

НОВШЕСТВА ФГОС И ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ ТЕХНОЛОГИИ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ И ИНФОРМАТИКЕ

УДК 372.851 | **РАЗВИТИЕ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ СТУДЕНТОВ-БАКАЛАВРОВ
ПО ОСВОЕНИЮ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПОНЯТИЙ В
ЭЛЕКТРОННОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ СРЕДЕ:
СОЦИОКУЛЬТУРНЫЙ КОНТЕКСТ**

Подаева Наталия Георгиевна
д.п.н., профессор
podaeva@mail.ru

г. Елец

Жук Лариса Викторовна
к.п.н., доцент

krasnikovalarisa@yandex.ru

г. Елец

Елецкий государственный
университет им. И.А. Бунина

Елецкий государственный
университет им. И.А. Бунина

Аннотация. **Актуальность исследования.** В условиях перехода от информационно-трансляционной модели школьного математического образования к личностно-деятельностной, направленной на формирование у обучающихся метапредметных умений и универсальных учебных действий, определяются повышенные требования к уровню профессиональной компетентности будущего учителя математики. Важнейшей ее составляющей является математическое мышление – сложная динамичная структура, особое место в которой принадлежит понятиям – форме мышления, отражающей общие и притом существенные свойства предметов и явлений. **Цель исследования** – разработка методики развития мыслительной деятельности будущих учителей математики по освоению научных понятий. Достижение цели возможно посредством решения задач: изучение психической структуры, обеспечивающей в ситуации обучения геометрии формирование понимания и способов действия с геометрическими понятиями; обоснование организационно-педагогических условий эффективного развития мыслительной деятельности будущих учителей математики по освоению научных понятий; определение уровней и показателей развития, разработка средств диагностики. **Методы исследования.** Дидактическим условием эффективности развития мыслительной деятельности будущих учителей математики по освоению геометрических понятий выступает специальным образом организованная учебная деятельность в сопровождении метода компьютерного моделирования и разработанная система заданий в рамках элективного курса «Решение задач аналитической и дифференциальной геометрии с применением компьютерных математических систем». Целевыми ориентирами курса являются раскрытие социальной, практической и личностной значимости предметного содержания, овладение учащимися знаниями о геометрической картине мира, образным восприятием действительности. **Результаты исследования.** Результаты анализа статистических данных подтверждают гипотезу о значимом

положительном воздействии социокультурно-ориентированного обучения геометрии в вузе с применением компьютерных математических систем на уровень профессиональной компетентности будущих учителей математики. **Заключение.** Исследование выполнено в рамках стратегии обновления содержания математического образования в направлении социокультурной парадигмы. Представлены элементы технологии обучения геометрии будущих учителей математики, направленной на развитие мыслительной деятельности будущих учителей математики по освоению геометрических понятий посредством поэтапного решения психодидактических задач осознания, осмысления, обобщения. Содержащиеся в статье материалы могут быть внедрены в практику работы вузовских преподавателей геометрии, а также учителей профильных математических классов.

Ключевые слова: социокультурно-ориентированное обучение геометрии, мыслительная деятельность будущих учителей математики по освоению геометрических понятий, метод компьютерного моделирования.

1. Введение

В условиях перехода современной системы математического образования в России от информационно-трансляционной модели к деятельностной, направленной на личностное развитие обучающихся, формирование у них метапредметных знаний и универсальных учебных действий, определяются повышенные требования к уровню профессиональной компетентности бакалавра педагогического образования. Важнейшей составляющей профессиональной компетентности учителя математики является математическое мышление – сложная динамичная структура, особое место в которой принадлежит *понятиям* – форме мышления, отражающей общие и притом существенные свойства предметов и явлений. Учитель с развитым понятийным мышлением способен обеспечить высокий уровень геометрической подготовки, а также общей культуры школьников. По нашему мнению, решение проблемы развития математического мышления будущего бакалавра возможно на основе трансформации процесса обучения геометрии в вузе в механизм социокультурного развития личности. Под *социокультурным развитием* мы понимаем освоение субъектом-обучающимся содержания геометрических понятий на основе развёртывания ценностно-ориентационных, побудительных и коммуникативных механизмов процесса учения [17]. Познавательную деятельность студентов необходимо ориентировать на освоение культурных базовых способностей – мышления, понимания, рефлексии, воображения, учитывая психодидактические закономерности развития личности, формируя адекватную мотивацию, при которой объективно значимая цель учения становится субъективно значимой.

Предметом исследования является социокультурно-ориентированное обучение геометрии в вузе как среда для развития базовых способностей бакалавров педагогического образования. *Цель* исследования – разработка методики развития мыслительной деятельности будущих учителей математики по освоению научных понятий. Достижение цели возможно посредством решения *задач*: изучение психической структуры, обеспечивающей в ситуации обучения геометрии формирование понимания и способов действия с геометрическими понятиями; обоснование организационно-педагогических условий эффективного развития мыслительной деятельности будущих учителей математики по освоению научных понятий; определение уровней и показателей развития, разработка средств диагностики.

2. Методы

Теоретические методы исследования включают анализ психолого-педагогической литературы по теории развития личности – А.В. Асмолов, Б.Г. Ананьев, А.Н. Леонтьев и др. [1, 13], теории развития мышления – В.В. Давыдов, Е.Н. Кабанова-Меллер, И.Я. Лернер, С.Л. Рубинштейн, Н.Ф. Талызина, Д.Б. Эльконин и др. [7, 14, 20, 21, 25], по вопросам сущности и структуры пространственного компонента мыслительной деятельности – Г.Д. Глейзер, И.Я. Каплунович, В.А. Крутецкий, Ж. Пиаже, И.С. Якиманская и др. [5, 9, 26]; по проблеме формирования математических понятий – М.А. Холодная [23], Э.Г. Гельфман [4], С.А. Владимирцева и др.; анализ исследований, отражающих концепцию социокультурно-ориентированного обучения математике [18, С. 91-96.]; изучение нормативно-программной документации (стандартов, учебных планов) и методической литературы (учебники, учебные пособия по геометрии для вузов [2]). К *эмпирическим методам* относятся наблюдение, диагностика, сравнение, анализ и обобщение результатов.

В отечественной психологии понятие *деятельности* играет ключевую, методологически значимую роль. Деятельностный подход является основным при изучении закономерностей развития сознания и личности человека. Общепсихологическая теория деятельности развита в трудах С.Л. Рубинштейна, А.Н. Леонтьева, А.В. Брушлинского, Б.Г. Ананьева, В.Д. Шадрикова и др. Согласно определению В.Д. Шадрикова, деятельность – форма активного отношения к действительности, направленного на достижение сознательно поставленных целей, связанных с созданием общественно значимых ценностей и освоением общественного опыта [23]. Предметное содержание деятельности субъекта образуют *мотив, цель, условия* (способы достижения цели) и *задача* (цель, заданная в определенных условиях), в то время как структурными единицами деятельности являются *действия* и *операции* – способы осуществления действий в условиях достижения конкретной цели. Сложное действие, состоящее из совокупности операций, образует *приём деятельности*.

Мыслительная деятельность в исследованиях А.Н. Леонтьева, С.Л. Рубинштейна, Г.П. Щедровицкого представлена как особый вид теоретической деятельности, главной характеристикой которой выступает познавательная мотивация [12].

Обращаясь к понятию «*математическое мышление*», следует отметить два ряда исследований: в первом описаны специфические характеристики данного вида мыслительной деятельности (В.А. Гусев, Ю.М. Колягин, А.Н. Колмогоров, В.С. Ротенберг и др. [6, 10, 19]), во втором представлены его структурные компоненты (Г.Д. Глейзер, И.Я. Каплунович, М.А. Незнамова [5, 9, 15]).

Пространственное мышление рассматривается как специфический вид мыслительной деятельности, имеющий место при решении геометрических, графических, конструктивно-технических задач, требующих оперирования образами, их трансформации и видоизменения, ориентации в пространстве (И.А. Бреус, И.Г. Вяльцева, Г.Д. Глейзер, И.Я. Каплунович, И.С. Якиманская [3, 5, 9, 26]). Основной оперативной единицей пространственного мышления является *образ*, в котором представлены преимущественно пространственные характеристики изучаемого объекта – форма, величина, взаимоотношение составляющих элементов, расположение их на плоскости или в пространстве относительно заданной точки отсчета. Этим пространственное мышление отличается от других форм образного мышления, в которых выделение пространственных характеристик не является центральным моментом. Структура пространственного компонента мыслительной

деятельности в области геометрии включает ряд обобщённых приёмов, характеризующихся определённым составом мыслительных операций (таблица 1).

Таблица 1

Характеристика обобщённых приёмов в структуре мыслительной деятельности по освоению геометрических понятий на уровне представлений

Уровни развития	Обобщённые приёмы	Состав приёма
1. Образ восприятия (перцепт)	1. Создание первичного образа, в котором закреплены субъективно наиболее существенные признаки воспринимаемого объекта.	<i>Осознание:</i> структурирование наглядно воспринимаемого объекта – выделение отдельных элементов, пространственных и метрических соотношений фигуры как носителя понятия, её видовая идентификация.
2. Обобщённое представление	2. Создание вторичного образа в отсутствие наглядной основы.	<i>Обобщение</i> (типизация): образ освобождается от «прикованности» к единичному объекту и может быть обобщённым образом целого класса объектов.
3. Предпонятие (образ-концепт)	3. Оперирование пространственным образом. Исходный образ, созданный на графической наглядной основе, видоизменяется в соответствии с условиями задачи.	<i>Осмысление:</i> операции, соответствующие основным математическим преобразованиям – параллельный перенос, поворот, центральная и осевая симметрия, симметрия относительно плоскости, гомотетия, параллельное и ортогональное проектирование.
	Три типа (уровня) оперирования образами:	
	3.1. Первый тип («движение») – изменение пространственного положения имеющегося в представлении образа.	Мысленные вращения, перемещения образа посредством смены точки отсчёта.
	3.2. Второй тип («реконструкция») – изменение структуры имеющегося в представлении образа.	Мысленная перегруппировка составных элементов образа с использованием операций наложения, совмещения, рассечения и т.п.
	3.3. Третий тип («композиция») – одновременное и неоднократное изменение пространственного положения и структуры исходного образа.	Цепь мыслительных операций, направленных на манипулирование образом, при котором возникает последовательность «промежуточных» образов.
4. Ориентация в пространстве – определение местоположения или направления движения объекта в пространстве посредством внешних (визуальных) или внутренних (висцеральных, кинестетических) ориентиров.	Пространственная ориентация базируется на деятельности по созданию пространственных образов и на процессе оперирования ими.	

Исходя из представленной структуры, под *развитием мыслительной деятельности бакалавров по освоению геометрических понятий* на уровне представлений мы понимаем совокупность изменений качественного и количественного характера, выражающихся в повышении уровня сформированности обобщённых приёмов пространственного мышления в условиях специальным образом организованной учебной деятельности.

В качестве педагогической среды, оптимальным образом сочетающей содержательные и организационные условия развития, мы рассматриваем социокультурно-ориентированное обучение геометрии в вузе, проектируемое в соответствии с основополагающими принципами социокультурного подхода. В русле данного подхода образование определяется как форма человеческой культуры, направленная на трансляцию и усвоение накопленного опыта, знания как носителей культурных ценностей [8]. При этом на первый план выступает мотивационно-ценностный компонент образования: лишь знание, наполненное личностным смыслом, оказывается в полной мере усвоенным субъектом образовательного процесса.

В рамках концепции социокультурно-ориентированного обучения геометрии учебно-познавательную деятельность бакалавров можно представить как системное образование, компоненты которого – ценностная ориентация, побуждение, коммуникация, адаптация, продуцирование – поэтапно отражают динамику этой деятельности [16]. На *этапе ценностной ориентации* осуществляется поиск смысла геометрических объектов, выявляются идеи, заложенные в фундаментальных понятиях, геометрическая терминология представляется как фрагмент общемирового искусственного языка. Тем самым у учащихся формируется ценностное отношение к геометрии как культурному образцу, развивается внутренняя мотивация к содержанию и процессу учения. На *этапе побуждения* мотивационный аспект усиливается межпредметностью геометрии и её прикладной направленностью: устанавливаются содержательные и методологические связи с другими науками, формируется умение видеть геометрические закономерности в повседневной практике. Основной целью *этапа коммуникации* является обеспечение обратной связи, рефлексивного и эмоционального отношения путём передачи не только геометрической информации, но её значения, смысла с помощью символов. Ключевым фактором, обуславливающим эффективность социокоммуникативного процесса, является реализация психодидактических задач осознания, осмысления и обобщения содержания и процесса деятельности.

3. Результаты исследования

В психодидактике традиционно выделяют два уровня усвоения знаний: *уровень представлений* и *понятийный уровень*. В данной статье раскрывается сущность формирования деятельности студентов по овладению геометрическими понятиями на уровне представлений. Предполагается развитие **образно-пространственного** способа кодирования обучающимися информации, что требует использования нормативных образов и работы с ними, передачи в образных формах существенных характеристик геометрических объектов, активного преобразования наглядного или мысленного образа в соответствии с требованиями задачи, развития образа в ходе рассуждения, самостоятельного создания студентами визуальных моделей математических объектов и т.д.

В процессе развития деятельности по освоению геометрических понятий на уровне представлений у студентов-бакалавров формируются предпонятия. Формирование геометрических понятий и их систем обеспечивается в процессе развития деятельности на вербально-логическом уровне, что находится за рамками

данной статьи. Анализ психологических исследований позволил выделить целостную психическую структуру, обеспечивающую в ситуации обучения геометрии формирование понимания и способов действия с геометрическими понятиями: «*Образ восприятия (перцепт) — обобщенное представление — предпонятие (образ-концепт) — понятие (вербально-логический уровень) — ценностное отношение*». Схематично этапы ее развития представим в виде блоков, соответствующих уровням усвоения понятия. Содержание этапов определяется структурой деятельностной компоненты геометрических понятий, включающей как предметные действия, реализуемые «на вещах», так и целостные операции, которые «на вещах» не реализуются. В рамках данной статьи остановимся подробнее на первых трех блоках.

Первый блок: создание образа восприятия (перцепта). Ведущей является перцептивная деятельность на основе предметных действий с фигурами – вычерчивания, конструирования, представления в виде материального макета или трёхмерной компьютерной модели. Важно организовать подачу геометрической информации одновременно на двух кодах – вербальном и образном, что позволит преодолеть формализм в сложившейся практике обучения. Когда появление новых терминов сопровождается соответствующими ассоциативными образами, осуществляется так называемая «знаковая натурализация геометрических понятий», обусловленная психодидактической задачей *осознания*: аналитические рассуждения приобретают геометрический смысл, в результате достигается понимание обучающимся идеальной геометрической модели [22]. При таком подходе, например, знакомство с эллипсом начинается с динамической визуализации процедуры его вычерчивания, позволяющей выявить основное свойство точек фигуры:

$$|MF_1| + |MF_2| = const.$$

На данном уровне усвоения понятия работает предметно-практический способ кодирования информации. (Наглядную опору для этого предоставляет, например, 3D-графика системы GeoGebra.) Такой тип действия закрепляет непосредственное восприятие чертежа. Имеет место «натурализация знания»: все сводится к «вещам» – материализуется, что, как уже говорилось, неверно для геометрии, негативно сказывается на ее теоретическом освоении. Как отмечает А.А. Устиловская, любая материализация идеального объекта уже не идеальный объект, а вещь. Поскольку геометрические объекты – не вещи, то материальные действия в отношении них невозможны [22]. Задача обучения геометрии – формирование самой идеальной действительности, особенностей понимания и способов действия с фигурами. В этой связи необходимо отметить, что феномен знаковой натурализации чертежа имеет негативное влияние на процесс усвоения геометрических понятий как теоретических. Причина в том, что условием перехода к теоретическому уровню геометрического мышления является преодоление знаковой натурализации – построение обучающимся пространства евклидовой геометрии как заданного специфическими характеристиками, не свойственными реальному, натуральному миру. Психологи условно выделяют три типа пространства: перцептивное, реальное и геометрическое. На первом уровне усвоения понятия предполагается, что студенты действуют в перцептивном пространстве, где работает ориентация «по схеме тела» (справа от себя, впереди себя), а также в реальном, опираясь на объективные земные ориентиры (горизонтальность, к югу, севернее ...).

На этапе создания образов обучающиеся подготавливаются к мыслительному процессу оперирования образами. Следует отметить, что успешность оперирования образами не обеспечивается лишь освоением приемов создания пространственных образов. В процессе эксперимента определились две группы: студенты первой

группы легко создавали пространственные образы по плоскому изображению, выполненному в аксонометрической проекции, однако испытывали трудности их мысленно преобразовывать, наглядную опору для них представляла 3D-графика системы GeoGebra; студенты второй группы свободно осуществляли мысленное оперирование образами и не нуждались в дополнительной наглядной опоре.

Второй блок: обобщенное представление. На этапе *формирования обобщённых представлений* происходит преодоление знаковой натурализации, обеспечиваемое психодидактической задачей *обобщения (типизации)*. Учащийся осваивает способы оперирования чертежом, позволяющие трансформировать, видоизменять имеющиеся в представлении образы, ориентироваться в пространстве, тем самым мысленно воссоздавая характеристики геометрического объекта, фиксированные в чертеже как в знаке-символе. На данном уровне усвоения понятия предполагается, что студенты действуют в геометрическом пространстве с постоянно меняющейся системой отсчета, причем названия геометрических фигур, их элементов не зависят от расположения относительно земной поверхности. Если, например, попробовать осознать («прорефлексировать») образ тетраэдра, который возникает у обучающегося в идеальном плане, то этот образ нельзя материализовать как плоское изображение. Скорее, пирамида видится как бы одновременно со всех сторон, то есть происходит выход в пространство с постоянно меняющейся точкой отсчета. Основание пирамиды определяется не тем, что на нем «стоит» фигура, а связями (отношениями) между ее элементами. Умение переходить от точки отсчета, сосредоточенной в наблюдателе, к пространству с постоянно меняющейся точкой отсчета С.Л. Рубинштейн назвал «стержнем общего понимания пространства». Таким образом, работа в геометрическом пространстве требует создания и оперирования образами геометрических объектов и осознания отличия идеального геометрического пространства от материально-предметного – реального и перцептивного [20]. Здесь необходимо преодоление знаковой натурализации – так называемая денатурализация, обеспечиваемая процессами осознания, обобщения и осмысления содержания и процесса деятельности. Геометрические понятия не являются абстракциями, полученными в результате эмпирического обобщения. Следовательно, оперирование геометрическими понятиями не может быть производным от предметных действий. Нужен другой тип операций – операции, не сводящиеся к действию.

Таким образом, поскольку геометрические объекты – не вещи, поскольку они не могут быть фиксированы в вещах, они «схватываются» и «удерживаются» в образах, постольку преодоление натурализации предполагает принципиально другой (по сравнению с предметными действиями) способ восприятия изображений геометрических фигур – операциональный, суть которого в мысленном воссоздании характеристик представленного геометрического объекта, фиксированных в изображении как в знаке-символе. Для преодоления знаковой натурализации необходимо осознание учеником символической функции чертежа и освоение способов оперирования с чертежом как со сложным семиотическим объектом. Уникальные дидактические средства для формирования геометрических понятий на данном уровне предоставляет динамическая система GeoGebra, главной характерной чертой которой является возможность построения динамических чертежей – геометрических 3D-конструкций, которые можно варьировать при сохранении алгоритма их построения посредством изменений параметров. Достоинства программы – моментальное изменение конфигурации при изменении определенных начальных характеристик. Это дает возможность осуществлять геометрические построения на компьютере так, что при изменении одного из геометрических объектов другие также изменяются, удерживая установленные между собой соответствия постоянными.

Третий блок: предпонятие (образ-концепт). Использование интерактивной геометрической среды обеспечивает легкость и быстроту взаимосвязанных процессов создания пространственного образа и оперирования им — то есть его переработки (мысленного видоизменения, преобразования) в зависимости от поставленной задачи. Основой каждого из этих мыслительных процессов служит деятельность представлявания. При этом не следует априори относить создание образа к репродуктивному типу деятельности, а оперирование образом, при условии абстрагирования от исходной наглядности, — к продуктивным процессам, так как деятельность представлявания носит преобразующий характер в обоих случаях. В процессе создания пространственного образа мысленно преобразуется исходная наглядная опора. В процессе оперирования образом мысленно трансформируется сам образ в условиях полного абстрагирования от наглядности. И все же основную функцию пространственного мышления психологи видят в свободном оперировании пространственными образами, созданными на различной наглядной основе.

Использование динамической системы GeoGebra позволяет организовать деятельность по оперирование образами при обучении геометрии, удовлетворяющую следующим критериям:

1. Богатство и своеобразие пространственных образов, возникающих на динамической наглядной основе основе 3D-графики.

2. Качественное своеобразие деятельности представлявания в процессе оперирования пространственными образами. Содержание деятельности, благодаря возможностям динамической среды GeoGebra, включает как предметные действия, реализуемые на вещах, так и целостные операции, которые на вещах не реализуются.

Методика развития деятельности студентов-бакалавров по освоению геометрических понятий на уровне представлений реализована в рамках элективного курса «Решение задач аналитической и дифференциальной геометрии с применением компьютерных математических систем». Целевыми ориентирами курса выступают раскрытие социальной, практической и личностной значимости предметного содержания, овладение обучающимися знаниями о геометрической картине мира, образным и целостным восприятием действительности.

Формирование *ценностного отношения* к геометрическим понятиям обеспечивается посредством изложения предметного содержания в контексте мировой и национальной культуры. Например, введение понятия «естественный трёхгранник кривой» сопровождается знакомством студентов с именем французского математика, профессора Лионского университета Жана Фредерика Френе (19 в), нашедшего соотношения между направляющими косинусами касательной, нормали и бинормали. Иллюстрируется последующее развитие метода трёхгранника Г. Дарбу, Л. Эйлером, Э. Картаном, приводящее к его приложениям в дифференциальной геометрии, геометрической оптике (законы преломления и отражения световых лучей) и механике (реакции материальной точки, движущейся по гладкой линии).

Реализация этапа побуждения осуществляется в рамках элективного курса содержательными и методическими средствами по двум основным линиям. *Историчность* обеспечивается посредством культурно-исторического дискурса — вовлечения в учебный процесс сведений об объектах, входящих в культурно-историческую зону. Так, линии второго порядка — эллипс, парабола, гипербола — представлены как результат сечения прямого кругового конуса плоскостями, не проходящими через его вершину, при решении Менехмом (4 в. до н. э.) знаменитой задачи об удвоении куба. *Прикладная направленность* геометрии иллюстрируется на примерах решения различных практических задач. В частности, показывается связь возникновения понятия конформного отображения с запросами математической

картографии: использование стереографической проекции Птолемеем (2 в н.э.) в его «Географии», Герхардом Кремером (1569 г.) при создании одной из первых карт мира. Демонстрируются приложения конформных отображений в кристаллографии и геологии при решении задач определения углов падения и простирания пластов, ориентации горных выработок, наклонных буровых скважин.

Важно добиваться понимания будущими бакалаврами того, что геометрический взгляд на мир пронизывает всю современную математику: геометрические идеи в теории обыкновенных дифференциальных уравнений привели к созданию теории динамических систем; в теории уравнений в частных производных – к микролокальному анализу; в вариационном исчислении – к теории геодезических потоков. Современная физика также теснейшим образом связана с геометрией: классическая механика использует язык и методы римановой геометрии, в квантовой механике используется комплексная геометрия и геометрия гильбертовых пространств. Геометрические образы издавна использовались в изобразительном искусстве и архитектуре (Леонардо да Винчи, Дюрер, Дезарг, Монж и др.). Геометрия перспективы и начертательная геометрия выступают основными инструментами современных художников, архитекторов и дизайнеров. 3D-технологии, в основе которых лежат проективная и вычислительная геометрия, используются в кино и телевидении.

Дидактическим условием эффективности этапа социокультурной коммуникации выступает специальным образом организованная учебная деятельность и последовательность заданий, восходящая от простых преобразований образа с опорой на восприятие к все более сложным типам оперирования, осуществляемым в уме.

В качестве содержательного материала курса отобраны ключевые разделы аналитической и дифференциальной геометрии линий и поверхностей, структурированные согласно принципам модульности и интеграции с основной образовательной программой: задачи на вывод уравнений и построение плоских линий и поверхностей, на исследование их взаимного расположения, преобразование и моделирование. Указанные задачи, структурированные с учётом преемственности знаний, получаемых в ходе их решения, повышения сложности алгоритмов и ситуации неопределённости, представлены в учебном пособии [11].

Задачи на формирование образа предполагают создание графической и компьютерной модели изучаемого объекта, выделение его существенных свойств, переход от первичного образа к представлению. Уровень развития мыслительной деятельности характеризуется такими критериями, как *полнота образа* (количество выделенных объектов, выразительных деталей, единых связей между признаками), *оригинальность* (новизна, яркость, ёмкость образа), *гибкость* (число переключений с одного класса объектов на другой), *ассоциативность* (наличие близких и далёких ассоциаций, возникающих у учащихся). Контроль за динамикой уровня развития осуществляется на основе показателей, к которым мы отнесли умения анализировать существенные признаки фигуры, её пространственные и метрические соотношения, мысленно группировать отдельные элементы фигуры, вычленять данные и искомые элементы, определять фигуру как носитель понятия.

Решение *задач на оперирование образом* требует изменения положения геометрического объекта в пространстве, а также его структуры. Выполнение подобных действий осуществляется в воображении: учащийся мысленно отвлекается от объекта, прослеживает его преобразования и воплощает новый образ в соответствии с заданными условиями. Критериями сформированности умения оперировать образами выступают *широта оперирования* (возможность выполнять преобразования на различном графическом материале) и *свобода оперирования*,

проявляющаяся в лёгкости и скорости перехода от одного графического изображения к другому, без привязанности к конкретной точке отсчёта.

Уровень трудности *задач на ориентацию в пространстве* определяется возможностью выбора точки отсчёта: учащийся либо выбирает её самостоятельно, либо решает задачу с заданной извне начальной точкой. Наиболее трудным является способ ориентации в пространстве при произвольно и постоянно меняющейся точке отсчёта, характерный для высокого уровня развития мышления, обеспечивающего полное понимание геометрического пространства.

Базовыми *средствами обучения* в рамках элективного курса по геометрии выступают образовательные технологии смешанного типа, интегрирующие традиционное обучение и компьютерные программы, реализующие статические и динамические интерпретации модельных представлений геометрических объектов и связей между ними. Компьютерные математические системы (Axiom, Maxima, Scilab) обеспечивают технологически единую обработку задач геометрической направленности при задании условий на языке пользователя. Они имеют инновационную структуру и способствуют развитию интеллектуального потенциала обучающихся в результате интеграции доступности, запоминаемости, интерактивности.

Развивающий потенциал компьютерных математических систем как средства обучения геометрии мы видим в реализации *метода компьютерного моделирования*, основанного на поиске, отображении в моделях и анализе существенных характеристик геометрических объектов. Создание образа обеспечивается возможностью визуализировать объект, заданный в знаково-символической форме, наблюдать его в динамике посредством перехода из графического режима в символьный (рис. 1).

Оперирование образом осуществляется посредством изменения положения объекта в пространстве при неподвижности точки наблюдения, а также в процессе изменения параметров компьютерной модели.

Ориентация в пространстве обеспечивается возможностью изменения точки обзора в режиме реального времени. Так, решая задачу по теме «Сопровождающий трёхгранник кривой», студенты выполняют построение заданных геометрических объектов и наблюдают их взаимное расположение с помощью функции вращения *RealTime* (рис. 2).

Базовой формой организации учебной деятельности бакалавров, ориентированной на развитие мыслительной деятельности по освоению понятий, выступает лабораторной практикum по решению геометрических задач. Преимущество лабораторных занятий мы видим в интеграции теоретико-методологических знаний, практических умений и навыков студентов в едином процессе деятельности учебно-исследовательского характера. В рамках элективного курса по геометрии реализуются следующие дидактические функции лабораторного практикума: мотивационно-стимулирующая – развитие познавательного интереса посредством включения студентов в продуктивную деятельность по исследованию и преобразованию компьютерных моделей геометрических объектов; обучающая – оптимизация процесса усвоения геометрических знаний (закрепление, углубление, расширение, систематизация, применение метода компьютерного моделирования как средства исследования задачи); развивающая – развитие пространственного компонента мышления на основе взаимодополнительности аналитического и синтетического метода изложения материала; рефлексивная – осознание студентом себя как субъекта деятельности, формирование у него потребности анализировать, контролировать и корректировать свои действия, оценивать их результаты.

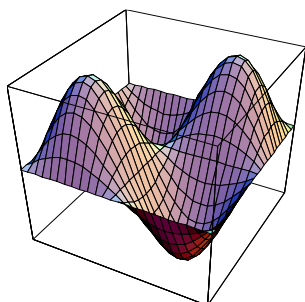


Рис. 1. Поверхность, имеющая седловую точку

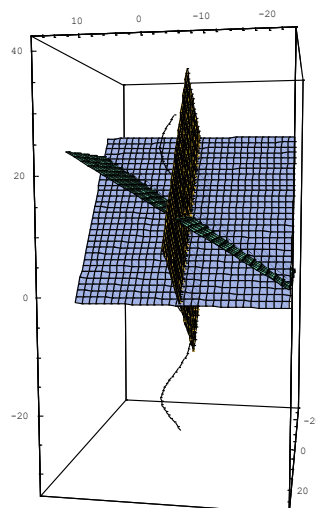


Рис. 2. Сопровождающий трёхгранник кривой

4. Обсуждение результатов

Разработка теоретических основ позволила провести экспериментальное исследование, выявить критерии и уровни развития мыслительной деятельности бакалавров педагогического образования по освоению понятий, определить факторы, влияющие на эффективность формирования обобщенных приёмов мышления. Опытно-экспериментальная работа по апробации технологии социокультурно-ориентированного обучения геометрии осуществлялась на базе института математики, естествознания и техники Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина. Участниками эксперимента выступали студенческие группы физико-математического профиля, проходящие обучение в рамках элективного курса «Решение задач аналитической и дифференциальной геометрии с применением компьютерных математических систем». Целью проводимого эксперимента являлась оценка динамики уровня развития мыслительной деятельности, проявляющейся в качественном и количественном изменении мотивационных и операциональных характеристик.

Таблица 2

Динамика развития ценностного отношения к геометрии у учащихся экспериментальной группы (чел.)

Уровень	Экспериментальная группа	
	До экспериментального обучения	После экспериментального обучения
Низкий	8	3
Средний	7	6
Высокий	2	8

В качестве параметра, характеризующего *личностный уровень* развития, рассматривалось ценностное отношение. Результаты диагностики данного показателя до и после экспериментального обучения, отраженные в таблице 2,

свидетельствуют об устойчивом повышении интереса студентов-бакалавров к геометрии в условиях реализации социокультурного подхода и методического сопровождения обучения в компьютерной среде.

Для определения предметного уровня развития пространственного компонента мыслительной деятельности бакалавров были проведены констатирующий (до обучения) и контрольный (после обучения) срезы с использованием разработанных диагностических заданий (таблица 3). Задания ориентированы на проверку умений создавать чертёж или компьютерную модель, осуществлять преобразования исходного образа (вращение, наложение, совмещение и т. п.), передавать в образе не только форму и размеры объекта, но и динамику пространственной размещённости его элементов, произвольно изменять точку отсчёта.

Таблица 3

Диагностические задания для оценки предметного уровня развития мыслительной деятельности по освоению геометрических понятий

Оценка уровня «создание образа восприятия - обобщенное представление»		
<i>Низкий</i>	<i>Средний</i>	<i>Высокий</i>
<p>Умение создавать двумерные и трёхмерные образы объектов по аналитическому выражению или конструктивному описанию – выполнять чертёж или компьютерную модель. Образы характеризуются статичностью и фрагментарностью, гибкость и оригинальность мышления не проявляются. <i>Окружность радиуса $R=5$ проходит через полюс, ее центр лежит на полярной оси. Составить уравнение и построить эту окружность в полярной системе координат.</i></p>	<p>Умение создавать двумерные и трёхмерные образы объектов, дополнять чертёж или компьютерную модель новыми элементами в соответствии с заданными условиями, верно отражать их форму и величину. Образы статичны, но целостны, в некоторых случаях оригинальны, имеют выразительные детали. <i>В репере (O, \vec{i}, \vec{j}) заданы уравнения гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ и прямой $y = kx + m$. При каком необходимом и достаточном условии прямая</i></p> <ol style="list-style-type: none"> 1) касается гиперболы; 2) пересекает гиперболу; 3) не имеет с гиперболой общих точек? 	<p>Умение создавать двумерные и трёхмерные образы объектов, дополнять чертёж или компьютерную модель новыми элементами, верно отражать их форму и величину, а также пространственную размещённость относительно заданной системы отсчёта. Образы целостны, разнообразны, оригинальны, проявляются быстрота, гибкость мышления, происходит «оживление» объектов. <i>Найти уравнение поверхности, образованной вращением гиперболы $\frac{x^2}{16} - \frac{z^2}{25} = 1$ вокруг 1) оси Ox, 2) оси Oz.</i></p>

НОВШЕСТВА ФГОС И ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ ТЕХНОЛОГИИ

Оценка уровня «предприятие (образ-концепт)»		
<i>Низкий</i>	<i>Средний</i>	<i>Высокий</i>
<p>Умение изменять пространственно положение имеющихся в представлении образов – выполнять их перемещение, не затрагивая структурных особенностей.</p> <p><i>Найти образ параболы</i></p> <p>1) <i>при повороте на 90, на - 90</i></p> <p>2) <i>при композиции поворота с центром в начале координат на угол 90 и параллельного переноса $a=(m,n)$.</i></p> <p>Самостоятельный выбор точки отсчёта. <i>Найти геометрическое место точек, для каждой из которых расстояние до некоторой фиксированной точки F плоскости (фокуса) равно расстоянию до некоторой фиксированной прямой d (директрисы), не проходящей через фокус.</i></p>	<p>Умение изменять не только положение исходного образа в пространстве, но и его структуру, строение. Проявляется широта оперирования образами, выражающаяся в свободе использования различных изображений.</p> <p><i>Найти коэффициент сжатия, переводящего эллипс $\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{8} = 1$ в окружность; указать количество решений задачи и изобразить эти решения.</i></p> <p>Решение задачи с объективно заданной точкой отсчёта. <i>Построить параболу в прямоугольной системе координат и найти её параметр, если в этой системе заданы координаты фокуса $F(4, 2)$ и уравнение директрисы $x+3y-6=0$.</i></p>	<p>Умение изменять исходный образ по пространственному положению и по структуре одновременно, неоднократно.</p> <p><i>Преобразованием какой поверхности получается эллипсоид</i></p> $\frac{(x-2)^2}{36} + \frac{(y+4)^2}{16} + \frac{(z-1)^2}{9}$ <p><i>при параллельном переносе на вектор $\vec{a}(1,2,3)$ и трех последовательных сжатиях пространства к координатным плоскостям, если коэффициент сжатия к Oxy равен $3/4$, к плоскости Oxz равен $4/5$, к плоскости Oyz равен $3/4$? Решение задачи при произвольно меняющейся точке отсчёта. В прямоугольной системе координат и найти линию, образованную движущейся точкой $M(x,y,z)$, которая равномерно вращается вокруг оси Oz и одновременно перемещается параллельно оси Oz.</i></p>

Для эмпирического исследования необходимо, чтобы выделенные уровни развития мыслительной деятельности обладали категорией меры. В связи с этим была построена порядковая шкала оценки уровней, сопоставляющая каждому качественному показателю (мыслительному умению) количественный показатель (балл). Показателям низкого, среднего и высокого уровней были присвоены соответственно 1, 2 и 3 балла, что позволило определить в экспериментальной группе процент студентов, имеющих тот или иной уровень пространственного мышления. Результаты диагностического среза представлены в таблице 4. Очевидно, на начальном этапе обучения в экспериментальной группе достаточно высок процент студентов с низким и средним уровнем пространственного мышления.

Таблица 4

Уровни развития пространственного компонента мыслительной деятельности до начала экспериментального обучения (%)

Низкий	Средний	Высокий
39	59	2

В течение семестра реализовывалась технология социокультурно-ориентированного обучения геометрии, ориентированная на развитие пространственного компонента мыслительной деятельности будущих бакалавров. Результаты контрольного среза, проведённого после изучения курса, отражены в таблице 5.

Таблица 5

Уровни развития пространственного компонента мыслительной деятельности после экспериментального обучения (%)

Низкий	Средний	Высокий
23	65	12

Для сравнения уровня развития пространственного компонента мыслительной деятельности до и после экспериментального обучения был использован Т-критерий Вилкоксона (таблица 6), позволяющий сопоставлять показатели, измеренные в разных условиях на одной и той же выборке. Были выдвинуты гипотезы:

H_0 – интенсивность сдвигов в сторону понижения уровня развития пространственного мышления не превышает интенсивности сдвигов в сторону повышения;

H_1 – интенсивность сдвигов в сторону понижения уровня развития пространственного мышления превышает интенсивность сдвигов в сторону повышения.

Таблица 6

Расчет Т-критерия Вилкоксона

Номер испытуемого	Количество баллов за констатирующий срез C_1	Количество баллов за контрольный срез C_2	$\Delta = C_1 - C_2 $	Ранговый номер Δ
1	34	38	4	6,5
2	50	53	3	5
3	45	46	1	2
4	32	42	10	15
5	18	27	9	13,5
6	50	48	2	3,5
7	16	24	8	12
8	30	23	7	10,5
9	24	29	5	8
10	22	20	2	3,5
11	20	26	6	9
12	39	51	12	16

НОВШЕСТВА ФГОС И ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ ТЕХНОЛОГИИ

13	36	50	14	17
14	49	45	4	6,5
15	16	23	7	10,5
16	19	28	9	13,5
17	46	46	0	1

Сумма рангов нетипичных (отрицательных) сдвигов составляет эмпирическое значение критерия Т: $T_{эмп} = \sum R_{"-"} = 24$. По таблице критических значений критерия Вилкоксона определяем критическое значение T для $n=17$. При уровне значимости 0,05 $T_{кр.} = 41$, а при уровне значимости 0,01 $T_{кр.} = 27$. Известно, что типичный (положительный) сдвиг является достоверно преобладающим по интенсивности, если $T_{эмп} \leq T_{0,05}$, и тем более достоверно преобладающим по интенсивности, если $T_{эмп} \leq T_{0,01}$. В нашем случае $T_{эмп} \leq T_{0,01}$, следовательно, сдвиг уровня развития пространственного компонента мыслительной деятельности в сторону увеличения является достоверно преобладающим.

5. Заключение

Проведённое исследование позволяет сформулировать следующие выводы.

1. Установлено, что социокультурно-ориентированное обучение геометрии студентов-бакалавров педагогического образования в электронной образовательной среде вуза способствует эффективному формированию мыслительной деятельности по освоению научных понятий на следующих уровнях: *низкий*, свидетельствующий об освоении умений выполнять чертёж или компьютерную модель, изменять пространственное положение имеющегося в представлении образа, самостоятельно выбирать точку отсчёта; *средний*, сигнализирующий о сформированности умений дополнять чертёж или компьютерную модель новыми элементами в соответствии с заданными условиями, изменять структуру имеющегося в представлении образа, решать задачи с объективно заданной точкой отсчёта; *высокий*, соответствующий способности одновременно изменять пространственное положение и структуру имеющегося в представлении образа, решать задачи при произвольно меняющейся точке отсчёта.

2. Развитая мыслительная деятельность по освоению геометрических понятий обеспечивает формирование умений по решению задач, требующих преобразования исходных образов, созданных на различной графической основе, а также ориентации в практическом и теоретическом пространстве. Основными качественными показателями, характеризующими уровень развития мыслительной деятельности по освоению понятий на уровне представлений, являются полнота образа, тип оперирования образом, широта оперирования, используемая система отсчёта (пространственная ориентация «от себя», от заданной базы, от произвольной точки). Специфика развития мыслительной деятельности может быть определена следующим образом: *на этапах создания образа восприятия и формирования обобщённых представлений* происходит знаковая натурализация геометрических понятий посредством предметных действий с фигурами, на основе взаимодополнительности аналитического и синтетического методов подачи информации решается психодидактическая задача осознания; *на этапе формирования предпонятия (образа-концепта)* осваиваются способы оперирования чертежом и ориентации в пространстве, в результате преодоления знаковой натурализации решается психодидактическая задача осмысления.

3. Диагностика предметного уровня развития мыслительной деятельности показала довольно интенсивную динамику у респондентов экспериментальной группы: заметный рост высокого (на 10%) и среднего (на 6%) уровней при снижении низкого (на 16%) уровня. Таким образом, социокультурно-ориентированное обучение геометрии в вузе с применением компьютерных математических систем оказывает положительное воздействие на уровень профессиональной компетентности будущих учителей математики.

Пролонгация эксперимента позволит достигнуть более высокого результата в развитии личностных и предметных результатов сформированности мыслительной деятельности у бакалавров педагогического образования.

Список литературы

1. Асмолов А.Г. (1990) Психология личности. М.: МГУ.
2. Атанасян С.Л., Покровский В.Г., Ушаков А.В. (2015) Геометрия. В 2 ч. Бином. Лаборатория знаний.
3. Бреус И.А. (2002) Развитие пространственного воображения будущих учителей математики в процессе их геометрической подготовки: Дис....канд. пед. наук. Ростов н/Д.
4. Гельфман Э.Г., Холодная М.А. (2006) Психодидактика школьного учебника. Интеллектуальное воспитание учащихся. СПб.: Питер.
5. Глейзер Г.Д. (1978) Развитие пространственных представлений школьников при обучении геометрии. М.: Педагогика.
6. Гусев В.А. (2003) Психолого-педагогические основы обучения математике. М.: ООО «Издательство «Вербум-М», ООО «Издательский центр «Академия».
7. Давыдов В.В. (2003) Новый подход к пониманию структуры и содержания деятельности // Вопросы психологии. №2. С.42-49.
8. Добренков В.И., Нечаев В.Я. (2003) Общество и образование. М.: ИНФРА-М.
9. Каплунович И.Я. (1996) Развитие пространственного мышления школьников в процессе обучения математике. Новгород, НРЦРО.
10. Колягин Ю.М. (1977) Задачи в обучении математике. Часть I. Математические задачи как средство обучения и развития учащихся. М.: Просвещение.
11. Красникова Л.В. Подаева Н.Г. (2006) Лабораторно-практические занятия по решению геометрических задач с применением пакета Mathematica: учебно-методическое пособие. Елец ЕГУ им. И.А. Бунина.
12. Леонтьев А.Н. (2004) Деятельность. Сознание. Личность. М.: Смысл; Академия.
13. Леонтьев А.Н. (2000) Лекции по общей психологии. М.: Смысл.
14. Лернер И.Я. (1974) Проблемное обучение. М.: Знание.
15. Незнамова М.А. (2004) Развитие математического мышления студентов университета: Дис.... канд. пед. наук. Оренбург.
16. Подаева Н.Г. (2012) Социокультурная концепция математического образования: монография. Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина.
17. Подаева Н.Г., Подаев М.В. (2014) Обновление содержания школьного математического образования: социокультурный подход: монография. Санкт-Петербург: Лань.
18. Подаева Н.Г., Подаев М.В., Масина О.Н. Социокультурно-ориентированное обучение математике в общеобразовательной школе: структурно-функциональные компоненты// Психология образования в поликультурном пространстве. 2017. № 37 (1). С. 91-96.
19. Роттенберг В.С., Аршавский В.В. (1984) Поисковая активность и адаптация. М.

20. Рубинштейн С.Л. (1999) Основы общей психологии. СПб: ЗАО «Изд-во «Питер».
21. Талызина Н.Ф. (1984) Управление процессом усвоения знаний (психологические основы). М.: Изд-во Моск. ун-та.
22. Устиловская А.А. (2008) Психологические механизмы преодоления знаковой натурализации идеального содержания геометрических понятий: Дис. ...канд. псих. наук. М.
23. Холодная М.А. (2002) Психология интеллекта. Парадоксы исследования. СПб.: Питер.
24. Шадриков В.Д. (1996) Психология деятельности и способности человека: учебное пособие. М.: Издательская корпорация «Логос».
25. Эльконин Д.Б. (1989) Избранные психологические труды. М.
26. Якиманская И.С. (1980) Развитие пространственного мышления школьников. М.: Педагогика.

THE DEVELOPMENT ACTIVITIES OF UNDERGRADUATE STUDENTS DEVELOPMENT OF GEOMETRICAL CONCEPTS IN E-LEARNING ENVIRONMENT: A SOCIAL AND CULTURAL CONTEXT

N.G. Podaeva

Dr. Sci. (Pedagogy), professor
podaeva@mail.ru

Yelets

L.V. Zhuk

Cand. Sci. (Pedagogy), associate professor
krasnikovalarisa@yandex.ru

Yelets

Bunin Yelets State University

Bunin Yelets State University

Abstract. Relevance of the study. In the transition from information-translational model of school mathematical education to personal activity, aimed at the formation of students' metasubject skills and universal educational actions, determined by the increased requirements for the level of professional competence of the future teacher of mathematics. Its most important component is mathematical thinking—a complex dynamic structure, a special place in which belongs to the concepts — a form of thinking that reflects the General and, moreover, the essential properties of objects and phenomena. **The aim of the research** is to develop a methodology for the development of mental activity of future teachers of mathematics for the development of scientific concepts. Achieving the goal is possible through the solution of tasks: the study of mental structure, providing in the situation of learning geometry formation of understanding and methods of action with geometric concepts; substantiation of organizational and pedagogical conditions for the effective development of mental activity of future teachers of mathematics for the development of scientific concepts; determination of levels and indicators of development, development of diagnostic tools. **Method of research.** Didactic condition for the effectiveness of the development of mental activity of future teachers of mathematics for the development of geometric concepts is a specially organized educational activity, accompanied by the method of computer modeling and developed a system of tasks in the framework of

the elective course "Solving problems of analytical and differential geometry using computer mathematical systems." The objectives of the course are the disclosure of social, practical and personal significance of the subject matter, the mastery of students' knowledge of the geometric picture of the world, the imaginative perception of reality.

Research result. The results of the analysis of statistical data confirm the hypothesis of a significant positive impact of socio-cultural-oriented teaching geometry in high school with the use of computer mathematical systems on the level of professional competence of future teachers of mathematics. **Conclusion.** The research is carried out in the framework of the strategy of updating the content of mathematical education in the direction of socio-cultural paradigm. Elements of the technology of teaching geometry to future teachers of mathematics, aimed at the development of mental activity of future teachers of mathematics for the development of geometric concepts through a phased solution of psychodidactic problems of awareness, understanding, generalization. The materials contained in the article can be introduced into the practice of University teachers of geometry, as well as teachers of specialized mathematical classes.

Keywords: socio-cultural-oriented teaching of geometry, mental activity of future teachers of mathematics on the development of geometric concepts, the method of computer modeling.

References

1. Asmolov A.G. (1990) Psihologiya lichnosti [Psychology of Personality]. M.: MGU.
2. Atanasyan S.L., Pokrovskij V.G., Ushakov A.V. (2015) Geometriya. V 2 ch. [Geometry] Binom. Laboratoriya znaniy.
3. Breus I.A. (2002) Razvitie prostranstvennogo voobrazheniya budushchih uchitelej matematiki v processe ih geometricheskoj podgotovki [Development of spatial imagination of future teachers of mathematics in the process of their geometric training]: Dis....kand. ped. nauk. Rostov n/D.
4. Gel'fman E.H.G., Holodnaya M.A. (2006) Psihohidaktika shkol'nogo uchebnika. Intellektual'noe vospitanie uchashchihsya [Psychodidactic school textbook. Intellectual education of students]. SPb.: Piter.
5. Glejzer G.D. (1978) Razvitie prostranstvennyh predstavlenij shkol'nikov pri obuchenii geometrii [The development of spatial representations of schoolchildren in teaching geometry]. M.: Pedagogika.
6. Gusev V.A. (2003) Psihologo-pedagogicheskie osnovy obucheniya matematike [Psychological and pedagogical foundations of teaching mathematics]. M.: OOO «Izdatel'stvo «Verbum-M», OOO «Izdatel'skij centr «Akademiya».
7. Davydov V.V. (2003) Novyj podhod k ponimaniyu struktury i sodержaniya deyatel'nosti [New approach to understanding the structure and content of activities] // Voprosy psihologii. №2. S.42-49.
8. Dobren'kov V.I., Nechaev V.YA. (2003) Obshchestvo i obrazovanie [Society and Education]. M.: INFRA-M..
9. Kaplunovich I.Ya. (1996) Razvitie prostranstvennogo myshleniya shkol'nikov v processe obucheniya matematike [The development of spatial thinking of students in the process of learning mathematics]. Novgorod, NRCRO.
10. Kolyagin Yu.M. (1977) Zadachi v obuchenii matematike. CHast' I. Matematicheskie zadachi kak sredstvo obucheniya i razvitiya uchashchihsya [Challenges in learning mathematics. Part I. Mathematical problems as a means of learning and development of students]. M.: Prosveshchenie.
11. Krasnikova L.V. Podaeva N G. (2006) Laboratorno-prakticheskie zanyatiya po

- resheniyu geometricheskikh zadach s primeneniem paketa Mathematica: uchebno-metodicheskoe posobie [Laboratory and practical classes in solving geometric problems using the Mathematica package: a training manual]. Elets, EGU.
12. Leont'ev A.N. (2004) Deyatel'nost'. Soznanie. Lichnost' [Activity Consciousness. Personality]. M.: Smysl; Akademiya.
 13. Leont'ev A.N. (2000) Lekcii po obshchej psihologii [Lectures on general psychology]. M.: Smysl.
 14. Lerner I.YA. (1974) Problemnoe obuchenie [Problem learning]. M.: Znanie.
 15. Neznamova M.A. (2004) Razvitie matematicheskogo myshleniya studentov universiteta [Development of mathematical thinking of university students]: Dis.... kand. ped. nauk. Orenburg.
 16. Podaeva N.G. (2012) Sociokul'turnaya koncepciya matematicheskogo obrazovaniya: monografiya [Socio-cultural concept of mathematics education: monograph]. Elets: EGU.
 17. Podaeva N.G., Podaev M.V. (2014) Obnovlenie sodержaniya shkol'nogo matematicheskogo obrazovaniya: sociokul'turnyj podhod [Updating the content of school mathematics education: a sociocultural approach: a monograph]: monografiya. Sankt-Peterburg: Lan'.
 18. Podaeva N.G., Podaev M.V., Masina O.N. Sociokul'turno-orientirovannoe obuchenie matematike v obshcheobrazovatel'noj shkole: strukturno-funkcional'nye komponenty [Socio-cultural-oriented education of mathematics in secondary school: structural and functional components] // Psihologiya obrazovaniya v polikul'turnom prostranstve. 2017. № 37 (1). S. 91-96.
 19. Rottenberg V.S. Arshavskij V.V. (1984) Poiskovaya aktivnost' i adaptaciya [Search activity and adaptation]. M.
 20. Rubinshtejn S.L. (1999) Osnovy obshchej psihologii [Basics of general psychology]. SPb: ZAO «Izd-vo «Piter».
 21. Talyzina N.F. (1984) Upravlenie processom usvoeniya znaniy (psihologicheskie osnovy) [Managing the process of learning (psychological foundations)]. M.: Izd-vo Mosk. un-ta.
 22. Ustilovskaya A.A. (2008) Psihologicheskie mekhanizmy preodoleniya znakovoj naturalizacii ideal'nogo sodержaniya geometricheskikh ponyatij [Psychological mechanisms for overcoming sign naturalization of the ideal content of geometric concepts]: Dis. ...kand. psih. nauk. M.
 23. Holodnaya M.A. (2002) Psihologiya intellekta. Paradoksy issledovaniya [The psychology of intelligence. Research paradoxes]. SPb.: Piter.
 24. Shadrikov V.D. (1996) Psihologiya deyatel'nosti i sposobnosti cheloveka: uchebnoe posobie [Psychology of activity and abilities of a person: study guide
 25. Selected psychological works]. M.: Izdatel'skaya korporaciya «Logos».
 26. Ehl'konin D.B. (1989) Izbrannye psihologicheskie trudy [Selected psychological works]. M.
 27. Yakimanskaya I.S. (1980) Razvitie prostranstvennogo myshleniya shkol'nikov [The development of spatial thinking students]. M.: Pedagogika.