УДК 519.63:536.2

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕПЛОПЕРЕНОСА В БИОЛОГИЧЕСКИХ ТКАНЯХ С ИМПУЛЬСНЫМ ТЕПЛОВЫМ ПОТОКОМ НА ПОВЕРХНОСТИ

Петрова Лилия Сергеевна
к.п.н., доцент
petrov.306@mail.ru
г. Омск
Омский государственный университет путей сообщения

Заец Евгений Валерьевич
магистрант
zaetsevgenijmagistr@gmail.com
Омский государственный университет путей сообщения

Аннотация. В статье представлена математическая модель процесса теплопередачи в тканях кожи с импульсным тепловым потоком на поверхности. Получено численное решение нестационарной задачи теплопроводности на основе гиперболического уравнения теплопроводности, учитывающего конечную скорость распространения тепла и явление термического демпфирования. Описана реализация метода сеток с применением трехслойной неявной разностной схемы при решении задачи нестационарного теплопереноса в биологических тканях на основе уравнения с двухфазным запаздыванием. Представлены результаты расчетов температурных полей в тканях кожи по уравнению теплопроводности гиперболического типа с учетом явления тепловой релаксации и демпфирования температуры. Разработанная математическая модель с двухфазным запаздыванием может использоваться в экспериментальных и теоретических исследованиях процессов теплопереноса в тканях кожи.

Ключевые слова: математическая модель, численные методы, уравнение теплопроводности гиперболического типа, метод прогонки, биологическая ткань

Исследование процессов теплопередачи в биологических тканях является перспективным направлением в современной биотехнологии и физиологии, основанным на теоретических и экспериментальных исследованиях процессов теплового переноса в органах и тканях. Важное прикладное значение имеет проведение математического моделирования термических процессов для расчета температурных полей в биотканях.

Современными исследователями (А.П. Свиридов [4], М.В.Поляков [2], А.И. Жеребцова [1], А.Е. Пушкарева [3], H.Z. Poor, H. Moosavi, A. Moradi [6], K.C. Liu, P.J. Cheng, Y.N. Wang [5] и др.) для описания теплопередачи в биологических тканях разработано множество математических моделей, применяемых в различных областях биологии и медицины. При этом в исследовании А.И. Жеребцовой [1. с. 105], посвященном анализу и классификации наиболее распространенных математических моделей, описывающих взаимосвязь параметров кровоснабжения и температуры кожи, выделяются два основных подхода при построении моделей переноса биотепла (в континуальных моделях используется упрощенная запись биотепловых уравнений с усреднением кровоснабжения по исследуемому объему, дискретно-сосудистые модели основываются на совокупности биотепловых уравнений, описывающих кровоток в каждом сосуде).

Использование аналитических методов (метод разделения переменных, операционный метод) при решении задачи нестационарного теплопереноса в биологических тканях на основе уравнения теплопроводности гиперболического типа с учетом явления тепловой релаксации и демпфирования температуры описано в работах [5], [6] и в случае импульсного теплового потока на границе сопряжено с увеличением трудоемкости преобразований, что способствует применению численных методов решения. Описание использования численных методов при моделировании термических процессов для расчета температурных полей в биотканях на основе уравнения теплопроводности параболического типа представлено в исследованиях [2, 3, 4]. Исследований по тематике численного моделирования процесса теплопередачи в тканях кожи на основе уравнения с двухфазным запаздыванием нами не обнаружено.

Математическая модель процесса теплопередачи в тканях кожи с импульсным тепловым потоком на поверхности включает в себя гиперболическое уравнение теплопроводности с учетом явлений тепловой релаксации, термического демпфирования и метаболического тепловыделения в ткани [6, с. 1460, 1463]:

$$\rho c\left(\tau_q \frac{\partial^2 T(x,\tau)}{\partial \tau^2}+\frac{\partial T(x,\tau)}{\partial \tau}\right)+\rho_b c_b \varpi_b\left(\tau_q \frac{\partial T(x,\tau)}{\partial \tau}+(T-T_a)\right)=$$

$$=\lambda\left(\frac{\partial^2 T(x,\tau)}{\partial x^2}+\tau_T \frac{\partial^3 T(x,\tau)}{\partial x^2 \partial \tau}\right)+Q_{met}+\tau_q \frac{\partial Q_{met}}{\partial \tau},\ 0<x<L,\ 0<\tau\le\tau_m; \quad (1)$$

начальные условия:

$$T(x,\,0)=T_a, \quad (2)$$

$$\left.\frac{\partial T(x,\tau)}{\partial \tau}\right|_{\tau=0}=0,\ x\in[0,\,L]; \quad (3)$$

условия на границах:

$$-\lambda\left.\frac{\partial T(x,\tau)}{\partial x}\right|_{x=0}=q_0\left(U(\tau)-U(\tau-\tau_i)\right), \quad (4)$$

$$\left.\frac{\partial T(x,\tau)}{\partial x}\right|_{x=L}=0,\ 0\le\tau\le\tau_m, \quad (5)$$

где $T(x,\,\tau)-$ температура ткани кожи в точке x в момент времени τ, $c-$ теплоемкость ткани, $\rho-$ плотность ткани, $\lambda-$ коэффициент теплопроводности ткани, c_b- теплоемкость крови, ρ_b- плотность крови, ϖ_b- скорость перфузии крови, τ_q- время тепловой релаксации, τ_T- время термического демпфирования, T_a- температура крови, $Q_{met}-$метаболическое тепловыделение в ткани ($Q_{met}=\mathrm{const}$), q_0- плотность теплового потока, $U(\tau)-$ функция единичного скачка, τ_i- длительность импульса.

Для реализации метода сеток при решении задачи (1) – (5) использовалась прямоугольная пространственно-временная сетка

$$G_{x\tau}=\left\{x_i=h(i-1),\ i=\overline{1,N};\ \tau_j=jk,\ j=\overline{0,M}\right\}.$$

Разностное уравнение при использовании трехслойной неявной разностной схемы с применением соответствующих разностных аналогов частных производных первого и второго порядков по времени, производной второго порядка по пространству и смешанной производной третьего порядка имеет вид:

$$\rho c\left(\tau_q \frac{T_i^{j+1}-2T_i^j+T_i^{j-1}}{k^2}+\frac{T_i^{j+1}-T_i^j}{k}\right)+\rho_b c_b \varpi_b\left(\tau_q \frac{T_i^{j+1}-T_i^j}{k}+\left(T_i^{j+1}-T_a\right)\right)=$$

$$=\lambda\left(\frac{T_{i+1}^{j+1}-2T_i^{j+1}+T_{i-1}^{j+1}}{h^2}+\tau_T \frac{T_{i+1}^{j+1}-T_{i+1}^j-2\left(T_i^{j+1}-T_i^j\right)+T_{i-1}^{j+1}-T_{i-1}^j}{h^2 k}\right)+Q_{met}, \qquad (6)$$

где $i=\overline{2,N-1},\quad j=\overline{1,M-1}$.

В процедуре расчета значений сеточной функции на верхнем временном слое на этапе прямой прогонки используются формулы для определения прогоночных коэффициентов, при этом начальные прогоночные коэффициенты в соответствии с временным слоем определяются с использованием аппроксимации левого граничного условия с погрешностью $O\left(h^2\right)$:

$$\alpha_i=\frac{A_i}{B_i-C_i\cdot\alpha_{i-1}},\quad \beta_i=\frac{C_i\cdot\beta_{i-1}-F_i}{B_i-C_i\cdot\alpha_{i-1}}. \qquad (7)$$

$$\alpha_1^{j+1}=\frac{2\lambda k\left(k+\tau_T\right)}{h^2\left(\tau_q+k\right)\left(\rho c+k\rho_b c_b\varpi_b\right)+2\lambda k\left(k+\tau_T\right)}, \qquad (8)$$

$$\beta_1^{j+1}=\frac{2hk^2q_0\left(U\left(kj\right)-U\left(kj-\tau_i\right)\right)+2\lambda\tau_T k\left(T_1^j-T_2^j\right)+h^2\rho c\left[T_1^j\left(2\tau_q+k\right)-T_1^{j-1}\tau_q\right]}{h^2\left(\tau_q+k\right)\left(\rho c+k\rho_b c_b\varpi_b\right)+2\lambda k\left(k+\tau_T\right)}+$$

$$+\frac{kh^2\left(\rho_b c_b\varpi_b\left(T_1^j\tau_q+kT_a\right)+kQ_m\right)}{h^2\left(\tau_q+k\right)\left(\rho c+k\rho_b c_b\varpi_b\right)+2\lambda k\left(k+\tau_T\right)} \qquad (9)$$

$$\beta_1^1=\frac{2hk^2q_0\left(U\left(kj\right)-U\left(kj-\tau_i\right)\right)+2\lambda\tau_T k\left(T_1^0-T_2^0\right)+h^2\rho cT_1^0\left(\tau_q+k\right)}{h^2\left(\tau_q+k\right)\left(\rho c+k\rho_b c_b\varpi_b\right)+2\lambda k\left(k+\tau_T\right)}+$$

$$+\frac{kh^2\left(\rho_b c_b\varpi_b\left(T_1^0\tau_q+kT_a\right)+kQ_m\right)}{h^2\left(\tau_q+k\right)\left(\rho c+k\rho_b c_b\varpi_b\right)+2\lambda k\left(k+\tau_T\right)}. \qquad (10)$$

где $A_i=C_i=\lambda k\left(k+\tau_T\right),\quad B_i=h^2\left(\tau_q+k\right)\left(\rho c+k\rho_b c_b\varpi_b\right)+2\lambda k\left(k+\tau_T\right), F_i=h^2\tau_q\rho cT_i^{j-1}+$

$$+\lambda k\tau_T\left(T_{i-1}^j+T_{i+1}^j\right)-T_i^j\left[2\lambda k\tau_T+h^2\left(\rho c\left(2\tau_q+k\right)+k\tau_q\rho_b c_b\varpi_b\right)\right]-k^2h^2\left(\rho_b c_b\varpi_b T_a+Q_{met}\right)$$

$$F_i^1=\lambda\tau_T k\left(T_{i-1}^0+T_{i+1}^0\right)-T_i^0\left[2\lambda\tau_T k+h^2\left(\rho c\left(\tau_q+k\right)+k\tau_q\rho_b c_b\varpi_b\right)\right]-k^2h^2\left(\rho_b c_b\varpi_b T_a+Q_{met}\right)$$

Вычисление значений температуры в узлах на верхнем временном слое на этапе обратной прогонки осуществляется с использованием основного соотношения прогонки и формул расчета значений температуры на правой границе, полученных с применением аппроксимации правого граничного условия с погрешностью $O\left(h^2\right)$:

$$T_N^{j+1} = \frac{h^2\rho c\left(\tau_q T_N^{j-1} - T_N^j\left(2\tau_q + k\right)\right) - kh^2\left(\rho_b c_b \varpi_b\left(\tau_q T_N^j + kT_a\right) + kQ_m\right)}{2\lambda k\left(\tau_T + k\right)\left(\alpha_{N-1} - 1\right) - h^2\left(\tau_q + k\right)\left(\rho c + k\rho_b c_b \varpi_b\right)} +$$
$$+ \frac{2\lambda k\left(\tau_T\left(T_{N-1}^j - T_N^j\right) - \beta_{N-1}\left(\tau_T + k\right)\right)}{2\lambda k\left(\tau_T + k\right)\left(\alpha_{N-1} - 1\right) - h^2\left(\tau_q + k\right)\left(\rho c + k\rho_b c_b \varpi_b\right)}; \qquad (11)$$

$$T_N^1 = \frac{-h^2\rho c T_N^0\left(\tau_q + k\right) - kh^2\left(\rho_b c_b \varpi_b\left(\tau_q T_N^0 + kT_a\right) + kQ_m\right)}{2\lambda k\left(\tau_T + k\right)\left(\alpha_{N-1} - 1\right) - h^2\left(\tau_q + k\right)\left(\rho c + k\rho_b c_b \varpi_b\right)} +$$
$$+ \frac{2\lambda k\left(\tau_T\left(T_{N-1}^0 - T_N^0\right) - \beta_{N-1}\left(\tau_T + k\right)\right)}{2\lambda k\left(\tau_T + k\right)\left(\alpha_{N-1} - 1\right) - h^2\left(\tau_q + k\right)\left(\rho c + k\rho_b c_b \varpi_b\right)}. \qquad (12)$$

Безусловная устойчивость применения метода прогонки при использовании предложенной неявной разностной схемой с погрешностью аппроксимации $O\left(k + h^2\right)$ обеспечивается выполнением условия $\left|\alpha_i\right| < 1,\ i = \overline{1, N-1}$, исключающего быстрый рост погрешности округления и отличием знаменателей прогоночных коэффициентов от нуля.

Программа численного решения задачи (1) – (5) реализовывалась в системе MathCAD и в среде программирования Dev-C++. Результаты расчетов температурных полей с импульсным тепловым потоком на поверхности при $q_0 = 5000$ Вт/м^2, $\tau_i = 20$ с (T1), $q_0 = 83200$ Вт/м^2, $\tau_i = 1$с (T2) представлены в виде графиков распределения температуры при $x = 0{,}1$ мм, $x = 1{,}6$ мм на рисунке 1 при следующих значениях теплофизических и геометрических характеристик [5, с. 65; 6, с. 1465 – 1466]: $T_a = 37$ °C, $Q_{met} = 368{,}1$ Вт/м^3, $L = 6$ мм, $\tau_T = 10$ с, $\tau_q = 16$ с, $\lambda = 0{,}235$ Вт/(м·К), $\rho = 1190$ кг/м^3, $\rho_b = 1060$ кг/м^3, $c = 3600$ Дж/(кг·К), $c_b = 3770$ Дж/(кг·К), $W_b = \rho_b \varpi_b = 0{,}5$ кг/(м^{3}с).

Достоверность результатов обосновывается сопоставимостью полученных результатов с результатами расчетов, представленными в работе [6, с. 1466] с использованием аналитических методов на основе метода разделения переменных.

Представленная математическая модель с двухфазным запаздыванием и реализация численного решения задачи нестационарного теплопереноса в биологических тканях с импульсным тепловым потоком на поверхности позволяет повысить точность расчета температурных полей при исследовании процессов теплопередачи в тканях кожи и может применяться для разработки медицинских технологий при оптимизации параметров и выборе режима обработки.

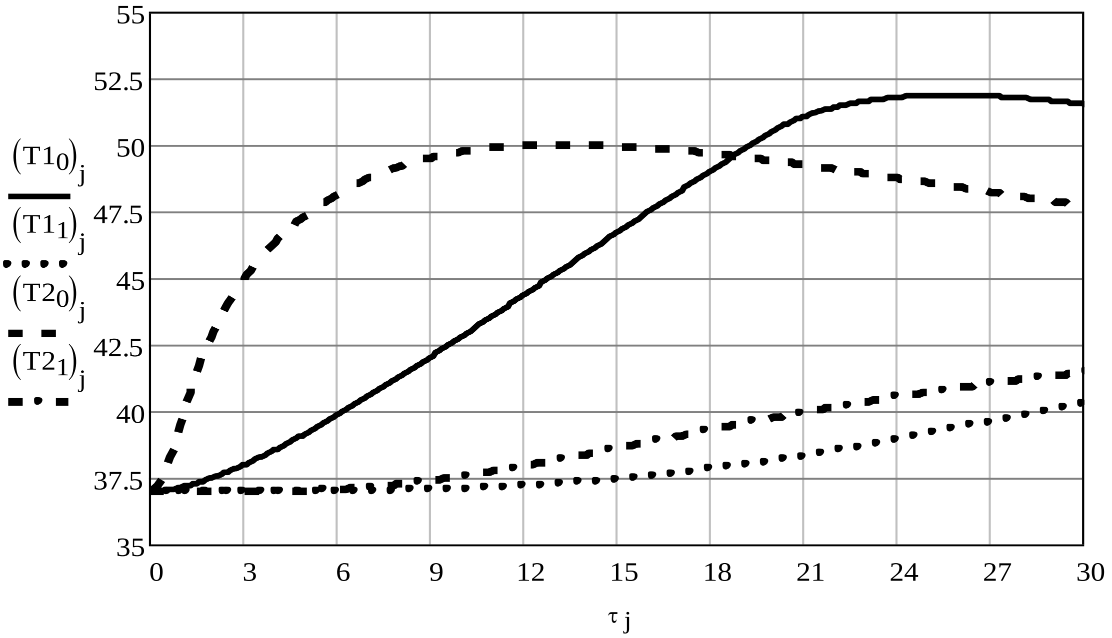

Рис. 1. Изменение температуры во времени:
при $x = 0{,}1$ мм ($T1_0$, $T2_0$) и при $x = 1{,}6$ мм ($T1_1$, $T2_1$)

Список литературы

1. Жеребцова А.И. (2015) Аналитический обзор математических моделей взаимосвязи параметров кровоснабжения и кожной температуры // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. № 5 (313). С. 104 - 113.
2. Поляков М.В. (2015) Численное моделирование динамики распространения температуры в биологической ткани // XII Всероссийская школа-конференция молодых ученых «Управление большими системами». С. 971 - 978.
3. Пушкарева А.Е. (2008) Методы математического моделирования в оптике биоткани. Учебное пособие / А.Е. Пушкарева. СПб: Изд-во СПбГУ ИТМО. 103 с.
4. Свиридов А.П. (2015) Лазерно-индуцированные термопроцессы в соединительных тканях и их оптическая диагностика: дис ... д-р физ.-мат. наук. М. 280 с.
5. Liu K.C., Cheng P.J., Wang, Y.N. (2011) Analysis of non-Fourier thermal behavior for multi-layer skin model // Thermal Science. V. 15 (1). P. 61 - 67.
6. Poor H.Z., Moosavi H., Moradi A. (2016) Analysis of the DPL bio-heat transfer equation with constant and time-dependent heat flux conditions on skin surface // Thermal Science. V. 20. № 5. P. 1457 - 1472.

NUMERICAL SOLUTION OF THE PROBLEM OF NONSTATIONARY HEAT TRANSFER IN BIOLOGICAL TISSUES WITH PULSED HEAT FLOW ON THE SURFACETITLE ARTICLE

L.S. Petrova
Cand. Sci. (Pedagogic), associate professor
petrov.306@mail.ru l
Omsk
Omsk State Transport University

E.V. Zaets
Undergraduate
zaetsevgenijmagistr@gmail.com
Omsk
Omsk State Transport University

Abstract. The article presents a mathematical model of the heat transfer process in skin tissues with pulsed heat flow on the surface. A numerical solution of the nonstationary heat conduction problem is obtained on the basis of the hyperbolic heat equation, which takes into account the finite rate of heat propagation and the effect of thermal damping. The implementation of the grid method using a three-layer implicit difference scheme for solving the problem of nonstationary heat transfer in biological tissues on the basis of the equation with dual phase lag is described. The results of calculations of temperature fields in skin tissues according to the hyperbolic thermal conductivity equation taking into account the effect of thermal relaxation and temperature damping are presented. The developed mathematical model with dual phase lag can be used in experimental and theoretical research of heat transfer processes in skin tissues.
Keywords: mathematical model, numerical methods, heat conduction equation of hyperbolic type, sweep method, biological tissues.

References

1. ZHerebcova A.I. (2015) Analiticheskij obzor matematicheskih modelej vzaimosvyazi parametrov krovosnabzheniya i kozhnoj temperatury [Analytical review of mathematical models of interrelation of parameters of blood circulation and skin temperature] // Fundamental and Applied Problems of Technics and technology. № 5 (313), pp. 104 - 113.
2. Polyakov M.V. (2015) CHislennoe modelirovanie dinamiki rasprostraneniya temperatury v biologicheskoj tkani [Numerical modeling of the dynamics of temperature distribution in biological tissues] // "XII Vserossijskaya shkola-konferenciya molodyh uchenyh. Upravlenie bol'shimi sistemami", pp. 971 - 978.
3. Pushkareva A.E. (2008) Metody matematicheskogo modelirovaniya v optike biotkani. Uchebnoe posobie [Methods of mathematical modeling in biological tissue optics] / A.E. Pushkareva. SPb: Izd-vo SPbGU ITMO. 103 p.
4. Sviridov A.P. (2015) Lazerno-inducirovannye termoprocessy v soedinitel'nyh tkanyah i ih opticheskaya diagnostika [Laser-induced thermal processes in connective tissues and their optical diagnostics]: Dis. d-r fiz.-mat. nauk. M. 280 p.
5. Liu K.C., Cheng P.J., Wang, Y.N. (2011) Analysis of non-Fourier thermal behavior for multi-layer skin model // Thermal Science. V. 15 (1). P. 61 - 67.
6. Poor H.Z., Moosavi H., Moradi A. (2016) Analysis of the DPL bio-heat transfer equation with constant and time-dependent heat flux conditions on skin surface // Thermal Science. V. 20. № 5. P. 1457 - 1472.