УДК 532.685

ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ, ВЫЗЫВАЕМЫЕ ДВИЖЕНИЕМ ПОГРУЖЕННОГО В НЕЕ ПОРИСТОГО ШАРА

Надежда Александровна Храмова
ассистент
nadegdalem@mail.ru
г. Саранск

Мордовский государственный педагогический институт имени М. Е. Евсевьева

Аннотация. В данной статье определены течения вязкой жидкости, вызванные поступательно-колебательным движением погруженного в нее пористого шара. В приближении Стокса получены точные аналитические решения уравнения Навье-Стокса вне шара и нестационарного уравнения Бринкмана внутри шара. В уравнении Бринкмана учтено движение пористой среды. Показано, что в частных случаях из полученных результатов следуют известные ранее решения задач об обтекании непроницаемой твердой среды вязкой жидкостью. Неподвижные твердые тела (как сплошные, так и пористые), погруженные в вязкую жидкость, влияют на характер движения обтекающей их жидкости. Твердые тела, движущиеся в вязкой жидкости, неподвижной на бесконечности, вызывают течения этой жидкости. Изучение движения жидкостей, контактирующих с твердыми телами, представляет значительный интерес для исследования природных явлений, а также некоторых технологических процессов. В работе [2] при использовании модели фильтрации Бринкмана решена задача об обтекании вязкой жидкостью пористого шара, находящегося в другой пористой среде. В этой работе обращено внимание на то, что в модели фильтрации Бринкмана в качестве граничного условия на поверхности контакта пористой среды и непроницаемого твердого тела в общем случае вместо условия прилипания жидкости надо брать условие ее проскальзывания, аналогичное приведенному, например, в [1]. В работе [3] при использовании нестационарного уравнения Бринкмана определено движение вязкой жидкости, вызванное вращательно-колебательным движением погруженного в нее пористого шара. В статье рассматриваются течения вязкой жидкости, неподвижной на бесконечности, вызванные поступательно-колебательным движением пористого шара, погруженного в эту жидкость.

Ключевые слова: вязкая жидкость, пористый шар, поступательно-колебательное движение, уравнение Бринкмана.

Пористая среда далее предполагается недеформируемой, однородной и изотропной. Предполагается также, что пористая среда имеет достаточно большую пористость (близкую к единице) и высокую проницаемость. Такими свойствами могут обладать, например, волокнистые, а также сильно вспененные материалы, у которых коэффициент проницаемости K достигает значений 10^{-4} см^2. При таких свойствах пористой матрицы в ней могут возникать колебательные движения жидкости, в которых скорость жидкости будет заметно отличаться от скорости матрицы. Скорость шара радиуса R запишем как функцию от времени t^* в виде $\mathbf{v}^* = \mathbf{v}_0 \exp(-i\omega t^*)$, где $\mathbf{v}_0$ – действительный вектор, ω – частота колебаний. Знаком «*» здесь и далее обозначаются размерные переменные (но не размерные параметры), чтобы отличать их от соответствующих безразмерных, обозначаемых теми же буквами. В окончательных результатах вычислений везде подразумеваются действительные части соответствующих комплексных выражений.

Течения жидкости внутри и вне пористого шара рассматриваются в неподвижной декартовой системе координат x^*, y^*, z^*, начало которой в данный момент времени совпадает с центром шара. Ось z^* направлена параллельно вектору $\mathbf{v}_0 = \mathrm{v}_0\,\mathbf{e}$ $(\mathrm{v}_0 > 0, |\mathbf{e}| = 1)$. Для решения задачи вводим сферическую систему координат r^*, θ, φ с базисом $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_\varphi$, полярная ось которой совмещена с осью z^*. Угол θ отсчитывается от оси z^*. Исходя, из осевой симметрии задачи предполагаем, что от угла φ величины не зависят. Величины, относящиеся к пористой среде и окружающей свободной жидкости, обозначаются в необходимых случаях индексами 1 и 2 соответственно.

Систему уравнений нестационарного движения жидкости в пористой среде (модель Бринкмана) запишем в виде

$$\frac{1}{\Gamma}\frac{\partial \mathbf{u}_1^*}{\partial t^*} = -\frac{1}{\rho}\nabla^* p_1^* + \nu'\nabla^{*2}\mathbf{u}_1^* - \frac{\nu}{K}(\mathbf{u}_1^* - \mathbf{u}^*),\ \nabla^*\cdot\mathbf{u}_1^* = 0 \qquad (1)$$

Здесь ρ – плотность жидкости, Γ = const – пористость, $\mathbf{u}_1^*$ – скорость фильтрации ($\mathbf{u}_1^* = \Gamma\mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_1^*$ – средняя по объему пор скорость жидкости), p_1^* – среднее по объему пор давление, $\nu' = \eta'/\rho$, η' – эффективная вязкость жидкости в порах, $\nu = \eta/\rho$, η – вязкость свободной жидкости, $\mathbf{u}^* = \Gamma\mathbf{v}^*$. В первом уравнении (1) добавлено слагаемое, учитывающее движение пористой среды. Модель Бринкмана применима для течений в пористых средах при достаточно больших значениях пористости. Предполагая, что пористость близка к 1, далее полагаем $\eta' = \eta$.

Уравнения нестационарного движения свободной жидкости вне шара запишем в приближении Стокса

$$\frac{\partial \mathbf{u}_2^*}{\partial t^*} = -\frac{1}{\rho}\nabla^* p_2^* + \nu\nabla^*\mathbf{u}_2^*,\ \nabla^*\cdot\mathbf{u}_2^* = 0 \qquad (2)$$

Граничные условия

при $r^* = R$: $u_{1r}^* = u_{2r}^*$, $u_{1\theta}^* = u_{2\theta}^*$, $p_1^* = p_2^*$

$$\Lambda\left(\frac{\partial u_{1\theta}^*}{\partial r^*} - \frac{\partial u_{2\theta}^*}{\partial r^*}\right) = u_{1\theta}^* - u_\theta^*$$

при $r^* \to \infty$: $\lim\limits_{r\to\infty}\mathbf{u}_2^* = 0$

Здесь Λ – постоянная с размерностью длины.

Введем безразмерные переменные: $\mathbf{r} = \mathbf{r}^*/R$, $t = \omega t^*$, $\mathbf{u} = \mathbf{e}\,\Gamma\exp(-it)$, $\mathbf{u}_j = \mathbf{u}_j^*/\mathrm{v}_0$, $p_j = p_j^*(R/\eta\mathrm{v}_0)$ $(j = 1, 2)$.

Уравнения (1), (2) в безразмерном виде:

$$\frac{K\omega}{\nu\Gamma}\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} = -\frac{K}{R^2}\left(\nabla p_1 + \nabla^2\mathbf{u}_1\right) - \left(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}\right),\ \nabla\cdot\mathbf{u}_1 = 0 \qquad (3)$$

$$\frac{\omega R^2}{\nu}\frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial t} = -\nabla p_2 + \nabla^2\mathbf{u}_2^*,\quad \nabla\cdot\mathbf{u}_2 = 0$$

Безразмерные граничные условия к уравнениям (3):

при $r = 1$: $u_{1r} = u_{2r}$, $u_{1\theta} = u_{2\theta}$, $p_1 = p_2$ (4)

$$\lambda\left(\frac{\partial u_{1\theta}}{\partial r} - \frac{\partial u_{2\theta}}{\partial r}\right) = u_{1\theta} - u_{\theta}, \quad \lambda = \Lambda / R$$

при $r \to \infty$: $\mathbf{u}_2 \to 0$

В частности, при $K / R^2 \to 0$, $K\omega / \nu\Gamma \to 0$ из первого уравнения (3) в пределе следует $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}$, т. е. жидкость движется как целое вместе с пористой матрицей.

Применяя операцию rot к уравнениям (3), находим

$$\frac{K\omega}{\nu\Gamma}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\mathbf{u}_1 = \frac{K}{R^2}\nabla^2(\nabla\times\mathbf{u}_1) - \nabla\times\mathbf{u}_1 \tag{5}$$

$$\frac{\omega R^2}{\nu}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\mathbf{u}_2 = \nabla^2(\nabla\times\mathbf{u}_2)$$

Скорость фильтрации $\mathbf{u}_1 = u_{1r}\mathbf{e}_r + u_{1\theta}\mathbf{e}_\theta$ внутри шара, ищем в виде

$$\mathbf{u}_1 = e^{-it}\nabla\times[\nabla\times f_1(r)\,\mathbf{e}]$$

где $f_1(r)$ – функция только от r. Подставляя $\mathbf{u}_1$ в первое уравнение (5), находим

$$\Delta^2 f_1 + m_1^2 \Delta f_1 = C_0 \tag{6}$$

Здесь $m_1^2 = \frac{2}{\Gamma}\left[i\left(\frac{R}{\delta_2}\right)^2 - \left(\frac{R}{\delta_1}\right)^2\right]$, $\delta_1 = \sqrt{\frac{2K}{\Gamma}}$, $\delta_2 = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}$

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dr}}\left(r^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dr}}\right), \quad C_0 = \mathrm{const}$$

Решая уравнение (6), имеем:

$$\frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}r} = A_1\frac{\exp im_1 r}{r^2}\left(r - \frac{1}{im_1}\right) + B_1\frac{\exp(-im_1 r)}{r^2}\left(r + \frac{1}{im_1}\right) + \frac{C_0 r}{3m_1^2} + \frac{C_1}{r^2}$$

$$m_1 = \frac{R}{\sqrt{\Gamma}}\left(\frac{1}{\delta} + \frac{i\,\delta}{\delta_2^2}\right), \quad \frac{1}{\delta^2} = -\frac{1}{\delta_1^2} + \sqrt{\frac{1}{\delta_1^4} + \frac{1}{\delta_2^4}}$$

Здесь произвольные постоянные, определяются из граничных условий. Чтобы решение было конечным при $r \to 0$, следует положить $A_1 = B_1$, $C_1 = 0$. При этом саму функцию f_1 нет необходимости определять, так как, $\mathbf{u}_1$ выражается только через производные f_1', f_1'':

$$\mathbf{u}_1 = e^{-it}\left[\left(-\frac{2\,\mathbf{e}_r}{r}\cos\theta + \frac{\mathbf{e}_\theta}{r}\sin\theta\right)\frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}r} + \mathbf{e}_\theta\sin\theta\frac{\mathrm{d}^2 f_1}{\mathrm{d}r^2}\right]$$

Скорость вне шара ищется в виде $\mathbf{u}_2 = e^{-it}\nabla\times[\nabla\times f_2(r)\,\mathbf{e}]$. Аналогично изложенному выше, находим решение, обращающееся в нуль на бесконечности

$$\frac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}r} = A_2\frac{\exp im_2 r}{r^2}\left(r - \frac{1}{im_2}\right) + \frac{C_2}{r^2}, \quad m_2 = \frac{R}{\delta_2}(1+i)$$

Давления p_1 и p_2 выражаются через скорости $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ с помощью (3). Давление p_2 на бесконечности принимается равным нулю. Окончательно, выражения для скоростей и давлений внутри и вне шара принимают вид:

$$u_{1r} = -2\, e^{-it} \cos\, \theta \left[\frac{2A_1}{r^2}\left(\cos m_1 r - \frac{1}{m_1 r}\sin m_1 r\right) + \frac{C_0}{3m_1^2}\right]$$

$$u_{1\theta} = -2\, e^{-it} \sin\, \theta \left[\frac{A_1}{r^2}\left(\frac{m_1^2 r^2 - 1}{m_1 r}\sin m_1 r + \cos m_1 r\right) - \frac{C_0}{3m_1^2}\right]$$

$$u_{2r} = -2\, e^{-it} \cos\, \theta \left[A_2\, \frac{\exp i m_2 r}{r^2}\left(1 - \frac{1}{i m_2 r}\right) + \frac{C_2}{r^3}\right]$$

$$u_{2\theta} = e^{-it} \sin\, \theta \left[A_2\, \frac{\exp i m_2 r}{r^2}\left(i m_2 r + \frac{1}{i m_2 r} - 1\right) - \frac{C_2}{r^3}\right]$$

$$p_1 = e^{-it} m_2^2 C_2 r \cos\theta\,, \quad p_2 = e^{-it} m_2^2 C_2 \frac{\cos\theta}{r^2}\,, \quad m_2^2 = 2i\left(\frac{R}{\delta_2}\right)^2$$

$$A_1 = \frac{i m_1\left[4B - 3\Gamma + 2\Gamma m_1^2 + 3i\,\Gamma m_2 + \Gamma m_2^2 + \lambda\left(6iBm_2 - 6B\right)\right]}{2\left(N \sin m_1 - i m_1 M \cos m_1\right)}$$

$$A_2 = \frac{F \sin m_1 - 3m_1 E \cos m_1}{m_2 \exp i m_2 \left(N \sin m_1 - i m_1 M \cos m_1\right)}$$

$$C_0 = 3B - \frac{3}{2} m_2^2 C_2\,, \quad B = \left(\frac{R}{\delta_1}\right)^2$$

$$C_2 = \frac{2\left(Q \sin m_1 + m_1 P \cos m_1\right)}{m_2^2\left(N \sin m_1 - i m_1 M \cos m_1\right)}$$

$$E = \Gamma m_2^2 + 2\lambda\, B\, m_1^2 - 2B$$

$$F = 3\Gamma m_2^2 + 2B\, m_1^2 - \Gamma m_1^2 m_2^2 - 2\Gamma m_1^4 - 6B + 6\lambda\, B\, m_1^2$$

$$M = 3 - 3i\, m_2 - 3m_2^2 - 2\, m_1^2 + \lambda\left(2m_1^4 + 3m_2^2 - 3i m_2^3 - 3m_1^2 + 3i m_1^2 m_2 + m_1^2 m_2^2\right)$$

$$N = 2i\, m_1^4 + 3i + 3\, m_2 - 3i\, m_2^2 - 3i\, m_1^2 - m_1^2 m_2 + i\, m_1^2 m_2^2 +$$
$$+ \lambda\left(3i\, m_2^2 - 2m_1^4 m_2 + 3m_2^3 - 3i\, m_1^2 - 3m_1^2 m_2 - m_1^2 m_2^3\right)$$

$$P = 3iB\, m_2^2 - 3iB - 3B\, m_2 + i\,\Gamma\, m_1^2 m_2^2 +$$
$$+ \lambda\left(3iB\, m_1^2 - 3iB\, m_2^2 - 3Bm_2^3 + 3Bm_1^2 m_2 - iB\, m_1^2 m_2^2\right)$$

$$Q = i\,\Gamma m_1^4 + \Gamma m_1^4 m_2 + 3iB + 3B\, m_2 - 3iB\, m_2^2 - iB\, m_1^2 - Bm_1^2 m_2 -$$
$$- i\,\Gamma\, m_1^2 m_2^2 + iB\, m_1^2 m_2^2 + \lambda\left(3iBm_2^2 + 3Bm_2^3 - 3iB\, m_1^2 - 3B\, m_1^2 m_2 - B\, m_1^2 m_2^3\right)$$

Таким образом, решена задача о течениях вязкой жидкости, вызываемых поступательно-колебательным движением погруженного в нее пористого шара. Определены поля скоростей и скоростей фильтрации вне и внутри пористой среды.

Список литературы

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика М.: Физматлит, 2006. 736 с.
2. Леонтьев Н.Е. Течения в пористой среде вокруг цилиндра и сферы в рамках уравнения Бринкмана с граничным условием Навье // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2014. № 4. С. 107–112.
3. Тактаров Н.Г. Движение вязкой жидкости, вызванное вращательно-колебательным движением пористого шара // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2016. № 5. С. 133–138.

VISCOUS FLUID FLOWS INDUCED BY MOTION OF A POROUS SPHERE SUBMERGED IN THE FLUID

N.A. Khramova
Assistant
nadegdalem@mail.ru
Sarahnsk

Mordovia State Pedagogical Institute named after M.E. Evsevyev

Abstract. In this article the flows of viscous fluid flows induced by translational-oscillatory motion of a porous sphere submerged in the fluid. Exact analytical solutions of the Navier-Stokes equation outside the sphere and the unsteady Brinkman equation inside the sphere are obtained in the Stokes approximation. The Brinkman equation takes into account the movement of the porous medium. The figures give examples of current lines for some values of the parameters under consideration. It is shown that in particular cases the results are followed by the previously known solutions to the problems of the flow around an impenetrable solid medium with a viscous liquid. Fixed solids (both solid and porous), immersed in a viscous liquid, affect the nature of the movement of the fluid flowing around them. A rigid body moving in a viscous fluid is motionless at infinity, causing the flow of the liquid. The study of the motion of liquids in contact with solids is of considerable interest for the study of natural phenomena, as well as some technological processes. In [2] using Brinkman filtration model, the problem of viscous liquid flow around a porous sphere in another porous medium is solved. In this paper, we draw attention to the fact that in the Brinkman filtration model, as a boundary condition on the contact surface of a porous medium and an impermeable solid, in General, instead of the liquid adhesion condition, it is necessary to take a slip condition similar to that given, for example, in [1]. In [3] when using non-stationary equations the Brinkman determined the motion of viscous fluid caused by rotational-oscillatory motion of a porous sphere submerged in the fluid. The article deals with the flows of a viscous liquid, stationary at infinity, caused by the rotational-oscillatory motion of a porous sphere submerged in the fluid.

Keywords: viscous fluid, porous sphere, translational-oscillatory motion, Brinkman equation.

References

1. Landay L. D. Lifshits E. M. Gidrodinamika [Hydrodynamics]. Moscow: Fiz-mat-lit, 2006, 736 p.
2. Leont'ev N. E. Izvestiya RAN. Mekhanika zhidkosti i gasa [Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of liquid and gas]. 2014, no. 2, pp. 107–112.
3. Taktarov N. G. Izvestiya RAN. Mekhanika zhidkosti i gasa [Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of liquid and gas]. 2016, no. 5, pp. 133–138.