УДК 378

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Дмитрий Федорович Воскобойник
магистрант
anaxered@gmail.com
г. Елец

Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина

Аннотация. В работе изучается граничная задача для линейной системы дифференциальных уравнений, записанная в виде дифференциально-операторного уравнения $aD_tu(t)+bBu(t)=f(t)$ с граничными условиями по переменной t. Условия определяют название рассматриваемой задачи. В нашем случае – это условия Дирихле. Цель исследования состоит в изучении спектральных характеристик дифференциальных операторов, порождённых задачей Дирихле для линейных систем дифференциальных уравнений в частных производных, рассматриваемых в ограниченной области конечномерного евклидова пространства.

Ключевые слова: граничные задачи, условия Дирихле, спектр оператора, системы дифференциальных уравнений в частных производных.

Работа посвящена исследованию спектральных характеристик ряда граничных задач для некоторых линейных систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка по выделенной переменной t, рассматриваемых в ограниченной области конечномерного евклидова пространства. Изучаемые системы уравнений удобно записать в виде так называемого операторного или дифференциально - операторного уравнения

$$L(D_t,B)u \overset{\text{def}}{=} aD_tu + bBu = f, \qquad (1)$$

Здесь a, b - матрицы (2 × 2); D_t - операция дифференцирования по переменной t. Оператор B действует в некотором сепарабельном комплексном гильбертовом пространстве H_x, и удовлетворяет определённым требованиям, формулируемым в терминах спектральной теории операторов. Присоединив к уравнению, изучаемому на конечном отрезке

$V_t \equiv [T_1,T_2], -\infty < T_1 \le 0 \le T_2 < +\infty$, значений переменного t, систему условий

$$\Gamma_t u = 0, \qquad (2)$$

описывающую поведение функции в точках T_1, T_2, получим граничную задачу, под решением которой мы понимаем сильное решение. Определив (обобщенное) решение граничной задачи (1), (2), получим замкнутый оператор L, действующий в соответствующим образом подобранном функциональном пространстве H. Под спектральными характеристиками граничной задачи (1), (2) мы понимаем спектральные свойства оператора L:H⟶H [1, стр. 92]. В дальнейшем, как условия разрешимости, так и свойства решений изучаемой граничной задачи описываются или в терминах свойств резольвенты, или в терминах свойств системы собственных вектор - функций замкнутого оператора L, сопоставляемого задаче.

Спектральная теория операторов, порожденных краевыми задачами как для уравнений, так и для систем уравнений в частных производных. начала развиваться сравнительно недавно в ряде работ российских и зарубежных математиков. Изучались при этом как асимптотическое поведение собственных значений и расположение спектра на комплексной плоскости, так и “базисные“ свойства систем, составленных из собственных элементов. Исследование структуры спектра и возможности разложения решений по наборам собственных элементов является в настоящее время одним из основных направлений при изучении вопросов спектральной теории краевых задач для систем дифференциальных уравнений в частных производным [3, стр. 680]. Несмотря на значительный интерес к указанной проблематике, до сих пор не разработан метод, позволяющий ответить на возникающие вопросы даже для простейших систем уравнений при числе переменных больше двух; общие вопросы спектральной теории граничных задач для линейных систем дифференциальных уравнений в частных производных также изучены недостаточно полно. В большей степени это относится к системам, не относящихся к классическим типам: эллиптическим, гиперболическим, параболическим. Учитывая важность свойств граничных задач для неклассических систем линейных уравнений, изучение спектральных характеристик последних весьма актуально.

Теория граничных задач для систем уравнений в частных производных, имея разнообразные применения, базируется на многочисленных методах (асимптотический, вариационный, проекционный, численные методы, методы интегральных уравнений, функциональные и другие) и формах (последовательные приближения, сжимающие отображения, различные формы интегральных преобразований, спектральные и другие) исследования. В связи с этим замечанием отметим, что проводимые нами исследования базируется на методах, которые принято называть функциональными, а свойства разрешимости описываются в терминах спектральной теории линейных операторов. Функциональные методы развивали и широко использовали в своих научных исследованиях К.Фридрихс, Л.Хёрмандер, С.Л.Соболев, А.А.Дезин, В. Н. Масленникова, В. А. Ильин, В. К. Романко, Е. И. Моисеев, А. П. Солдатов, А. С. Макин, Н. Х. Агаханов, их ученики и последователи.

Важным моментом при исследовании граничных задач являлся процесс переноса всего исследования на систему аналитических вычислений Maple.

Пакет Maple способен решать большое число, прежде всего, математически ориентированных задач вообще без программирования в общепринятом смысле. Вполне можно ограничиться лишь описанием алгоритма решения своей задачи, разбитого на отдельные последовательные этапы, для которых Maple имеет уже готовые решения. Более того, пакет Maple постоянно отвоевывает позиции у других математических пакетов и начинает доминировать в образовании, что весьма существенно с ориентацией на перспективу. Используемая Maple - идеология занимает все более существенное место при создании электронных материалов математического характера. Ярким примером тому служит данная работа.

Изучение поставленных задач ведётся с позиций дифференциально-операторных уравнений по выделенной переменной.

Простейшими примерами классических систем уравнений в частных производных, попадающих в поле наших рассмотрений, могут служить эллиптические системы вида:

$$D_t u^1 - D_x u^2 - \varepsilon u^2 = f^1, D_t u^2 + D_x u^1 + \varepsilon u^1 = f^2 \; ; \quad (1.1)$$

$$-D_t u^1 + D_x u^2 + \varepsilon u^2 = f^1, D_t u^2 + D_x u^1 + \varepsilon u^1 = f^2. \quad (1.2)$$

Отметим, что система (1.2) подобна системе (1.1) в следующем смысле: после умножения первого уравнения системы (1.2) на (-1) и формальной замены $(-f^1)$ на f^1 (в силу произвольности правой части), получаем систему (1.1). Эти преобразования могут наводить на мысль о совпадении свойств разрешимости краевых задач для данных систем безотносительно к условиям, определяющим краевую задачу [2, стр.

1063]. Исследования показали, что спектральные свойства рассматриваемых дифференциальных операторов (порождаемых, например, нелокальной задачей по переменным t, x) принципиально различны. Эти различия проявились как в структуре спектра, так и в свойствах базисности систем собственных вектор-функций.

Рассмотрим две гиперболические системы уравнений вида:

$$Dtu^1 + D_x u^2 + \varepsilon u^2 = f^1, D_t u^2 + D_x u^l + \varepsilon u^1 = f^2; \tag{2.1}$$

$$-Dtu^1 - D_x u^2 - \varepsilon u^2 = f^1, D_t u^2 + D_x u^l + \varepsilon u^1 = f^2; \tag{2.2}$$

Системы (2.1), (2.2) будем называть *гиперболическими системами первого и второго типа* соответственно.

Пусть $t \in V_t \equiv [T, 0]$, то есть $T_1 = T < 0$, $T_2 = 0$; $H_t = \mathcal{L}_2(V_t)$; $H_x = \mathcal{L}_2(V_t)$; $H = H_t \otimes H_x^2$. В гильбертовом пространстве $H = L_2(V)$ вектор-функций $u = u^1 e_1 + u^2 e_2$ переменных t, x рассмотрим системы уравнений, записанных в форме дифференциально-операторных уравнений

$$aD_t u + bBu = f, \text{при } a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \tag{2.3}$$

$$aD_t u + bBu = f, \text{при } a = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \tag{2.4}$$

в которых *B* является *M* - оператором H_x. К операторным уравнениям (2.3), (2.4) присоединим граничные условия Дирихле по *t* вида:

$$u^1\big|_{t=T} = u^1\big|_{t=0} = 0. \tag{2.5}$$

Нас интересуют сравнительное изучение спектральных свойств краевых задач (2.3)-(2.5) и (2.4)-(2.5). Опишем полученные результаты для задачи (2.3)-(2.5).

Теорема 1. *Зависимость структуры спектра σL оператора L от параметров задачи (2.3)-(2.5) следующая:*

1. *Если $0 \in P\sigma B$, то $P\sigma B = \square$.*
2. *Если множество AB не пусто, то $P\sigma B = \square$*
3. *Если $AB = \varnothing$, а множество $\overline{A}B'$ не пусто, то $C\sigma L = \square$.*
4. *Если $AB = \overline{A}B' = \varnothing$, то $\sigma L = \varnothing$ и, следовательно, $c\ L = \square$.*

Теперь опишем полученные результаты для задачи (2.4)-(2.5).

Теорема 2. *Зависимость структуры спектра σL оператора L от параметров задачи (2.4)-(2.5) следующая:*

1. *Если $0 \in P\sigma B$, то $P\sigma L = \mathbf{C}$.*
2. *Если $0 \in C\sigma B$, то $\sigma L = P\sigma L \cup C\sigma L = \mathbf{C}$.*
3. *Если $0 \notin P\sigma L$, то $\sigma L = P\sigma L \cup C\sigma L$. Причем $C\sigma L = \overline{P\sigma L} \setminus P\sigma L$.*

Если $0 \notin P\sigma B$, то собственные значения $\lambda_{k,s}$ оператора L даются формулой

$$\lambda_{k,s} = \operatorname{sign}\{k\}\sqrt{A^2(k) - B^2(s)},$$
$$A(k) = -ik\frac{\pi}{T}, k \in \square \setminus \{0\}, s \in S. \tag{2.6}$$

Собственному значению $\lambda_{k,s}$ *оператора* L *соответствует собственная вектор–функция* $\varphi^s u_{k,s}(t)$,

$$u_{k,s(t)} = u_k^1(t)e_1 + u_{k,s}^2(t)e_2; \tag{2.7}$$

$$u_k^1(t) = e_k^1(t), u_{k,s}^2(t) = -\frac{A(k)e_k^2(t) + \lambda_{k,s}e_k^1(t)}{B(s)};$$

$$e_k^1(t) = \sqrt{\frac{2}{-T}}\mathrm{sh}\{A(k)t\}, e_k^2(t) = \sqrt{\frac{2}{-T}}\mathrm{ch}\{A(k)t\}.$$

Список литературы.

1. Корниенко Д.В. Об одной спектральной задаче для двух гиперболических систем уравнений // Дифференциальные уравнения. 2006. Т.42, №1. С. 91-100.
2. Корниенко Д.В. О спектре задачи Дирихле для систем дифференциально-операторных уравнений // Дифференциальные уравнения. 2006. Т.42, №8. С. 1063-1071.
3. Солдатов А.П. О первой и второй краевых задачах для эллиптических систем на плоскости // Дифференциальные уравнения. 2003. Т. 39, №5. С. 674-686.

INVESTIGATION OF SOME BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A SYSTEM OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

D.F. Voskoboynik
graduate student
anaxered@gmail.com
Yelets

Bunin Yelets State University

Abstract. In this paper we study the boundary value problem for a linear system of differential equations written in the form of a differential operator equation aDtu(t)+bBu(t)=f(t) with boundary conditions on the variable t. The conditions determine the name of the problem under consideration. In our case the conditions are Dirichlet. The aim of the study is to study the spectral characteristics of differential operators generated by the Dirichlet problem for linear systems of partial differential equations considered in a bounded domain of finite-dimensional Euclidean space.

Keywords: boundary value problem, Dirichlet conditions, the spectrum of the operator of the system of differential equations.

References.

1. Kornienko D. (2006) Ob odnoi` spektral`noi` zadache dlia dvukh giperbolicheskikh sistem uravnenii` [About one spectral problem for two systems of hyperbolic equations] // Differential equations. Vol. 42, No. 1. P. 91-100.
2. Kornienko D.V. (2006) O spektre zadachi Dirikhle dlia sistem differentcial`no-operatorny`kh uravnenii` [On the spectrum of the Dirichlet problem for systems of differential-operator equations] // Differential equations. 2006. Vol. 42, No. 8. - P. 1063-1071.
3. Soldatov A.P. (2003) O pervoi` i vtoroi` kraevy`kh zadachakh dlia e`llipticheskikh sistem na ploskosti [On the first and second boundary value problems for elliptic systems on the plane] // Differential equations. 2003. Vol. 39, No. 5. P. 674-686.