ПРИКЛАДНЫЕ АСПЕКТЫ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

УДК 517.925

О НЕКОТОРЫХ ДИСКРЕТНЫХ ТОЧЕЧНЫХ ГРУППАХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ АВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ ДВУХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Ноздрунов Владимир Васильевич
к.ф.-м.н., доцент
v_noz@mail.ru
г. Орел

Орловский государственный университет
им. И.С. Тургенева

Аннотация. Рассматривается задача группового анализа по нахождению дискретного точечного преобразования, переводящего автономную систему двух ОДУ второго порядка в систему того же класса, что и исходная. Доказывается теорема об отсутствии дискретных точечных групп преобразований общего вида у нетривиальной автономной системы двух ОДУ второго порядка и теорема о виде дискретной точечной группы преобразований частного вида. Приводится пример построения точечной дискретной группы преобразований для конкретной автономной системы двух ОДУ второго порядка.

Ключевые слова: система дифференциальных уравнений, симметрии систем дифференциальных уравнений, дискретная точечная группа преобразований, дискретно-групповой анализ

Рассматривается автономная система двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с правыми частями, не зависящими от производных

$$\begin{cases} y'' = F(y, z, \overline{a}), \\ z'' = G(y, z, \overline{a}), \end{cases} \tag{1}$$

где $\overline{a} \in R^n$ – вектор существенных параметров [1], т.е. рассматривается система, приведенная к каноническому виду [2].

Наиболее общим точечным преобразованием, сохраняющим автономность системы (1), является преобразование

$$\begin{cases} y = f(u, v), \\ z = g(u, v), \\ x = c \cdot t + h(u, v), \end{cases} \tag{2}$$

где $h_u \neq 0, h_v \neq 0$, $c \neq 0$.

Условием обратимости преобразования (2) является отличие от нуля якобиана этого преобразования, т.е.

$$\begin{vmatrix} 0 & f_u & f_v \\ 0 & g_u & g_v \\ c & h_u & h_v \end{vmatrix} \neq 0. \tag{3}$$

Ставится задача по нахождению дискретного точечного преобразования (2), которое переводит систему (1) в систему того же класса систем ОДУ, что и исходное, т.е. в систему вида

$$\begin{cases} \ddot{u} = F(u, v, \bar{b}), \\ \ddot{v} = G(u, v, \bar{b}). \end{cases} \tag{4}$$

Замечание 1. Условие $c \neq 0$ является принципиальным, т.к. в противном случае не выполняется (3) и преобразование (2) становится не обратимым.

Замечание 2. Если в преобразовании (2) считать, что $h(u,v)=h$ – константа, то получаем простейшее точечное преобразование, сохраняющее автономность системы (1),

$$\begin{cases} y = f(u, v), \\ z = g(u, v), \\ x = c \cdot t + h. \end{cases} \tag{5}$$

Теорема 1. Нетривиальная автономная система (1) не допускает никакой дискретной точечной группы преобразования (2).

Доказательство. Воспользуемся методом от противного. Пусть система (1) допускает дискретное точечное преобразование (2). Выполнив подстановку (2) в систему (1), получим дифференциальные выражения, зависящие от новых переменных и их производных первого и второго порядков $u, v, \dot{u}, \dot{v}, \ddot{u}, \ddot{v}$ и от функций f, g и h и их частных производных по t, u и v до второго порядка включительно (так как рассматриваются точечные преобразования и функции f, g и h не зависят от производных $\dot{u}, \dot{v}, \ddot{u}, \ddot{v}$).

Замена $\ddot{u}, \ddot{v}$ на (4) в получившихся выражениях приводит к определяющей системе относительно функций f, g и h, содержащих переменные $\dot{u}, \dot{v}$, от которых функции f, g и h не зависят.

Расщепляя по независимым переменным определяющую систему, получим переопределенную систему из 20 уравнений

$$G(u,v,\bar{b})[f_v h_u - f_u h_v] - 3c^2 h_u F(f(u,v), g(u,v), \bar{a}) = 0,$$
$$F(u,v,\bar{b})[f_v h_u - f_u h_v] + 3c^2 h_v F(f(u,v), g(u,v), \bar{a}) = 0,$$
$$f_v G(u,v,\bar{b}) + f_u F(u,v,\bar{b}) - c^2 F(f(u,v), g(u,v), \bar{a}) = 0,$$
$$G(u,v,\bar{b})[g_v h_u - g_u h_v] - 3c^2 h_u G(f(u,v), g(u,v), \bar{a}) = 0,$$
$$F(u,v,\bar{b})[g_v h_u - g_u h_v] + 3c^2 h_v G(f(u,v), g(u,v), \bar{a}) = 0,$$
$$g_v G(u,v,\bar{b}) + g_u F(u,v,\bar{b}) - c^2 G(f(u,v), g(u,v), \bar{a}) = 0,$$

$$\begin{aligned}
&f_{uu} - 3h_u^2 F(f(u,v), g(u,v), \bar{a}) = 0,\\
&f_{vv} - 3h_v^2 F(f(u,v), g(u,v), \bar{a}) = 0,\\
&f_{uv} - 3h_u h_v F(f(u,v), g(u,v), \bar{a}) = 0,\\
&g_{uu} - 3h_u^2 G(f(u,v), g(u,v), \bar{a}) = 0,\\
&g_{vv} - 3h_v^2 G(f(u,v), g(u,v), \bar{a}) = 0,\\
&g_{uv} - 3h_u h_v G(f(u,v), g(u,v), \bar{a}) = 0,\\
&f_{uu} h_u - f_u h_{uu} - h_u^3 F(f(u,v), g(u,v), \bar{a}) = 0,\\
&f_{vv} h_v - f_v h_{vv} - h_v^3 F(f(u,v), g(u,v), \bar{a}) = 0,\\
&g_{uu} h_u - g_u h_{uu} - h_u^3 G(f(u,v), g(u,v), \bar{a}) = 0,\\
&g_{vv} h_v - g_v h_{vv} - h_v^3 G(f(u,v), g(u,v), \bar{a}) = 0,\\
&2f_{uv} h_v + f_{vv} h_u - 2f_v h_{uv} - f_u h_{vv} - 3h_u h_v^2 F(f(u,v), g(u,v), \bar{a}) = 0,\\
&2f_{uv} h_u + f_{uu} h_v - 2f_u h_{uv} - f_v h_{uu} - 3h_v h_u^2 F(f(u,v), g(u,v), \bar{a}) = 0,\\
&2g_{uv} h_v + g_{vv} h_u - 2g_v h_{uv} - g_u h_{vv} - 3h_u h_v^2 G(f(u,v), g(u,v), \bar{a}) = 0,\\
&2g_{uv} h_u + g_{uu} h_v - 2g_u h_{uv} - g_v h_{uu} - 3h_v h_u^2 G(f(u,v), g(u,v), \bar{a}) = 0.
\end{aligned} \tag{6}$$

Из первых двух уравнений системы (6) выразим $F(u,v,\bar{b})$ и $G(u,v,\bar{b})$.

$$\begin{aligned}
G(u,v,\bar{b}) &= \frac{3c^2 h_u F(f(u,v), g(u,v), \bar{a})}{f_v h_u - f_u h_v},\\
F(u,v,\bar{b}) &= -\frac{3c^2 h_v F(f(u,v), g(u,v), \bar{a})}{f_v h_u - f_u h_v},
\end{aligned} \tag{7}$$

где $f_v h_u - f_u h_v \neq 0$, так как в противном случае из первых двух уравнений системы (6) получим $h_u = 0$ и $h_v = 0$, что противоречит условиям использования преобразования (2).

Подставим (7) в третье уравнение системы (6)

$$f_v \frac{3c^2 h_u F(f(u,v), g(u,v), \bar{a})}{f_v h_u - f_u h_v} - f_u \frac{3c^2 h_v F(f(u,v), g(u,v), \bar{a})}{f_v h_u - f_u h_v} - c^2 F(f(u,v), g(u,v), \bar{a}) = 0$$

.

После упрощения, получим уравнение

$$2c^2 F(f(u,v), g(u,v), \bar{a}) = 0,$$

из которого следует, что или $c = 0$, что нарушило бы обратимость преобразования (2), или $F(f(u,v), g(u,v), \bar{a}) = 0$, то есть приходим к тривиальному случаю, который сводится к одному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка.

Аналогично из четвертого, пятого и шестого уравнений системы (6) получаем, что $G(f(u,v),g(u,v),\bar{a})=0$.

Таким образом, пришли к противоречию, состоящему в том, что преобразование (2) допускается только тривиальной системой, то есть системой (1) с правыми частями, тождественно равными нулю.

Теорема доказана.

Далее рассмотрим частный случай преобразования (2), когда $h(u,v) = h$ – константа, то есть преобразование вида (5).

Теорема 2. Автономная система (1) допускает дискретную точечную группу, определяемую преобразованием (5), если и только если совместна система алгебраических уравнений (относительно u и v)

$$\begin{cases} c_1F(u,v,\bar{b})+c_2G(u,v,\bar{b})-c^2F(f(u,v),g(u,v),\bar{a})=0, \\ c_4F(u,v,\bar{b})+c_5G(u,v,\bar{b})-c^2G(f(u,v),g(u,v),\bar{a})=0, \end{cases} \tag{8}$$

где $c_1,c_2,c_3,c_4,c_5,c_6,c$ – некоторые постоянные, $c\neq 0$, $c_1c_5-c_2c_4\neq 0$, при этом

$$\begin{aligned} f(u,v)&=c_1u+c_2v+c_3, \\ g(u,v)&=c_4u+c_5v+c_6. \end{aligned} \tag{9}$$

Доказательство. Пусть система (1) допускает дискретное преобразование (5). Выполнив подстановку (5) в систему (1), получим систему определяющих уравнений, расщепив которую по независимым переменным $\dot{u},\dot{v}$ получим переопределенную систему. Так как преобразование (5) является частным случаем преобразования (2) при условии, что $h(u,v) = h$ – константа , то есть $h_u=0$ и $h_v=0$, то переопределенную систему для преобразования (5) можно получить из переопределенной системы (6) преобразования (2), положив в ней $h_u=0$ и $h_v=0$.

$$\begin{aligned} &f_{uu}=0, \\ &f_{vv}=0, \\ &f_{uv}=0, \\ &g_{uu}=0, \\ &g_{vv}=0, \\ &g_{uv}=0, \\ &f_vG(u,v,\bar{b})+f_uF(u,v,\bar{b})-c^2F(f(u,v),g(u,v),\bar{a})=0, \\ &g_vG(u,v,\bar{b})+g_uF(u,v,\bar{b})-c^2G(f(u,v),g(u,v),\bar{a})=0, \end{aligned} \tag{10}$$

Из первых шести уравнений системы (10) находим структуру $f(u,v)$ и $g(u,v)$:

$$\begin{aligned} f(u,v)&=c_1u+c_2v+c_3, \\ g(u,v)&=c_4u+c_5v+c_6. \end{aligned}$$

Подставив их в последние два уравнения системы (10), получим:

$$\begin{cases} c_1F(u,v,\bar{b}) + c_2G(u,v,\bar{b}) - c^2F(f(u,v), g(u,v), \bar{a}) = 0, \\ c_4F(u,v,\bar{b}) + c_5G(u,v,\bar{b}) - c^2G(f(u,v), g(u,v), \bar{a}) = 0, \end{cases}$$

где $c_1,c_2,c_3,c_4,c_5,c_6,c$ – некоторые постоянные, $c \neq 0$, $c_1c_5 - c_2c_4 \neq 0$– условия обратимости преобразования (5).

Теорема доказана.

Из теорем 1 и 2 вытекает следующее следствие.

Следствие. Для автономной системы (1), с правыми частями, не удовлетворяющими функциональному уравнению (8), нетривиальные дискретные симметрии могут быть только динамическими, то есть зависящими от производных.

Пример. Рассмотрим автономную систему (1), с правыми частями, являющимися полиномами первой степени относительно y, z (линейная система двух уравнений):

$$\begin{cases} y'' = k_1y + k_2z + k_3, \\ z'' = k_4y + k_5z + k_6. \end{cases} \tag{11}$$

В общем виде система (11) имеет шестимерное пространство параметров. Найдя непрерывную группу эквивалентности [2], данную систему можно свести к системе с одномерным пространством параметров, например (после переобозначений), к следующему виду

$$\begin{cases} y'' = a_1z, \\ z'' = y + z, \end{cases} \tag{12}$$

где параметр a_1 является существенным, то есть представление системы (12) является каноническим [2]. Используя теорему 2 найдем дискретную точечную группу преобразований (5), системы (12), в котором $f(u,v)$ и $g(u,v)$ определяются соотношением (9), то есть преобразование

$$\begin{aligned} &y = c_1u + c_2v + c_3, \\ &z = c_4u + c_5v + c_6, \\ &x = c \cdot t + h. \end{aligned} \tag{13}$$

где $c_1,c_2,c_3,c_4,c_5,c_6,c,h$ – некоторые постоянные, ($c \neq 0$, $c_1c_5 - c_2c_4 \neq 0$).

Для этого выпишем правые части системы (12)

$$\begin{aligned} &F(y,z,\bar{a}) = a_1z, \\ &G(y,z,\bar{a}) = y + z. \end{aligned} \tag{14}$$

Подставим (5), с учетом $f(u,v)$ и $g(u,v)$ из (9) в (14)

$$\begin{aligned} &F(f(u,v), g(u,v), \bar{a}) = a_1c_4u + a_1c_5v + a_1c_6, \\ &G(f(u,v), g(u,v), \bar{a}) = (c_1 + c_4)u + (c_2 + c_5)v + c_3 + c_6, \end{aligned} \tag{15}$$

и выпишем правые части системы (12) в которые они перейдут под действием преобразования (13)

$$\begin{aligned} &F(u,v,\bar{b}) = b_1v, \\ &G(u,v,\bar{b}) = u + v. \end{aligned} \tag{16}$$

Подставляя (14), (15) и (16) в два уравнения системы (8) получим систему, из которой конкретизируются коэффициенты преобразования (13) при условии, что данная система тождественно выполняться при любых *u* и *v*.

$$\begin{cases} c_1 b_1 v + c_2(u+v) - c^2 a_1 c_4 u - c^2 a_1 c_5 v - c^2 a_1 c_6 = 0, \\ c_4 b_1 v + c_5(u+v) - c^2(c_1+c_4)u - c^2(c_2+c_5)v - c^2(c_3+c_6) = 0, \end{cases} \quad (17)$$

Так как коэффициенты преобразования не зависят от *u* и *v*, то расщепляя систему (17) по независимым переменным *u* и *v* получим систему на коэффициенты преобразования (13) $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c$ и параметр a_1 исходной системы (12)

$$\begin{aligned} & c_1 b_1 + c_2 - c^2 a_1 c_5 = 0, \\ & c_2 - c^2 a_1 c_4 = 0, \\ & c^2 a_1 c_6 = 0, \\ & c_4 b_1 + c_5 - c^2(c_2+c_5) = 0, \\ & c_5 - c^2(c_1+c_4) = 0, \\ & c^2(c_3+c_6) = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Из системы (18) получаем

$$\begin{aligned} & c_3 = 0,\ c_6 = 0, \\ & c_2 = c^2 a_1 c_4, \\ & c_5 = c^2(c_1+c_4), \\ & c^2 = \frac{c_1 + c_4 - a_1 c_4^2}{c_1^2 + c_1 c_4 - a_1 c_4^2}, \end{aligned} \quad (19)$$

при этом коэффициенты преобразования (13) должны удовлетворять соотношениям

$$\begin{aligned} & \frac{c^2 c_5 a_1 - c_2}{c_1} = \frac{c^2(c_2+c_5) - c_5}{c_4}, \\ & c_1 c_5 - c_2 c_4 \neq 0 \end{aligned} \quad (20)$$

Параметры системы при этом преобразуются по формуле

$$b_1 = \frac{c^2 a_1 (c^2(c_1+c_4) - c_4)}{c_1}, \quad (21)$$

то есть в результате оказывается, что система (12) допускает бесконечную дискретную группу с образующей (21), при этом коэффициенты дискретного точечного преобразования (13) должны удовлетворять условиям (19) и (20).

Так же полученный результат можно использовать в обратном порядке, то есть выбрав удобную для исследования модель (16) (то есть коэффициенты преобразованной системы), уточнить коэффициенты преобразования (13) при помощи (21).

Таким образом, появилась возможность прогнозировать преобразование, позволяющее переводить исходную систему в систему с конкретными свойствами и удобную для дальнейшего исследования.

Список литературы

1. Зайцев, В.Ф., Флегонтов, А.В. Дискретно-групповые методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Л.: Изд-во ЛИИАН, 1991.
2. Ноздрунов, В.В. Алгоритм построения группы эквивалентности по параметрам для произвольной системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка / Современные проблемы физико-математических наук. Материалы III Международной научно-практической конференции 23-26 ноября 2017 г. / под общ. ред. Т.Н. Можаровой. Орел: ОГУ, 2017.

ABOUT SOME DISCRETE POINT GROUP TRANSFORMATIONS OF THE AUTONOMOUS SYSTEM OF TWO ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS OF SECOND ORDER

V.V. Nozdrunov
Cand. Sci. (Phys.–Math.), associate professor
v_noz@mail.ru
Orel

Orel State University
named after I. S. Turgenev

Abstract. We consider the problem of group analysis to find a discrete point transformation that translates an Autonomous system of two odes of the second order into a system of the same class as the original. We prove a theorem on the absence of discrete point groups of transformations of a General form in a nontrivial Autonomous system of two odes of the second order and a theorem on the form of a discrete point group of transformations of a particular kind. An example of construction of a point discrete group of transformations for a particular Autonomous system of two odes of the second order is given.

Keywords: system of differential equalizations, symmetry of the systems of differential equalizations, discrete point group of transformations, discretely-group analysis.

References

1. Zaitsev V. F., Flegontov A.V. Diskretno-gruppovy`e metody` integrirovaniia oby`knovenny`kh differentcial`ny`kh uravnenii` [Discrete-group methods of integration of ordinary differential equations]. L.: Publishing house LIYAN, 1991.
2. Nozdrunov, V. V. Algoritm postroeniia gruppy` e`kvivalentnosti po parametram dlia proizvol`noi` sistemy` dvukh oby`knovenny`kh differentcial`ny`kh uravnenii` vtorogo poriadka [Algorithm of equivalence group construction by parameters for an arbitrary system of two ordinary differential equations of the second order] / Modern problems of physical and mathematical Sciences. Proceedings of the III International scientific-practical conference 23-26 November 2017, under the General editorship of T. N. Nazarovoj. - Eagle: OGU, 2017.