгоритма, рекурсивной функции). В отличие от классических алгоритмов (алгоритмов в обычном математическом смысле), операции которых формальны, рассматриваемые алгоритмы допускают операции, имеющие содержательный, субъективный характер, т.е. зависящие от человеческого понимания. Таким образом, элементарность операций, выполняемых обучаемым в процессе решения задач, относительна и зависит от ряда факторов, в том числе и от степени его обученности. Другим допускаемым отличием является ослабление свойства детерминированности, означающее, что при выполнении алгоритма имеется возможность совершать акты свободного (т.е. не определенного извне) выбора из фиксированного, тем или иным способом, множества альтернатив. Для обозначения алгоритмов с описанными выше свойствами было введено понятие предписания алгоритмического типа или алгоритмического предписания. Естественно, что предписания алгоритмического типа, как и классические алгоритмы, обладают свойствами массовости и результативности.

Разработка алгоритмического предписания является, в общем случае, слабоформализуемой, многокритериальной задачей, решаемой экспертом-педагогом. В результате анализа предметной области обучения выбираются базовые (первичные) элементы, представляющие собой простые понятия, на основе которых строится рассматриваемый учебный материал. При этом некоторые понятия, являясь базовыми для одной предметной области, в другой могут оказаться сложными, производными понятиями. С учетом выбранных базовых элементов и на основе структурно-алгоритмического анализа деятельности по решению задач определенного класса осуществляется выделение типовых операций, составляющих содержание рассматриваемой деятельности. Под типовой операцией понимается законченная по смыслу, учитывающая специфику предметной области обучения операция, предполагающая элементарные действия над первичными элементами. Разработка алгоритмического предписания завершается описанием его логической структуры, указывающей последовательность, в которой необходимо (или, во всяком случае, целесообразно) выполнять выделенные операции для получения искомого решения. [Галеев, 2011:289-292]

Обучение учащихся алгоритмам решения определенных задач осуществляется через управляемое и контролируемое выполнение учебных задач. В связи с этим актуальной является задача формализации, а на ее основе и автоматизации функции формирования учебных задач с требуемыми свойствами, обеспечивающими усвоение рассмотренных алгоритмических предписаний. Решение поставленной проблемы позволит существенно снизить затраты на осуществление процесса обучения и освободит преподавателя от значительного объема рутинной работы по формированию необходимой последовательности указанных учебных задач. Второй основной проблемой алгоритмического подхода к организации процесса обучения является построение алгоритмов самого обучения. Рассмотрение вопросов разработки алгоритмических предписаний и обучения им учащихся позволило определить основную функцию алгоритмов обучения – определение свойств учебных задач, обеспечивающих усвоение алгоритмических предписаний, разработанных экспертом-педагогом. Определение указанных свойств осуществляются с учетом общих принципов обучения, выявленных при анализе ассоциативно-рефлекторной теории обучения, а именно:

- определение свойств учебных задач и выдача подкреплений должны осуществляться на основе идентификации навыков обучаемого на каждом шаге обучения;

- в процессе обучения должен соблюдаться принцип перехода от усвоения простого учебного материала к сложному;
- переход к усвоению нового учебного материала должен осуществляться в случае успешного усвоения предыдущего материала;
- в процессе обучения должна осуществляться стабилизация субъективной степени трудности учебных задач для каждого обучаемого. Завершением этапа формализации рассмотренных проблем организации процесса обучения является разработка соответствующей модели обучения, обеспечивающей решение поставленной задачи - осуществление управления процессом обучения навыкам алгоритмической природы (описываемым с помощью алгоритмических предписаний). [Галеев, 2011:293-294]

Рассмотрим алгоритмический подход к решению задач стереометрии, которые традиционно вызывают трудности у выпускников школ при сдаче ЕГЭ по математике профессионального уровня. С другой стороны, применение алгоритмов решения типовых задач на нахождение расстояния от точки до плоскости; от прямой до плоскости; между скрещивающимися прямыми; угла между скрещивающимися прямыми; между прямой и плоскостью; между плоскостями позволяет систематизировать приобретенные знания по стереометрии и выработать устойчивые навыки организации самостоятельной работы.

Составление алгоритма решения любого класса задач необходимо организовать как совместную работу учителя и ученика после изучения основных теоретических положений темы, причем учителю следует выполнять роль координатора и не сообщать алгоритм, а подводить учеников к самостоятельной формулировке каждого шага. Такой подход способствует более глубокому пониманию и осознанию учащимися каждого действия. Перед составлением алгоритма необходимо повторить определение искомого объекта. Зачастую в определении и «скрывается» алгоритм или основная его часть.

Рассмотрим алгоритмический подход при решении некоторых типовых задач стереометрии:

Расстояние от точки до плоскости

Рассмотрим точку C∈α, расстояние от точки *C* до плоскости α будем обозначать ρ (C, α). [Атанасян, 2015:155]

Система ключевых вопросов к составлению алгоритма построения расстояния от точки до плоскости [Головина, Соболева, 2017:144]

1) Что называется расстоянием от точки до плоскости? Расстоянием от точки до плоскости называется длина перпендикуляра, проведенного от этой точки к плоскости.

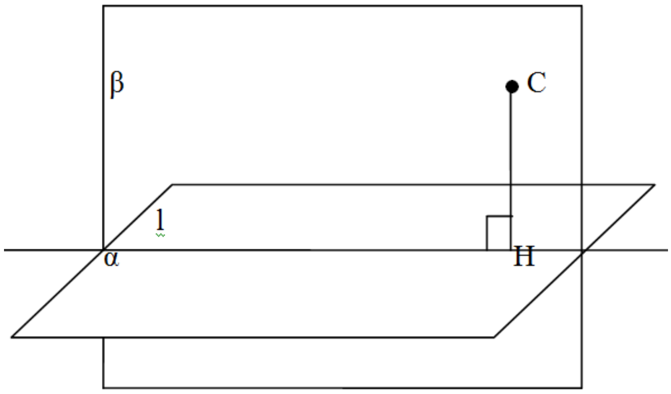
2) Какие плоскости можно провести через точку *C* по отношении к плоскости α? Через точку *C* можно провести плоскость, параллельную плоскости α и плоскость, пересекающую плоскость α.

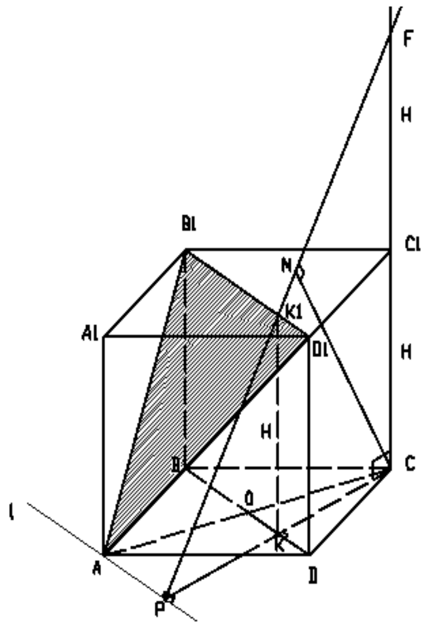
3) Сколько можно провести через точку *C* плоскостей пересекающих плоскость α? Через точку *C* можно провести бесчисленное множество плоскостей, пересекающих плоскость α.

4) В какой из этих плоскостей будет расположено кратчайшее расстояние от точки C до плоскости α? Кратчайшее расстояние от точки C до плоскости α будет расположено в плоскости β, перпендикулярной плоскости α.

5) К какой прямой в плоскости β надо провести перпендикуляр через точку C? В плоскости β через точку C надо провести перпендикуляр к общей прямой плоскостей β и α, то есть к их линиям пересечения: $\alpha \cap \beta = a$.

6) Сколькими способами можно провести перпендикуляр через точку C в плоскости β к линии пересечения плоскостей α и β? Этот перпендикуляр можно провести единственным способом, он и будет являться расстоянием от точки C до плоскости α.





В ходе обсуждения вышеперечисленных вопросов формулируем **<u>Алгоритм:</u>**
Чтобы найти расстояние от точки C до плоскости α необходимо:
1) поместить точку C в плоскость β, перпендикулярную плоскости α: $C \in \beta$; $\beta \perp \alpha$
2) построить линию пересечения плоскостей α и β: $\alpha \cap \beta = l$
3) из точки C провести перпендикуляр к прямой l: $CH \perp \alpha$.
Этот перпендикуляр и будет являться перпендикуляром, проведенным от точки C к плоскости α, то есть ρ (C, α)=CA.

<u>Задача:</u> В прямоугольном параллелепипеде, где а и $a\sqrt{3}$ - стороны основания, H – высота, найдите расстояние от точки C до плоскости AB_1D_1. [Семенова, Ященко, 2012:93]
Решение:

1. Так как точка C∈(ABC), то поместим точку C в плоскость линейного угла двугранного угла между плоскостью основания и плоскостью AB_1D_1:

1) постоим линию пересечения l (ABC) и (AB_1D_1): $BD \parallel B_1D_1 \Rightarrow l \parallel BD$, $l = (ABC) \cap (AB_1D_1)$;

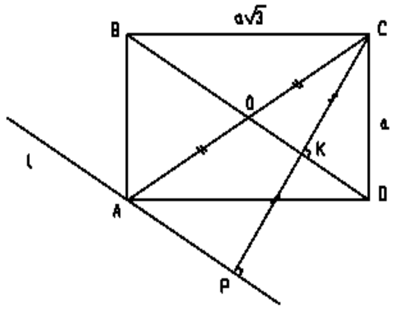
2) $CP \perp l$, $K \to K_1$, $PK_1 \cap CC_1 = F$

$PF \perp l$ (теорема о тех перпендикулярах) => (FCP) – плоскость линейного угла.

2. $(AB_1D_1) \perp (FCP)$, найдем линию пересечения этих плоскостей.

$K_1 \in (AB_1D_1)$, $K_1 \in (FCP)$, $P \in l \Rightarrow P \in (AB_1D_1)$,

$P \in (FCP) \Rightarrow (AB_1D_1) \cap (FCP) = PK_1$ или $(AB_1D_1) \cap (FCP) = FP$.



$CM \perp FP \Rightarrow CM \perp (AB_1D_1)$, то есть $\rho(C, (AB_1D_1)) = CM$.

3. 1) AO = OC=› по теореме Фалеса CK=KP и PC=2CK;

2) так как CP$\perp$ l, то CK$\perp$BD;

3) в Δ BCD: BD =$\sqrt{3a^2 + a^2}$ = 2 a, CK=$\frac{a\sqrt{3}\times a}{2a} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$;

4) PC = $a\sqrt{3}$;

5) в Δ PCH KK_1 - средняя линия => CF=2H, CM = $\frac{PC\times CF}{PF}$; PF = $\sqrt{3a^2 + 4H^2}$

CM = $\frac{a\sqrt{3}\times 2H}{\sqrt{3a^2+4H^2}}$

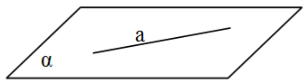
Ответ: $\frac{2aH\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2+4H^2}}$

Расстояние от прямой до плоскости

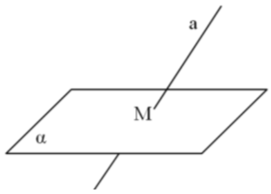
Система ключевых вопросов к составлению алгоритма построения расстояния от точки до плоскости [Соболева, 2017:142]

1) Какие возможны способы расположения прямой и плоскости в пространстве? Существует три способа расположения прямой и плоскости в пространстве:

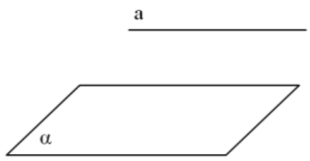
1. Прямая может лежать в плоскости: $a \in \alpha$; (рис. 1)
2. Прямая и плоскость имеют одну общую точку (пересекаются): $a \cap \alpha = M$; (рис. 2)
3. Прямая и плоскость не имеют общих точек, то есть параллельны: $a \parallel \alpha$. (рис. 3)



(рис. 1)



(рис. 2)



(рис. 3)

2) Как оценить расстояние от прямой a до плоскости α в каждом из этих случаев?

1. Расстояние от прямой a до плоскости α равно 0.
2. На прямой a найдется общая точка M прямой и плоскости, расстояние от точки M до плоскости α равно 0.
3. Все точки прямой a равноудалены от плоскости α.

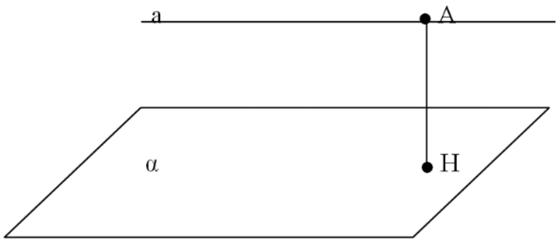
3) Во всех ли трех случаях актуальна задача построения расстояния от прямой до плоскости? Задача построения расстояния от прямой до плоскости актуальна только в 3 случае.

4) Что необходимо определить на прямой a для построения расстояния от нее до параллельной плоскости? На прямой a надо выбрать «удобную» точку (в зависимости от условия задачи), чтобы построить расстояние от нее до плоскости α.

5) При выборе точки на прямой a, что мы понимаем под словом «удобная»? Это точка, которую легко поместить в плоскость, перпендикулярную данной плоскости.

6) Что означает утверждение «поместить точку в плоскость, перпендикулярную данной»? Это означает, что необходимо найти такую плоскость на рисунке или построить её.

7) К какой задаче мы приходим после выбора «удобной» точки на прямой a? Мы приходим к задаче построения расстояния от точки до плоскости.



Алгоритм.

$$\left.\begin{array}{l} a \parallel \alpha \\ \text{т. } A \in a \\ AH \perp \alpha \end{array}\right| \Rightarrow \rho(a, \alpha) = AH$$

Приведенные алгоритмы отражают геометрическую часть решения. Чтобы осуществить вычислительную, необходимо полученный отрезок включить в какой-либо решаемый треугольник, т.е. в котором известно три элемента, причем один из них должен быть линейным. В прямоугольном треугольнике достаточно двух элементов – один линейный. На этот факт необходимо обратить внимание обучающихся.

Рассмотренные задачи иллюстрируют процесс формирования алгоритмического предписания, с помощью системы ключевых вопросов. В результате активизируется мыслительная деятельность обучающихся, развивается умение учиться.

Список литературы

1. ЕГЭ 2013. Математика. Задача С2. Геометрия. Стереометрия / Под ред. А.Л. Семенова и И.В. Ященко. 3-е изд., стереотип. М.: МЦНМО, 2013. 128 с.
2. Галеев И.Х. Свойства учебных задач при алгоритмизации в обучении // Международный электронный журнал «Образовательные технологии и общество (Educational Technology&Society)» 2011. V.14. №2. C.289-299. ISSN 1436-4522. URL: http://ifets.ieee.org/russian/periodical/journal.html (дата обращения: 16.04.2018)
3. Головина О.В., Соболева Т.М. Использование математического моделирования в профессиональной деятельности выпускников профессиональных образовательных организаций / Математическое моделирование в экономике, управлении и образовании: сборник научных статей по материалам III Международной научно-практической конференции / под редакцией Дробышевой И.В., Дробышева Ю.А. – Москва: Издательство: ООО «ТРП», 2017. С.143-147.
4. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. 10-11 классы: учеб. для общеобразоват. организаций: базовый и углубл. уровни / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. / 2-е изд. М.: Просвещение, 2015. 255 с.
5. Соболева Т.М. Роль системы ключевых вопросов в активизации мыслительной деятельности при изучении математики / Профессиональная деятельность педагога: новые подходы и решения: коллективная монография / отв. ред. А. Ю. Нагорнова. - Ульяновск: Зебра, 2017. 287 с.

ABOUT ALGORITHMIC APPROACH TO THE SOLUTION OF SOME PROBLEMS OF STEREOMETRY

O.V. Golovina
Cand. Sci. (Pedagogy)
dir-ktep@yandex.ru
Kaluga
Kaluga Technical College of Electronic Device

T.M. Soboleva
Senior Lecturer
ktep@mail.ru
Kaluga
Kaluga Technical College of Electronic Device

Abstract: the article deals with algorithmic approach to organization of training of typical (basic) problems of stereometry. The Formation of universal educational skills (UES) is one of the determining factors of the educational process. The UES are formed during the application of the algorithmic approach. The concept of the algorithm is quite strict, so taking into account of some assumptions, we will use the algorithmic rule: content and subjective operations are allowed; the elementary nature of operations is relative and depends on the level of knowledge; let's say we choose from a variety of alternatives (weakening of the deterministic property). The algorithms for finding the distance from a point to a plane, from a straight line to a plane are formulated with the help of a system of key issues)
Keywords: universal educational actions, an algorithm, algorithmic regulation, stereometry.

References

1. EGJe 2013. Matematika. Zadacha S2. Geometrija. Stereometrija / Pod red. A.L. Semenova i I.V. Jashhenko. 3-e izd., stereotip. M.: MCNMO, 2013. 128 s.
2. Galeev, I.H. (2011) Svojstva uchebnyh zadach pri algoritmizacii v obuchenii // Mezhdunarodnyj jelektronnyj zhurnal «Obrazovatel'nye tehnologii i obshhestvo (Educational Technology&Society)» [Properties of Learning Problems in Algorithmization in Teaching] 2011. V.14. №2. C.289-299. ISSN 1436-4522. URL: http://ifets.ieee.org/russian/periodical/journal.html (data obrashhenija: 16.04.2018)
3. Golovina, O.V., Soboleva, T.M. (2017) Ispol'zovanie matematicheskogo modelirovanija v professional'noj dejatel'nosti vypusknikov professional'nyh obrazovatel'nyh organizacij [Use of mathematical modeling in professional activity of graduates of professional educational organizations] / Matematicheskoe modelirovanie v jekonomike, upravlenii i obrazovanii: sbornik nauchnyh statej po materialam III Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoj konferencii / pod redakciej Drobyshevoj I.V., Drobysheva Ju.A. Moskva: Izdatel'stvo: OOO «TRP», S.143-147.
4. Matematika: algebra i nachala matematicheskogo analiza, geometrija. 10-11 klassy: ucheb. dlja obshheobrazovat. organizacij: bazovyj i uglubl. urovni [Mathematics: algebra and the beginnings of mathematical analysis, geometry. 10-11 classes: training. for general education. organizations: basic and in-depth. levels] / L.S. Atanasjan, V.F. Butuzov, S.B. Kadomcev i dr. / 2-e izd. M.: Prosveshhenie, 2015. – 255 s.
5. Soboleva, T.M. (2017) Rol' sistemy kljuchevyh voprosov v aktivizacii myslitel'noj dejatel'nosti pri izuchenii matematiki [The role of the system of key questions in the activation of mental activity in the study of mathematics] / Professional'naja dejatel'nost' pedagoga: novye podhody i reshenija: kollektivnaja monografija / otv. red. A. Ju. Nagornova. Ul'janovsk: Zebra. 287 s.