УДК 517.53

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ ОБЛАСТЕЙ С АСИМПТОТИЧЕСКИ КОНФОРМНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Наталья Михайловна Махина
к.ф.-м.н., доцент
mahinanm@yandex.ru
г. Брянск

Брянский государственный
университет им. ак. И.Г. Петровского

Аннотация. В статье рассматриваются вопросы ортогональности некоторых систем функций в пространствах аналитических функций с весом, эквивалентным степени расстояния до границы области. Рассматриваются области с асимптотически конформной границей, где указанный результат можно применить для построения ортогональных базисов в соответствующих пространствах.

Ключевые слова: асимптотически конформная граница; ортогональность систем функций; весовые пространства; базисы.

Обозначим $S=\{z\in C:|z|<1\}$, G – некоторая односвязная область на комплексной плоскости C; функция φ конформно отображает S на G, ψ – обратная функция для φ. Напомним, что область G принадлежит классу областей с асимптотически конформной границей (A), если

$$\mu(\delta)=\sup_{\substack{w_1,w_2\in\partial G\\ |w_1-w_2|\le\delta}}\sup_{w\in\Gamma'}\left(\frac{|w_1-w|+|w_2-w|}{|w_2-w_1|}-1\right)\to 0 \text{ при } \delta\to 0,$$

где Γ' – кратчайшая дуга кривой, соединяющей точки w_1, w_2 (по указанным классам см., например, [1]-[4], [7], [8]).

Отметим, что если φ – функция Римана, конформно отображающая единичный круг на область с асимптотически конформной границей, то $\ln\varphi'(z)\in VMOA$ (см. [7]).

Как известно (см., например, [7]), если $\ln\varphi'(z)\in VMOA$, то

$$(1-|z|)\left|\frac{\varphi''(z)}{\varphi'(z)}\right|\to 0,\ |z|\to 1-0\,.$$

Обозначим также $L^p_\beta(G)$ – класс измеримых по Лебегу в области G функций f таких, что

$$\int_G |f(w)|^p\frac{(1-|\psi(w)|)^\beta}{|\psi'(w)|^\beta}dm_2(w)<+\infty, 0<p<+\infty, \beta>-1,$$

где dm_2 – плоская мера Лебега; $A^p_\beta(G)$ – подпространство пространства $L^p_\beta(G)$, состоящее из аналитических функций.

Заметим, что с учетом оценок, следующих из известной теоремы Кебе (см. [1, с. 51]):

$$\frac{1}{4}\frac{(1-|\psi(w)|)}{|\psi'(w)|}\le d(w,\partial G)\le 4\frac{(1-|\psi(w)|)}{|\psi'(w)|}\,,$$

пространство $L^p_\beta(G)$ в определенном смысле эквивалентно пространству $\widetilde{L}^p_\beta(G)$ измеримых по Лебегу в области G функций f таких, что

$$\int_G |f(w)|^p d^\beta(w,\partial G)dm_2(w) < +\infty, 0 < p < +\infty, \beta > -1,$$

$d(w,\partial G)$ – расстояние от точки w до границы области G.

Пусть $\{e_k(w)\}_{k=0}^{+\infty}, e_k \in A^p_\beta(G)$. Хорошо известно, что система $\{e_k(w)\}_{k=0}^{+\infty}$ является базисом в пространстве $A^p_\beta(G)$, если $\forall f \in A^p_\beta(G)$ существует единственная последовательность комплексных чисел $\{\gamma_k(f)\}_{k=0}^{+\infty}$ такая, что последовательность

$$S_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \gamma_k e_k(w), \; n = 1,2,...,$$

равномерно сходится к функции f в пространстве $A^p_\beta(G)$.

Обозначим (K) – класс кривых, являющихся гладкими жордановыми всюду, кроме конечного числа точек $a_i, i = 1,2,...,n$, в которых кривая образует углы $\frac{\pi}{\alpha_i}, \frac{1}{2} \le \alpha_i < +\infty, i = 1,2,...,n$ (см. [11]).

В работе [11] для односвязной области G, $\partial G \in (K)$, показано, что система функций

$$e_n(w) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}(\psi(w))^n \psi'(w), \; n = 0,1,2,...,$$

является ортогональной в пространстве $A^p_0(G)$ и базисом, если $p \in (2-\alpha, \frac{2-\alpha}{1-\alpha})$ при $\frac{1}{2} \le \alpha < 1$, и если $p \in (1, +\infty)$ при $\alpha \ge 1$, где $\alpha = \min_{1 \le i \le n} \alpha_i$.

В нашей работе мы докажем ортогональность рассматриваемой системы функций в пространстве $A^p_\beta(G)$ областей класса (A), что позволит построить базисы в указанных пространствах.

Теорема 1. *Пусть G – односвязная ограниченная область, $\partial G \in (A)$, функция φ конформно отображает S на G, причем $\varphi(0) = w_0$, w_0 – некоторая точка из G, $\varphi'(0) > 0$, ψ – обратная функция для φ.*

Если $1 < p < +\infty$, $\beta > -1$, то система функций

$$e_k(w) = \sqrt{\frac{1}{2\pi\beta}\frac{\Gamma(n+\beta)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\beta)}}(\psi(w))^k (\psi'(w))^{\frac{\beta}{2}+1}, \; k = 0,1,2,..., \tag{1}$$

ортогональна в пространстве $A^p_\beta(G)$.

Доказательство.

Покажем, что система функций (1) является ортогональной в пространстве $A^p_\beta(G)$, то есть

$$\int_G e_k(w) e_l(w) d^\beta(w,\partial G)dm_2(w) = 0, k \ne l.$$

Пусть $\psi(w)=z,$ тогда $w=\varphi(z)$, используя двойное неравенство, которое выводится из теоремы Кёбе

$$\frac{1}{4}\frac{d(\varphi(z),\partial G)}{1-|z|}\le|\varphi'(z)|\le 4\frac{d(\varphi(z),\partial G)}{1-|z|}.$$

Заметим, что

$$d(w,\partial G)\sim\frac{(1-|\psi(w)|)}{|\psi'(w)|},$$

тогда достаточно доказать

$$\int_G e_k(w)e_l(w)\frac{(1-|\psi(w)|)^{\beta}}{|\psi'(w)|^{\beta}}dm_2(w)=0, k\ne l.$$

Но

$$\int_G e_k(w)e_l(w)\frac{(1-|\psi(w)|)^{\beta}}{|\psi'(w)|^{\beta}}dm_2(w)= =\sqrt{\frac{1}{2\pi\beta}\frac{\Gamma(k+\beta)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\beta)}}\sqrt{\frac{1}{2\pi\beta}\frac{\Gamma(l+\beta)}{\Gamma(l+1)\Gamma(\beta)}}.$$

$$\int_G(\psi(w))^k(\overline{\psi(w)})^l|\psi'(w)|^{\beta+2}\frac{(1-|\psi(w)|)^{\beta}}{|\psi'(w)|^{\beta}}dm_2(w)=$$

$$=c\int_G(\psi(w))^k(\overline{\psi(w)})^l(1-|\psi(w)|)^{\beta}|\psi'(w)|^2dm_2(w).$$

Снова переходя к единичному кругу с помощью замены $\psi(w)=z,$ получим:

$$c\int_G(\psi(w))^k(\overline{\psi(w)})^l(1-|\psi(w)|)^{\beta}|\psi'(w)|^2dm_2(w)=$$

$$=c\int_S z^k\bar{z}^l(1-|z|)^{\beta}dm_2(w)=c\int_0^1 r^{k+l+1}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i\theta(k-l)}=0 \text{ при } k=l.$$

Итак, данная система ортогональна.

Для изучения пространств областей с асимптотически конформными границами и построения базисов в них актуальными оказываются также оценки конформно отображающих функций.

Теорема 2. *Пусть* G *– односвязная ограниченная область,* $\partial G\in(A)$*, функция* φ *конформно отображает* S *на* G*, причем* $\varphi(0)=w_0,$ w_0 *– некоторая точка из* G*,* $\varphi'(0)>0$. *Пусть также* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$ $\zeta\in S$. *Тогда*

1) *При* $1<p<+\infty$ *справедлива оценка*

$$\int_S\frac{|\varphi'(z)|^{\beta+2}(1-|z|)^{\beta}\chi_\gamma^p(z)}{(1-\bar{\zeta}z)^{\eta}}dm_2(z)\le c_1\frac{|\varphi'(\zeta)|^{\beta+2}(1-|\zeta|)^{\beta}\chi_\gamma^p(\zeta)}{(1-|\zeta|)^{\eta}},$$

где $\chi_\gamma(\zeta)=(1-|\zeta|)^{-\gamma/pq},$ $0<\gamma/q<\beta+1,$ $\eta\ge\beta+1-\gamma/q$;

2) *При* $\beta>-1, \eta>\beta+1$ *справедлива оценка*

$$\int_S \frac{|\varphi'(z)|^{\beta+2}(1-|z|)^{\beta}}{(1-\overline{\zeta}z)^{\eta}}dm_2(z) \le c_2 \frac{|\varphi'(\zeta)|^{\beta+2}(1-|\zeta|)^{\beta}}{(1-|\zeta|)^{\eta}}.$$

Доказательство аналогичных утверждений проведено в работе [5], возможности применения указанных результатов – в работах [6], [9], [10].

Список литературы

1. Альфорс Л. Лекции по квазиконформным отображениям. М.: Мир, 1969.
2. Гарнетт Дж. Ограниченные аналитические функции. М.: Наука, 1984.
3. Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.
4. Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука, 1977.
5. Махина Н.М. Базисы в весовых пространствах функций, аналитических в областях со спрямляемой границей // Вестник Брянского государственного университета: Естественные и точные науки. 2013. №4. С. 27-32.
6. Махина Н.М. Оценки производных аналитических и гармонических функций в некоторых областях комплексной плоскости // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2017. № 2. С. 16-22.
7. Поммеренке Ч. О однолистных функциях, функциях Блоха и VMOA // Мат. Ан. 1978. Т. 236. С. 199-208.
8. Привалов И. И. Граничные свойства аналитических функций. М.-Л.: ГИТТЛ, 1950.
9. Ткаченко Н.М. Весовые Lp-оценки аналитических и гармонических функций в односвязных областях комплексной плоскости // диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук / Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского. Брянск, 2009.
10. Ткаченко Н.М., Шамоян Ф.А. Теорема Харди-Литтлвуда и оператор гармонического сопряжения в некоторых классах односвязных областей со спрямляемой границей // Журнал математической физики, анализа, геометрии. 2009. Т. 5. № 2. С. 192-210.
11. Шихватов А.М. Об Lp -пространствах функций, аналитических в области с кусочно-аналитической границей // Математические заметки. 1976. Т. 20, № 4. С. 537-548.

ORTHOGONAL SYSTEMS OF FUNCTIONS IN SPACES OF DOMAINS WITH AN ASYMPTOTICALLY CONFORMAL BOUNDARY

Makhina N.M.
Cand. Sci. (Phys.–Math.), associate professor
mahinanm@yandex.ru
Bryansk

Bryansk State University

Abstract. In this paper we consider the orthogonality of some systems of functions in spaces of analytic functions with a weight equivalent to the degree of distance to the boundary of the domain. Domains with an asymptotically conformal boundary are considered, where this result can be used to construct orthogonal bases in the corresponding spaces.

Keywords: asymptotically conformal boundary; orthogonality of systems of functions; weighted spaces; bases

References

1. Alfors L. (1969) Lekcii po kvazikonformnym otobrazhenijam [Lectures on quasiconformal mappings]. M.: Mir.
2. Garnett Dzh. (1884) Ogranichennye analiticheskie funkcii [Limited analytic functions]. M.: Nauka.
3. Goluzin G.M. (1966) Geometricheskaja teorija funkcij kompleksnogo peremennogo [Geometric theory of functions of a complex variable]. M.: Nauka.
4. Dzjadyk V.K. (1977) Vvedenie v teoriju ravnomernogo priblizhenija funkcij polinomami [Introduction to the theory of uniform approximation of functions by polynomials]. M.: Nauka.
5. Makhina N.M. (2013) Bazisy v vesovyh prostranstvah funkcij, analiticheskih v oblastjah so sprjamljaemoj granicej [Bases in weighted spaces of functions analytic in domains with a rectifiable boundary] // Vestnik Brjanskogo gosudarstvennogo universiteta: Estestvennye i tochnye nauki. №4. Pp. 27-32.
6. Makhina N.M. (2017) Ocenki proizvodnyh analiticheskih i garmonicheskih funkcij v nekotoryh oblastjah kompleksnoj ploskosti [Estimates for derivatives of analytic and harmonic functions in some areas of the complex plane] // Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Serija: Fizika-matematika. № 2. Pp. 16-22.
7. Pommerenke Ch. (1978) On univalent functions, Bloch functions and VMOA [About univalent functions, functions of a Flea and VMOA]. // Math. An. V. 236. Pp. 199-208.
8. Privalov I.I. (1950) Granichnye svojstva analiticheskih funkcij [Boundary properties of analytic functions]. M.-L.: GITTL.
9. Tkachenko N.M. (2009) Vesovye Lp-ocenki analiticheskih i garmonicheskih funkcij v odnosvjaznyh oblastjah kompleksnoj ploskosti [Weighted Lp-estimates of analytic and harmonic functions in simply connected domains of the complex plane] // Dissertacija na soiskanie uchenoj stepeni kandidata fiziko-matematicheskih nauk / Saratovskij gosudarstvennyj universitet im. N.G. Chernyshevskogo. Brjansk.
10. Tkachenko N.M., Shamoyan F.A. (2009) Teorema Hardi-Leettlvuda i operator garmonicheskogo sopriazheniia v nekotory`kh classakh odnosviazny`kh oblastei` so spriamliaemoi` granitcei` [The Hardy-Littlewood theorem and the operator of harmonic conjugate in some classes of simply connected domains with rectifiable boundary] // J.F.A.Geom. V. 5. № 2. Pp. 192-210.
11. Shihvatov A.M. (1976) Ob Lp-prostranstvah funkcij, analiticheskih v oblasti s kusochno-analiticheskoj granicej [On Lp-spaces of functions analytic in a domain with a piecewise analytic boundary]. // Matematicheskie zametki. 1976. T. 20, № 4. Pp. 537-548.