УДК 519.688

ОДНОМЕРНАЯ НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ ВОЛНОВОЙ ДИНАМИКИ ДИСПЕРСНОГО ПОТОКА В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Тукмаков Дмитрий Алексеевич
к.ф.-м.н., н.с.
tukmakovDA@imm.knc.ru
г. Казань

Федеральный исследовательский центр Казанский научный центр Российской академии наук

Аннотация. В статье представлена математическая модель и численный алгоритм решения уравнения математической модели динамики электрически заряженной дисперсной среды в вязком сжимаемом теплопроводном газе. Математическая модель предполагает описание динамики несущей среды уравнение Навье-Стокса, силовое и тепловое взаимодействие фаз, а также учёт воздействия электрического поля на динамику дисперсной компоненты. Также в статье приведён численный расчёт динамики несущей среды, результаты расчёта сопоставлены с известным из литературы аналитическим решением.

Ключевые слова: механика жидкости и газа, многофазные среды, электрическое поле, сила Кулона, уравнение Навье-Стокса.

Многие природные явления и процессы, протекающие в технике, связаны с движением сплошных сред, являющихся неоднородными по своим механическим и физико-химическим свойствам в связи с этим одним из важных разделов современной механики жидкости и газа, является динамика неоднородных сред [1,2]. При этом экспериментальное изучение течений в неоднородных средах в ряде случаев затруднено, и исследование таких течений требует создания математических моделей [1]. Примером таких сред могут быть взвеси твёрдых или жидких дисперсных включений в газе- аэрозоли и газовзвеси. Среды, состоящие из взвешенных в газе твёрдых частиц, называются газовзвесями или же запылёнными средами.

Одной из разновидностей композитных материалов являются металлические частицы, покрытые слоем полимера, технология изготовления этого материала [3] предполагает, что происходит столкновение двух дисперсных потоков – потока капель полимера имеющих электрический заряд и потока частиц металла электрически заряженных, но с зарядом противоположного знака. В результате образуется полидисперсная смесь, состоящая из композитного материала и исходных компонент. Возникает задача разделения компонент полидисперсной смеси имеющих различные физические свойства, прежде всего различную плотность.

В данной работе предложена математическая модель течения среды, представляющей собой электрически заряженную газовзвесь–предполагается, что частицы находятся под действием сил как аэродинамической, так и электромагнитной природы. Для описания её движения применяется система уравнений динамики двухскоростной и двухтемпературной газовзвеси со скоростным и температурным взаимодействием фаз [1,4]. Математическая модель включает в себя уравнения движения несущей среды и дисперсной фазы.

Движение несущей среды описывается одномерной системой уравнений Навье-Стокса для сжимаемого теплопроводного газа с учетом межфазного силового взаимодействия и теплообмена:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t}+\frac{\partial(\rho_1 u_1)}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial(\rho_1\ u_1)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_1\ u_1^2+p-\tau\right)=-F+\alpha\frac{\partial p}{\partial x}, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial(e_1)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\left[e_1+p-\tau\right]u_1+\lambda\frac{\partial T_1}{\partial x}\right)=$$

$$=Q-|F|(u_1-u_2)-\alpha\left(\frac{\partial(pu)}{\partial x}\right),$$

$$\tau=\frac{4}{3}\mu\frac{\partial u}{\partial x}$$

Динамика дисперсной фазы описывается уравнением сохранения «средней плотности» - произведения физической плотности материала частиц и объемного содержания дисперсной фазы, изменяющегося на различных участках физической области вместе с движением твёрдых частиц, [1] уравнением сохранения импульса и уравнением сохранения энергии, записанными с учетом теплообмена, обмена импульсом с несущей средой и с учетом силы Кулона, действующей на частицы дисперсной фазы:

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t}+\frac{\partial(\rho_2 u_2)}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial(\rho_2 u_2)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_2 u_2^2\right)=F-\alpha\frac{\partial p}{\partial x}, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial(e_2)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(e_2 u_2)=-Q,$$

$$\rho_2=\alpha_2\ \rho_{20},\ \ e_2=\rho_2 C_{v2}T_2,$$

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}=\rho_2 q$$

$$F=\frac{3}{4}\frac{\alpha}{(2r)}C_d\,\rho_1|u_1-u_2|(u_1-u_2)+\alpha\rho_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}+u_1\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)+$$

$$+0.5\alpha\rho_2\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}+u_1\frac{\partial u_1}{\partial x}+-\frac{\partial u_2}{\partial t}-u_2\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)-q_0\rho_2\,\partial\varphi/\partial x-\rho_2 g,$$

$$C_{d2}=\frac{24}{Re_{21}}+\frac{4}{Re_{21}^{0.5}}+0.4,\quad ,$$

$$M_{21}=|u_1-u_2|/c\ ,\ \ Re_{21}=\rho_1|u_1-u_2|2r/\mu,\ \ Pr=\gamma\,C_p\mu/\lambda$$

Здесь p, ρ_1, u_1–давление, плотность, скорость несущей среды; T_1 , e_1 – температура и полная энергия газа; ρ_2, T_2 , e_2, u_2 – средняя плотность, температура, внутренняя энергия, скорость дисперсной фазы.

Температура несущей среды находится из уравнения $T_1=(\gamma-1)(e_1/\rho_1-0.5u_1^2)/R$, где R - газовая постоянная несущей фазы. Силовое взаимодействие несущей и дисперсной фазы учитывает силу Стокса, силу Архимеда и силу присоединённых масс, также учитывается сила Кулона, воздействующая на частицы дисперсной фазы и сила тяжести [1,4-6].

Математическая модель предполагает монодисперсный состав твёрдой фазы газовзвеси – все частицы имеют одинаковый размер и одинаковые физические свойства – плотность и теплоёмкость материала. Внутренняя энергия взвешенной в газе дисперсной фазы определяется как $e_2=\rho_2 C_p T_2$, где C_p – удельная теплоемкость единицы массы вещества из которого состоят частицы. В уравнение энергии для несущей фазы входит коэффициент теплопроводности газа, коэффициент теплообмена α^T на поверхности частица - несущая среда и тепловой поток за счет теплообмена между газом и частицей - $Q=\alpha^T 4\pi r^2(T_1-T_2)n=6\alpha\, Nu\, \lambda\,(T_1-T_2)/(2r)^2$, где $Nu=2r\alpha^T/\lambda$.

Число Нуссельта определяется с помощью известной аппроксимации в зависимости от относительных чисел Маха, Рейнольдса и от числа Прандтля [1]:

$$Nu = 2exp(-M_{20}) + 0.459\, Re_{20}^{0.55}\, Pr^{0.33},\ \ 0 \le M_{20} \le 2\ ,\ 0 \le Re_{20} < 2\cdot 10^5.$$

Составляющие силы Кулона на единицу объема газовзвеси определяются через ее удельный заряд, среднею плотность твердой фазы и напряженность электрического поля [4-6]. Потенциал электрического поля в расчетной области определяется из решения уравнения Пуассона с граничными условиями Дирихле. В правой части уравнения Пуассона содержится плотность заряда газовзвеси, отнесенная к абсолютной диэлектрической проницаемости несущей среды:

$$divE = \frac{d\boldsymbol{E}}{dx}, \boldsymbol{E} = -\nabla\varphi,\quad \Delta\varphi = -\frac{\rho_{эл}}{\varepsilon\varepsilon_0},\ \rho_{эл} = \rho_1 \cdot q,\ \varepsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi}\ \Phi/м, \nabla = \frac{d}{dx}, \Delta = \frac{d^2}{dx^2}$$

где q_0 – удельный заряд единицы массы твердой фракции, φ – потенциал электрического поля. Таким образом, модель учитывает внутреннее электрическое поле дисперсной фазы, изменение которого происходит вместе с перераспределением концентрации заряженных частиц газовзвеси.

Система уравнений (1)-(2) может быть записана в матричном виде:

$$\boldsymbol{q}_t + \boldsymbol{E}_x = \boldsymbol{H}\ ; \tag{3}$$

$$\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_1 u_1 \\ \rho_2 u_2 \\ e_1 \\ e_2 \end{bmatrix};\ \boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} \rho_1 u_1 \\ \rho_2 u_2 \\ \rho_1 u_1^{\,2} + p - \tau \\ \rho_2 u_2^{\,2} \\ (e_1 + p - \tau)u_1 + \lambda\partial T_1/\partial x \\ e_2 u_2 \end{bmatrix};\quad \boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -F + \alpha\partial p/\partial x \\ F\rho_{10}/\rho_{20} - \alpha(\partial p/\partial x)\rho_{10}/\rho_{20} \\ -Q - |F|(u_1 - u_2) + \alpha\partial(pu_1)/\partial x \\ Q \end{bmatrix}.$$

Алгоритм явной схемы Мак–Кормака [7] для системы уравнений (3) включает в себя последовательно выполняемые шаги предиктор и корректор:

$$\mathbf{q}_j^* = \mathbf{q}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\mathbf{E}_{j+1}^n - \mathbf{E}_j^n\right) + \Delta t \mathbf{H}_j^n \ ,$$

$$\mathbf{q}_j^{n+1} = 0,5(\mathbf{q}_j^n + \mathbf{q}_j^n) - 0,5\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\mathbf{E}_j^n - \mathbf{E}_j^n\right) + 0.5\Delta t \mathbf{H}_j^n \ .$$

Система уравнений записывалась в обобщенных криволинейных координатах: физическая область течения в переменных (x,t) отображалась на каноническую расчетную область в переменных $(\xi, \ t)$ и решалась явным методом Мак-Кормака второго порядка. Монотонность решения достигалась с помощью применения схемы нелинейной коррекции [6] к вектору $U = (\rho_1, u_1, e_1, \ \rho_2, u_2, e_2)^T$ после перехода на новый временной слой при $t = t^{n+1}$. Алгоритм коррекции выполнялся последовательно вдоль координаты ξ, а затем вдоль координаты η в расчетной области [6].

Нижний индекс обозначает номер узла сетки соответственно вдоль ξ:

$$\boldsymbol{U}_j = \tilde{\boldsymbol{U}}_j + k\left(\delta\boldsymbol{\Phi}_{j+1/2} - \delta\boldsymbol{\Phi}_{j-1/2}\right) \ ,$$

где $\delta\boldsymbol{\Phi}_{j+1/2} = \delta\tilde{\boldsymbol{U}}_{j+1/2}$, если $\left(\delta\tilde{\boldsymbol{U}}_{j-1/2} \cdot \delta\tilde{\boldsymbol{U}}_{j+1/2}\right) < 0$, или $\left(\delta\tilde{\boldsymbol{U}}_{j+1/2} \cdot \delta\tilde{\boldsymbol{U}}_{j+3/2}\right) < 0$, и $\delta\Phi_{j+1/2} = 0$ в любом другом случае.

Здесь использованы обозначения:

$$\delta\tilde{\boldsymbol{U}}_{j-1/2} = \tilde{\boldsymbol{U}}_j - \tilde{\boldsymbol{U}}_{j-1}, \delta\tilde{\boldsymbol{U}}_{j+1/2} = \tilde{\boldsymbol{U}}_{j+1} - \tilde{\boldsymbol{U}}_j \ , \ \delta\tilde{\boldsymbol{U}}_{j+3/2} = \tilde{\boldsymbol{U}}_{j+2} - \tilde{\boldsymbol{U}}_{j+1},$$

где $\delta\tilde{\boldsymbol{U}}_j$ -значение функции после перехода на $(n+1)$ -ый временной слой по схеме Мак-Кормака, коэффициент $k = 0.1$.

Система уравнений дополнялась соответствующими начальными и граничными условиями. На границах расчетной области задавались граничные условия Дирихле для составляющих скорости несущей и дисперсной фазы и граничные условия Неймана для остальных функций [2,6,7]. Шаг по времени вычислялся из условия типа Куранта-Леви-Фридрихса [7].

Для тестирования работоспособности модели динамики сплошной среды было проведено сопоставление численного и аналитического решения задачи гидромеханики.

Одной из классических задач динамики идеального газа имеющих аналитическое решение является задача о генерации ударной волны движущимся поршнем. Поршень, расположенный на левом конце трубы, мгновенно разгоняется до скорости u_0, после чего движется равномерно. Поршень толкает перед собой слой газа, в котором формируется ударная волна, бегущая по неподвижному невозмущенному газу с некоторой скоростью θ, оставляющая за собой возмущенный газ, выведенный из состояния покоя и движущийся со скоростью - V.

Аналитический расчет скорости распространения ударной волны θ и скорости потока газа V выполняется по следующим формулам [8]:

$$\theta = \sqrt{\frac{\gamma-1}{2\gamma} + \frac{\gamma+1}{2\gamma}\frac{p_2}{p_1}} \cdot c\,,$$

$$V = \frac{2}{\gamma+1}\left(\sqrt{\frac{\gamma-1}{2\gamma} + \frac{\gamma+1}{2\gamma}\frac{p_2}{p_1}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{\gamma-1}{2\gamma} + \frac{\gamma+1}{2\gamma}\frac{p_2}{p_1}}} \right) \cdot c \qquad (4)$$

Здесь p_1 и p_2 - давление невозмущенного и возмущенного газа, с –скорость звука.

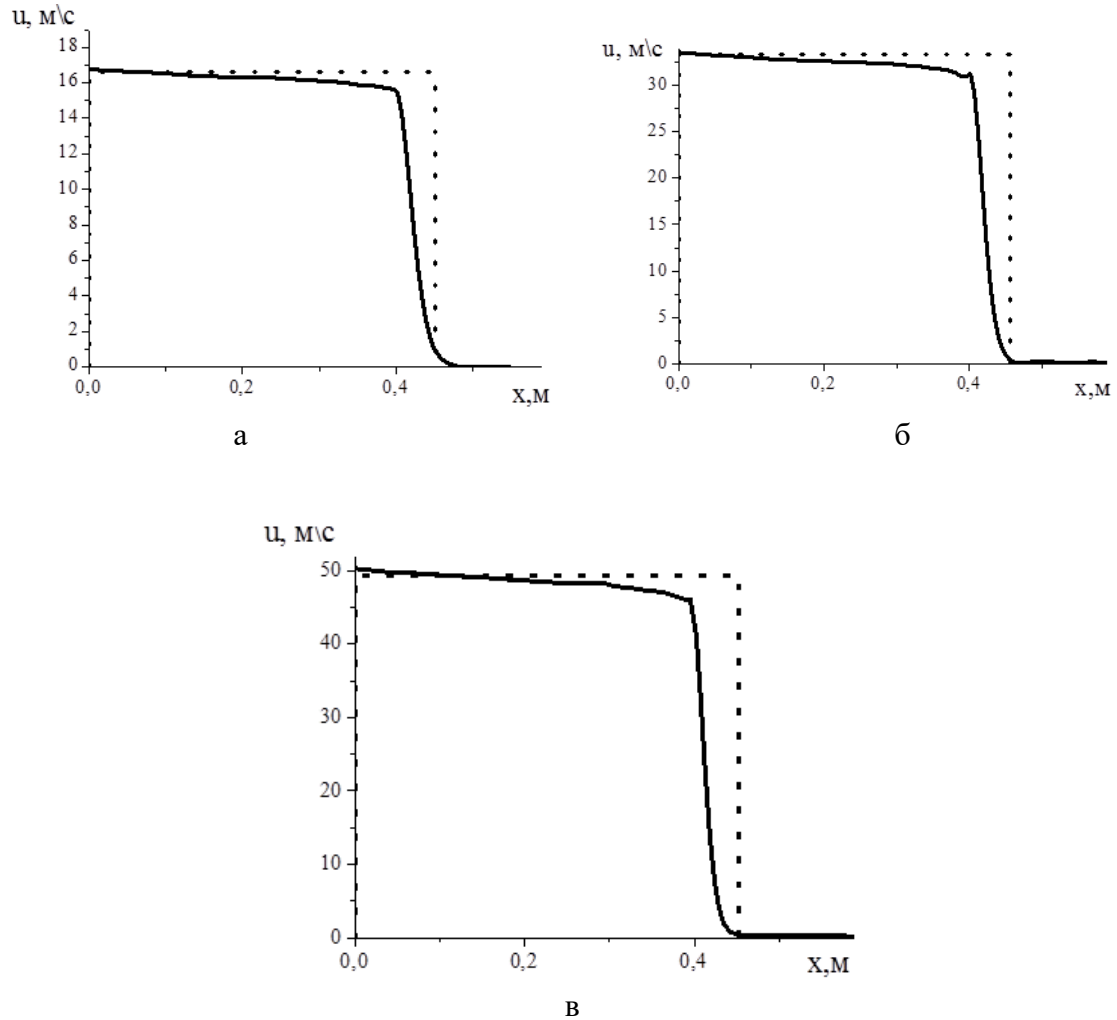

Рис. 1. Скорость движения газа в момент времени t=0.22 при различных скоростях движения поршня: а- u_0=17м/с, б- u_0=34 м/с, в- u_0= 51 м/с.

В начальный момент времени во внутренних узлах расчетной области задавались температура, плотность и скорость газа $u(t=0) = -u_0$, где u_0 - скорость поршня в системе координат с движущимся поршнем. Конечно-разностная сетка содержала N =200 узлов. Начальная температура и плотность невозмущенного газа: $T= 293K$, $\rho=1,3$ кг/м^3, начальное давление в безразмерных единицах p_1=100000 кПа.

На рисунке 1. (а- в) показаны волны скорости газа, полученные численно. Сравнение проведено для скоростей движения газа в момент времени t= 0,45. Аналитическое и численное решения хорошо согласуются между собой: для скоростей движения поршня u_0=17 м/с, u_0=34 м/с, u_0 =51 м/с аналитические и численные значения скорости потока составляют соответственно $V_а$ =16,76 м/с, $V_ч$ =16,59 м/с; $V_а$ =33,47 м/с, $V_ч$ =33,13 м/с; $V_а$ =50,02 м/с, $V_ч$ =49,51 м/с.

Анализ численных результатов позволяет сделать вывод о том, что явный конечно-разностный метод решения уравнений математической модели, дополненный алгоритмом со схемой нелинейной коррекции описывает движение среды в задаче формирования ударной волны имея хорошее соответствие аналитическому решению, имеющемуся в модели идеального газа. В связи с этим предложенная в статье модель динамики запылённой среды в электрическом поле может быть использована для численного изучения физических процессов формирования и развития электрического разряда в комбинированных средах.

Работы выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 18-31-00370.

Список литературы

1. Кутушев, А.Г. Математическое моделирование волновых процессов в аэродисперсных и порошкообразных средах / А.Г. Кутушев. СПб.: Недра, 2003, 284 с.
2. Temkin, S. Suspension acoustics: An introduction to the physics of suspension / S. Temkin // Cambridge University Press, 2005. 398p.
3. Богомолова О. Ю., Данилаев М.П. Параметры течения многофазных газовых потоков в задаче капсулирования субмикронных частиц полимером / О.Ю. Богомолова , М.П. Данилаев // Научно-технический вестник Поволжья. 2016. № 3. С. 25 − 27.
4. Dikalyuk A.S., Surzhikov S.T. Numerical simulation of rarefied dusty plasma in a normal glow discharge // High Temperature, September 2012, Volume 50, Issue 5, pp 571–578.
5. Сальянов Ф.А. Основы физики низкотемпературной плазмы, плазменных аппаратов и технологий. М., Наука, 1997.240 с.
6. Tukmakov A.L., Kashapov N.F., Tukmakov D.A., Fazlyyakhmatov M.G. Numerical modeling of the powder materials spraying // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, Volume 412, conference 1.
7. Fletcher, C.A., Computation Techniques for Fluid Dynamics/ C.A. Fletcher-Springer-Verlang, Berlin et al., 1988, 502 P.
8. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003. 784 с.

ONE-DIMENSIONAL NONSTATIONARY MODEL OF WAVE DYNAMICS OF THE DISPERSE STREAM IN THE ELECTRIC FIELD

D.A. Tukmakov
Cand. Sci. (Phys.–Math.)
tukmakovDA@imm.knc.ru
Kazan

The federal research center
"Kazan Scientific Center of the Russian Academy of Sciences"

Abstract. In the paper is presented the mathematical model and numerical algorithm of the solution of the equation of mathematical model of dynamics of the electrically dispersion medium in the viscous compressed diathermic gas.
Keywords: mechanics of liquid and gas, multiphase environments, electric field, equation of Navier-Stokes.

References.

1. Kutushev A.G. Mathematicheskoe modelirovanie volnoveh processov v aerodispersneh i poroskoobraznih sredah [Mathematical model operation of wave processes in aero dispersion and powdery dispersion mediums] SPb.: Nedra, 2003, 284 pages.
2. Temkin, S. Suspension acoustics: An introduction to the physics of suspension /Cambridge University Press, 2005. 398p.
3. Bogomolova O. Yu., Danilayev M. P. Parametre techenia mnogofaznih gazoveh potokov v zadashe kapsulerovanea submekronnex chastets polimerom [Parameters of a current of polyphase gas streams in a problem of capsulation of submicronic particles polymer]//the Scientific and technical bulletin of the Volga region. 2016. No. 3. Page 25−27.
4. Dikalyuk A.S., Surzhikov S.T. Numerical simulation of rarefied dusty plasma in a normal glow discharge//High Temperature, September 2012, Volume 50, Issue 5, pp 571–578.
5. Salyanov F.A. Osnove fezeke nezkotemperaturne plazme, plazmenneh apparatov e tehnologee [Fundamentals of physics of the low-temperature plasma, plasma devices and technologies] M, Science, 1997. 240 with.
6. Tukmakov A.L., Kashapov N.F., Tukmakov D.A., Fazlyyakhmatov M.G. Numerical modeling of the powder materials spraying// IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, Volume 412, conference 1.
7. Fletcher C.A., Computation Techniques for Fluid Dynamics, Springer-Verlang, Berlin et al., 1988, 502 P.
8. Loytsyansky, L.G. Mehanica jedkosti i gaza [Mechanic of liquid and gas] / M.: Drofa publishing house of.2003 g 784 p.