УДК 517.934

ТЕОРЕМА О ЛОКАЛЬНОЙ НУЛЬ-УПРАВЛЯЕМОСТИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА УПРАВЛЕНИЕ

Манитджайсвал Кумар Чаудхари
студент
manit2009@yandex.ru
г. Москва
Российский Университет Дружбы Народов

Александр Михайлович Котюков
студент
amkotyukov@mail.ru
г. Москва
Российский Университет Дружбы Народов

Аннотация. Настоящая работа посвящена изучению локальной нуль-управляемости линейной системы, получению необходимого и достаточного условий локальной нуль-управляемости этой системы.

Ключевые слова: проблема управляемости, локальная нуль-управляемость, почти периодические функции, вещественные и комплексные собственные векторы.

Рассматривается управляемая автономная линейная система, движение которой на интервале времени $0 \le t \le T < \infty$, описывается n-мерной системой

$$\dot{x} = Ax + \varphi(u), \qquad (1)$$

где $x(t) \in R^n$, x - фазовый вектор системы, A – вещественная матрица $(n \times n)$, $u(t)$ – вектор $(r \times 1)$ управляющих воздействий, $u \in \Omega \subset R^r$, где в Ω $\exists u_0 \in \Omega : \varphi(u_0) = 0$; $\varphi(u)$: $R^r \to R^n$ – выпуклая суммируемая функция.

Пусть S – множество нуль-управляемости системы (1), т.е. множество точек $x_0 \in R^n$, из которых можно попасть в нуль за конечное время с удовлетворением условий на управление. Система локально нуль-управляема, если $0 \in int\, S$.

Теорема. *Для того, чтобы система (1) была локально нуль-управляемой, необходимо и достаточно, чтобы 1) $\nexists$ вещественного собственного вектора сопряженной к матрице A матрицы A^*, опорного к множеству $\{\varphi(u), u \in \Omega\}$, и 2) $\nexists$ комплексного собственного вектора матрицы A^*, ортогонального к тому же множеству.*

Доказательство. Необходимость. Докажем от противного. Для этого покажем, что следующие два случая невозможны:

1) $\exists y$(*вещественный* собственный вектор матрицы A^*), опорный к $\{\varphi(u), u \in \Omega\}$: $(y, \varphi(u)) \le 0 \ \forall u \in \Omega$;

2) $\exists y$(*комплексный* собственный вектор матрицы A^*), ортогональный к $\{\varphi(u), u \in \Omega\}$: $(y, \varphi(u)) = 0 \ \forall u \in \Omega$.

Скалярное произведение:

$$(y, e^{-A\tau}\varphi(u)) = \left(e^{-A^*\tau}y, \varphi(u)\right) = e^{-\lambda\tau}\,(y, \varphi(u)) \begin{cases} \le 0 \text{ (случай 1)} \\ = 0 \text{ (случай 2)} \end{cases};$$

Так как

$$S = \left\{ x_0 : x_0 = -\int_0^T e^{-A\tau}\varphi\big(u(\tau)\big)d\tau\,, 0 < T < \infty, u \in \Omega \right\},$$

то в случае 1)

$$(y, x_0) \geq 0 \ \ \forall x_0 \in S, \tag{2a}$$

а в случае 2)

$$(Re\,y, x_0) \geq 0 \ \ \forall x_0 \in S. \tag{2b}$$

А так как $Re\,y = \frac{1}{2}\,(y + \bar{y})$, где $\bar{y}$ – собственный вектор матрицы A^* при $\bar{\lambda} \neq \lambda$, и так как y и $\bar{y}$ линейно независимы, то $Re\,y \neq 0$.

Из (2a) и (2b) следует, что 0 – граничная точка S, что противоречит условию локальной нуль-управляемости.

Необходимость доказана.

Достаточность. Сначала докажем, что S – выпуклое. Пусть x_1 и $x_2 \in S$. Тогда

$$x_1 = -\int_0^T e^{-A\tau}\varphi\big(u_1(\tau)\big)d\tau\,;$$

$$x_2 = -\int_0^T e^{-A\tau}\varphi\big(u_2(\tau)\big)d\tau.$$

Пусть $\lambda \in [0,1]$. Нужно проверить, принадлежит ли линейная комбинация x_1 и x_2 множеству нуль управляемости, т.е.

$$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \overset{?}{\in} S;$$

$$\lambda x_1 = -\int_0^T \lambda e^{-A\tau}\varphi\big(u_1(\tau)\big)d\tau\,;$$

$$(1-\lambda)x_2 = -\int_0^T (1-\lambda)e^{-A\tau}\varphi\big(u_2(\tau)\big)d\tau\,;$$

$$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 = -\int_0^T \lambda e^{-A\tau}\varphi\big(u_1(\tau)\big)d\tau - \int_0^T (1-\lambda)e^{-A\tau}\varphi\big(u_2(\tau)\big)d\tau =$$

$$= -\int_0^T e^{-A\tau}\big[\lambda\varphi\big(u_1(\tau)\big) + (1-\lambda)\varphi\big(u_2(\tau)\big)\big]d\tau.$$

Так как $\varphi(u_1), \varphi(u_2)$ – выпуклые функции, то их линейная комбинация $\lambda\varphi(u_1) + (1-\lambda)\varphi(u_2)$ будет тоже выпуклой функцией, поэтому

$$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in S.$$

В силу произвольного выбора x_1, x_2 S – выпуклое множество.

Докажем, что S содержит нуль в качестве внутренней точки.

Для этого докажем, что $\forall \eta \neq 0\ \exists\, T$ и суммируемая функция $u(\tau)$ на $[0, T]$: $(\eta, x_0) < 0$,

$$x_0 = -\int_0^T e^{-A\tau}\varphi\big(u(\tau)\big)d\tau.$$

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ – вещественные собственные значения матрицы A^*, $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \dots, \lambda_{p+q}$ – комплексные собственные значения матрицы A^* с $Im\,\lambda > 0$, $\lambda_{p+q+1}, \lambda_{p+q+2}, \dots, \lambda_{p+2q}$ – сопряженные к первым $p+q$ собственные значения матрицы A^* собственные значения.

Так как R^n – прямая сумма корневых подпространств A^*, то

$$\eta = \sum_{i=1}^{p+2q} \eta_i,$$

где η_i – корневой вектор, отвечающий λ_i.

Пусть I – подмножество индексов i ($I \subset \{1,2,\dots,p+2q\}$) таких, что $\eta_i \neq 0$.

Тогда

$$\eta = \sum_{i\in I} \eta_i.$$

Рассмотрим

$$(\eta, e^{-A\tau}\varphi(u)) = \big(e^{-A^*\tau}\eta, \varphi(u)\big) = \sum_{i\in I}\big(e^{-A^*\tau}\eta_i, \varphi(u)\big).$$

Далее, пусть η_i – корневой вектор A^* кратности k_i+1.

$$e^{-A^*\tau} = 1 - A^*\tau + \frac{(-A^*\tau)^2}{2!} + \frac{(-A^*\tau)^3}{3!} + \dots =$$

$$= 1 - A^*\tau + \frac{(A^*\tau)^2}{2!} - \frac{(A^*\tau)^3}{3!} + \dots + \frac{(-1)^{k_i}(A^*\tau)^{k_i}}{k_i!} + \frac{(-1)^{k_i+1}(A^*\tau)^{k_i+1}}{(k_i+1)!} + \cdots;$$

$$e^{-A^*\tau}\eta_i = \eta_i - A^*\tau\eta_i + \frac{(A^*\tau)^2}{2!}\eta_i - \frac{(A^*\tau)^3}{3!}\eta_i + \dots + \frac{(-1)^{k_i}(A^*\tau)^{k_i}}{k_i!}\eta_i +$$
$$+ \frac{(-1)^{k_i+1}(A^*\tau)^{k_i+1}}{(k_i+1)!}\eta_i + \cdots;$$

$$e^{-[A^*-\lambda_i E]\tau}\eta_i = \eta_i - [A^*-\lambda_i E]\tau\eta_i + \frac{([A^*-\lambda_i E]\tau)^2}{2!}\eta_i - \frac{([A^*-\lambda_i E]\tau)^3}{3!}\eta_i +$$
$$+ \dots + \frac{(-1)^{k_i}}{k_i!}([A^*-\lambda_i E]\tau)^{k_i}\eta_i + \frac{(-1)^{k_i+1}}{(k_i+1)!}([A^*-\lambda_i E]\tau)^{k_i+1}\eta_i + \cdots;$$

Так как $([A^*-\lambda_i E]\tau)^{k_i+1}\eta_i = (\tau)^{k_i+1}(A^*-\lambda_i E)^{k_i+1}\eta_i$, а $(A^*-\lambda_i E)^{k_i+1}\eta_i = 0$ (по определению корневого вектора кратности k_i+1), то все члены

$\frac{(-1)^{k_i+1}}{(k_i+1)!}([A^*-\lambda_i E]\tau)^{k_i+1}\eta_i + \dots = 0.$

Поэтому,

$$e^{-[A^*-\lambda_i E]\tau}\eta_i = \eta_i - [A^*-\lambda_i E]\tau\eta_i + \frac{([A^*-\lambda_i E]\tau)^2}{2!}\eta_i - \frac{([A^*-\lambda_i E]\tau)^3}{3!}\eta_i +$$
$$+ \dots + \frac{(-1)^{k_i}}{k_i!}([A^*-\lambda_i E]\tau)^{k_i}\eta_i;$$

$$e^{-A^*\tau}e^{\lambda_i\tau}\eta_i = \eta_i - [A^*-\lambda_i E]\tau\eta_i + \frac{([A^*-\lambda_i E]\tau)^2}{2!}\eta_i - \frac{([A^*-\lambda_i E]\tau)^3}{3!}\eta_i +$$

$$+\cdots+\frac{(-1)^{k_i}}{k_i!}([A^*-\lambda_i E]\tau)^{k_i}\eta_i;$$

Отсюда:

$$e^{-A^*\tau}\eta_i=e^{-\lambda_i\tau}(\eta_i-[A^*-\lambda_i E]\tau\eta_i+\frac{([A^*-\lambda_i E]\tau)^2}{2!}\eta_i-\frac{([A^*-\lambda_i E]\tau)^3}{3!}\eta_i+$$
$$+\cdots+\frac{(-1)^{k_i}}{k_i!}([A^*-\lambda_i E]\tau)^{k_i}\eta_i).$$

Обозначим вектор

$$y_i=\frac{(-1)^{k_i}}{k_i!}(A^*-\lambda_i E)^{k_i}\eta_i\,,\qquad i\in I;$$

$y_i\neq 0$ и является собственным вектором для A^*.

При достаточно больших τ:

$$(\eta,e^{-A\tau}\varphi(u))=\sum_{i\in I}e^{-\lambda_i\tau}(\tau^{k_i}y_i+g_i(\tau),\varphi(u)),$$

где

$$g_i(\tau)=o(\tau^{k_i})=\sum_{j=0}^{k_i-1}\frac{(-\tau)^j}{j!}(A^*-\lambda_i E)^j\eta_i.$$

Пусть

$$I_1=I\cap\{1,2,\dots,p\};$$
$$I_2=I\cap\{p+1,\dots,p+q\}.$$

Так как A и η вещественны, то мы можем использовать соотношения:

$$\eta_{p+q+j}=\bar{\eta}_{p+j},$$
$$y_{p+q+j}=\bar{y}_{p+j}.$$

При больших τ

$$(\eta,e^{-A\tau}\varphi(u)=\sigma_1(\tau,u)+\sigma_2(\tau,u)=\sum_{i\in I_1}e^{-\lambda_i\tau}\Big(\tau^{k_i}y_i+g_i(\tau),\varphi(u)\Big)+$$
$$+2Re\left\{\sum_{i\in I_2}e^{-\lambda_i\tau}(\tau^{k_i}y_i+g_i(\tau),\varphi(u))\right\}.$$

Могут быть 2 случая:

$$1)I_1=\emptyset;$$
$$2)I_1\neq\emptyset.$$

В случае 1), так как $I_2\neq\emptyset$, то при больших τ

$$(\eta,e^{-A\tau}\varphi(u)=\sigma_2(\tau,u).$$

Пусть

$$R=\min_{i\in I_2}Re\lambda_i,$$

И

$$I_3=\{i:i\in I_2,Re\lambda_i=R\};$$
$$k=\max_{i\in I_3}k_i;$$
$$I_4=\{i:i\in I_3,k_i=k\}.$$

Пусть $v\in I_4$.

y_v не является ортогональным к множеству $\{\varphi(u),u\in\Omega\}$, поэтому $\exists$ такой постоянный вектор $u_v\in\Omega$, что

$$(y_v,\varphi(u_v))\neq 0.$$

Если $u = u_v$, тогда

$$\sigma_2(\tau, u_v) = e^{-R\tau}\tau^k\theta(\tau, u_v) + \mu(\tau),$$

где

$$\theta(\tau, u_v) = 2Re\left\{\sum_{j\in I_4} e^{-i\,Im\,\lambda_j\tau}(y_j\,, \varphi(u_v))\right\},$$

$$\mu(\tau) = o(e^{-R\tau}\tau^k).$$

Так как

$$\theta(\tau, u_v) = 2\sum_{j\in I_4}\left[Re\,\left(y_j, \varphi(u_v)\right)\cos Im\,\lambda_j\tau + Im\,\left(y_j, \varphi(u_v)\right)\sin Im\,\lambda_j\tau\right],$$

где все синусы и косинусы линейно независимы, имеют среднее значение нуль и при $j = v$

$$|Re(y_v, \varphi(u_v))| + |Im(y_v, \varphi(u_v))| > 0,$$

то мы можем применить следующую лемму для одноточечного множества из [1]:

Лемма. *Пусть* $\{f_i(\tau)\}_{i=1}^{p}$– *линейно независимые почти периодические функции со средними значениями, равными нулю, и множество*

$$\Sigma = \left\{f(\tau)\colon f(\tau) = \sum_{i=1}^{p}\alpha_i f_i(\tau)\,, 0 < C_1 \le \sum_{i=1}^{p}|\alpha_i| \le C_2\right\}.$$

Тогда $\exists$ *числа* $\delta > 0$, $L > 0$, *и* $\forall f(\tau) \in \Sigma$ $\exists$ *такая последовательность* $\{\tau_N(\alpha)\}_{N=1}^{\infty}$, *что* $f\left(\tau_N(\alpha)\right) \ge \delta(1 \le N < \infty)$, *где* $4NL \le \tau_N(\alpha) \le (4N+2)L$.

По этой лемме $\exists\delta > 0$ и $\exists\{\tau_N\}_{N=1}^{\infty}$ такие, что

$$\theta(\tau_N, u_v) \ge 2\delta \quad (1 \le N < \infty).$$

Поскольку $\mu(\tau) = o(e^{-R\tau}\tau^k)$, то $\exists N_0$ такое, что

$$|\mu(\tau)| \le e^{-R\tau}\tau^k\delta \quad \left(\forall\tau \ge \tau_{N_0}\right).$$

Пусть $\tau_0 = \tau_{N_0}$;

$$(\eta, e^{-A\tau_0}\varphi(u_v)) = \sigma_2(\tau_0, u_v) > 0.$$

Для случая 2):

Пусть $\lambda_v = \min\limits_{i\in I_1}\lambda_i$. Тогда (по условию) $\exists u_v \in \Omega$ такое, что $(y_v, \varphi(u_v)) > 0$. Тогда, при $u = u_v$ и при больших τ

$$\sigma_1(\tau, u_v) = e^{-\lambda_v\tau}\tau^{k_v}(y_v, \varphi(u_v)) + o\left(e^{-\lambda_v\tau}\tau^{k_v}\right).$$

Поэтому $\exists D > 0 :\ \sigma_1(\tau, u_v) > 0\ (\forall\tau \ge D)$.

Если при $u = u_v$ $\sigma_2(\tau, u_v) \equiv 0$, то, взяв $\tau_0 = D$

$$(\eta, e^{-A\tau_0}\varphi(u_v)) > 0; \tag{3}$$

Иначе, выделяя главные слагаемые, почти как и в случае 1), представим σ_2:

$$\sigma_2(\tau, u_v) = e^{\beta\tau}\tau^{\gamma}\sum_{m=1}^{M}(a_m^1\cos\delta_m\tau + a_m^2\sin\delta_m\tau) + \mu(\tau)$$

или

$$\sigma_2(\tau, u_v) = e^{\beta\tau}\tau^{\gamma}\sum_{m=1}^{M}(a_m^1\cos\delta_m\tau + a_m^2\sin\delta_m\tau) + o\left(e^{\beta\tau}\tau^{\gamma}\right).$$

Опять применим лемму.

По лемме $\exists\{\tau_N\}_{N=1}^{\infty} :\ \sigma_2(\tau_N, u_v) > 0$.*

Тогда, взяв $\tau_0 = \tau_{N_0} \ge D$ и $N_0 \ge N_1$

$$(\eta, e^{-A\tau_0}\varphi(u_v)) = \sigma_1(\tau_0, u_v) + \sigma_2(\tau_0, u_v) > 0.$$

Таким образом, (3) имеет место в обоих случаях.

Если выбрать управление при достаточно малом γ

$$u(\tau) = \begin{cases} u_0, & 0 \le \tau \le \tau_0, \\ u_v, & \tau_0 \le \tau \le \tau_0 + \gamma = T, \end{cases}$$

то получим

$$(\eta, x_0) = -\int_0^T e^{-A\tau}\varphi\big(u(\tau)\big)d\tau < 0.$$

Достаточность доказана.

Список литературы

1. Коробов В.И., Маринич А.П., Подольский Е.Н. Управляемость линейных автономных систем при наличии ограничений на управление. Дифференциальные уравнения, 1975, том 11, № 11, 1967-1979.
2. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 576 с.
3. Демидович Б.П. Лекции по математический теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
4. Brammer R.F. Siam J. Control, 10, №2, 1972.

LOCAL ZERO-CONTROLLABILITY THEOREM FOR LINEAR AUTONOMOUS SYSTEM WITH CONTROL RESTRICTIONS

M.K. Chaudhary
student
manit2009@yandex.ru
Moscow
Rudn University

A.M. Kotyukov
student
amkotyukov@mail.ru
Moscow
Rudn University

Abstract. The present paper is devoted to linear autonomous system local zero-controllability research and obtaining necessary and sufficient conditions for zero-controllability of this system.

Keywords: problem of controllability, local zero-controllability, almost periodic functions, real and complex eigenvectors

References

1. Korobov V.I., Marinich A.P., Podolskiy E.N. Uprablyaemost' lineynih avtonomnih system pri nalychii ogranicheniy na upravlenie [Linear autonomous system controllability with control restrictions]. Differential equations, 1975. Vol. 11, n. 11, 1967-1979.
2. Lee E.B., Marcus L. (1972) Osnovy` teorii optimal`nogo upravleniy`a [Foundations of Optimal Control Theory]. M.: Nauka, 1972. 576 p.
3. Demidovich B.P., Lekcii po matematicheskoi teorii ustoichivosti [Lectures on mathematical theory of stability]. Nauka, 1967. 472 p.
4. Brammer R.F. Siam J. Control, 10, №2, 1972.