ПРИКЛАДНЫЕ АСПЕКТЫ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

УДК 517.956.6

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО СМЕШАННО-СОСТАВНОГО УРАВНЕНИЯ

Александр Николаевич Зарубин
д.ф.-м.н., профессор
matdiff@yandex.ru
г. Орел
Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева

Елена Викторовна Чаплыгина
к.ф.-м.н., доцент
lena260581@yandex.ru
г. Орел
Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева

Аннотация. Исследуется задача Трикоми для функционально-дифференциального смешанно-составного опережающе-запаздывающего уравнения Лаврентьева-Бицадзе. Доказаны теоремы единственности и существования дважды непрерывно дифференцируемого решения.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, интегральное уравнение, разностное уравнение, функциональное запаздывание и опережение.

1. ВВЕДЕНИЕ

Уравнения в частных производных смешанно-составного типа [1], [2] служат математическими моделями для многих прикладных задач (нелинейная оптика, волны в магнитоактивной плазме, диссипативные процессы в проводящих средах, внутренние волны, спиновые волны) [3]. Рассматриваемая работа посвящена методу исследования краевой задачи Трикоми для уравнений, содержащих произведение кратных неприводимых функциональных операторов

$$\boldsymbol{LQ}u(x,y)=0, \tag{1}$$

где

$$\boldsymbol{L}\equiv\partial^2/\partial x^2+(\operatorname{sgn}y)\partial^2/\partial y^2 \text{ -} \tag{2}$$

оператор [4] Лаврентьева – Бицадзе;

$$\boldsymbol{Q}\equiv\prod_{r=1}^{p}\Big(A_r(x)+\sum_{k=1}^{n}B_{kr}(x)\mathbf{P}_x^{x-\alpha_1^k(x)}H(x)+\sum_{k=1}^{m}C_{kr}(x)\mathbf{P}_x^{x-\alpha_2^k(x)}H(x_3-x)\Big)^{l_r} - \tag{3}$$

функциональный опережающе-запаздывающий оператор;

$\mathbf{P}_x^{\theta(x)}$ - оператор сдвига по переменной x: $\mathbf{P}_x^{\theta(x)}H(x)u(x,y)=H(x-\theta(x))u(x-\theta(x),y);$

$\mathbf{P}_x^{\theta(x)}H(x_3 - x)u(x,y) = H(x_3 - x + \theta(x))u(x - \theta(x), y);$ $H(\xi)$ -функция Хевисайда; $A_r(x), B_{kr}(x), C_{kr}(x)$-непрерывные достаточно гладкие функции; $n, m, p, l_r \in N$; $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$- сохраняющие ориентацию взаимно обратные диффеоморфизмы класса C^2, удовлетворяющие условиям:

$$\alpha_1(x) < x, \alpha_1'(x) > 1\ (\alpha_1'(x) < 1) \text{ и } \alpha_2(x) > x, \alpha_2'(x) < 1\ (\alpha_2'(x) > 1),$$

то есть представляющие собой растягивающе (сжимающе) - запаздывающее и сжимающе (растягивающе)-опережающее отображения, для которых выполняются тождества

$$\alpha_{3-j}(\alpha_j(x)) = x\ (j = 1,2), \tag{4}$$

где x принадлежит области определения отображения $\alpha_j(x)$. Обозначим $x_0 = 0$ и зададим конечную последовательность x_n любым из следующих равносильных вследствии тождеств (4) равенств:

$$x_n = \alpha_1(x_{n+1}),\ \ x_{n+1} = \alpha_2(x_n) \tag{5}$$

предполагая, что значения x_n определены и $\alpha_2(x_0) > 0$.

Например, если $n = \overline{-2,5}$, то, в силу (5), $x_{-2} = \alpha_1^2(x_0) < x_{-1} = \alpha_1^1(x_0) < 0 =$
$= x_0 = \alpha_2^0(x_0) < x_1 = \alpha_2^1(x_0) < x_2 = \alpha_2^2(x_0) < x_3 = \alpha_2^3(x_0) < x_4 = \alpha_2^4(x_0) < x_5 = \alpha_2^5(x_0).$

Здесь и далее обозначено $\alpha_j^m(x) \equiv \underbrace{\alpha_j(\alpha_j(\ldots(\alpha_j(x))\ldots))}_{m\ раз}$, если $m > 0, \alpha_j^0(x) \equiv x;$

$\alpha_j^m(x) \equiv \underbrace{\alpha_{3-j}(\alpha_{3-j}(\ldots(\alpha_{3-j}(x))\ldots))}_{-m\ раз}$, если $m < 0,\ j = 1,2.$

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ФАКТОРИЗАЦИЯ

Без ограничения общности и для наглядности, рассмотрим уравнение (1) в смешанной области $D = D^+ \cup D^- \cup I$, когда $l_r = 1; n = 2, m = 1, B_{1r}(x) = 0,\ B_{2r}(x) = -B_r(x),$ $C_{1r}(x) = C_r(x),$ а оператор (3) (произведение неприводимых функциональных опережающе-запаздывающих операторов) имеет вид

$$\boldsymbol{Q_1} \equiv \prod_{r=1}^{p}(A_r(x) - B_r(x)\mathbf{P}_x^{x-\alpha_1^2(x)}H(x) + C_r(x)\mathbf{P}_x^{x-\alpha_2(x)}H(x_3 - x)); \tag{6}$$

то есть уравнение

$$\boldsymbol{LQ_1}\ u(x,y) = 0\ , \tag{7}$$

где L-оператор Лаврентьева – Бицадзе (2), в области D с линией изменения типа $I = \{(x,y): x_0 < x < x_3, y = 0\}$; $D^+ = D_0^+ \cup \cup D_1^+ \cup D_2^+ \cup J$ и $D^- = D_0^- \cup D_1^- \cup D_2^-$ - соответственно эллиптическая и гиперболическая части области D, причем

$$D_k^+ = \{(x,y): x_k < x < x_{k+1}, 0 < y < \sigma_k(x)\}\ \ (k = -2,-1,0,1,2,3);$$
$$D_k^- = \{(x,y): -y < \alpha_1^k(x) < y + x_1,\ \ -x_1/2 < y < 0\}\ \ (k = -2,-1,0,1,2,3);$$
$$\sigma(x) = \bigcup_{k=0}^{2}\sigma_k(x),\ x_0 < x < x_3$$

и $\sigma_k(x) = h + \sqrt{\alpha_1^k(x)(x_1 - \alpha_1^k(x))},\ x_k \le x \le x_{k+1}\ (k = -2,-1,0,1,2,3)\ (0 < h \equiv const)$;

то есть $\sigma_0(\alpha_1^k(x)) = \sigma_k(x)\ (k = -2,-1,0,1,2,3)$ и, в частности, $y = \sigma_0(x) = h + \sqrt{x(x_1 - x)}$ – полуокружность

$$(x-x_1/2)^2+(y-h)^2=(x_1/2)^2,\ x_0\le x\le x_1;$$

$$J=J_1\cup J_2, \text{ где } J_k=\{(x,y): x=x_k, 0<y<h\}\ (k=1,2);\ I=\bigcup_{k=0}^{2} I_k,$$

$$I_k=\{(x,y): x_k<x<x_{k+1}, y=0\}\ (k=0,1,2).$$

Тип функциональных отклонений очевиден из представлений

$$u(\alpha_1^2(x),y)=u(x-(x-\alpha_1^2(x)),y)=u(x-\tau_1(x),y),$$

$$u(\alpha_2(x),y)=u(x+(\alpha_2(x)-x),y)=u(x+\tau_2(x),y),$$

где $\tau_1(x)=x-\alpha_1^2(x)>0,\ \tau_2(x)=\alpha_2(x)-x>0.$

Задача T. *Найти в области* D *решение* $u(x,y)\in C(\overline{D})\cap C^1(D\setminus J)\cap$ $\cap\, C^2(D\setminus(J\cup I))$ *уравнения (7), удовлетворяющее условиям*

$$u(x,\sigma_k(x))=\varphi_k(x),\ x_k\le x\le x_{k+1}\ (k=0,1,2), \tag{8}$$

$$\begin{aligned} &u(x_0,y)=u(x_3,y)=0,\ 0\le y\le h; u(x,y)=0,\\ &(x,y)\in \overline{D}_k=\overline{D_k^+\cup D_k^-\cup I_k}\ (k=-2,-1,3), \end{aligned} \tag{9}$$

$$u(x,-\alpha_1^k(x))=\psi_k(x),\ x_k\le x\le \alpha_2^k(x_1/2)\ (k=0,1,2), \tag{10}$$

условиям сопряжения

$$u(x,0-)=u(x,0+)=\omega(x),\ x_0\le x\le x_3, \tag{11}$$

$$u_y(x,0-)=u_y(x,0+)=\nu(x),\ x_0<x<x_3,\ x\ne x_1,x_2, \tag{12}$$

условиям согласования

$$\psi_0(x_0)=\varphi_0(x_0)=\varphi_2(x_3)=B_1(x_3)=C_1(x_0)=0, \tag{13}$$

где $A_r(x), B_r(x), C_r(x)\ (r=\overline{1,p}), \varphi_k(x), \psi_k(x)\ (k=0,1,2), \alpha_1(x), \alpha_2(x)-$ *заданные непрерывные достаточно гладкие функции.*

Положив

$$V(x,y)=\boldsymbol{Q}_1 u(x,y), \tag{14}$$

приведем уравнение (7), с учетом (2), к системе

$$\begin{cases} LV(x,y)\equiv V_{xx}(x,y)+(sgny)V_{yy}(x,y)=0,\ (x,y)\in D, & (15)\\ Q_1u(x,y)=V(x,y),\ (x,y)\in D; & (14)\end{cases}$$

которую в терминах функций

$$V_k^{\pm}(x,y)=V(x,y),(x,y)\in D_k^{\pm}\ (k=0,1,2), \tag{16}$$

$$u_k^{\pm}(x,y)=u(x,y),\ (x,y)\in D_k^{\pm}\ (k=0,1,2), \tag{17}$$

с учетом (6), (9), можно записать, согласно (14), (15), в форме матричной системы

$$\begin{cases} \boldsymbol{L}\overline{V}(x,y)\equiv \overline{V}_{xx}(x,y)+(sgn\ y)\overline{V}_{yy}(x,y)=0,(x,y)\in D_0^{\pm}, & (18)\\ \boldsymbol{Q}_1(x)\overline{u}^{\pm}(x,y)=\overline{V}(x,y),(x,y)\in D_0^{\pm}, & (19)\end{cases}$$

(здесь и далее $j=1,2$), где

$$\overline{V}(x,y)=(V_0^{\pm}(x,y),V_1^{\pm}(\alpha_2(x),y),V_2^{\pm}(\alpha_2^2(x),y))^T, \tag{20}$$

$$\overline{u}^{\pm}(x,y)=(u_0^{\pm}(x,y),u_1^{\pm}(\alpha_2(x),y),u_2^{\pm}(\alpha_2^2(x),y))^T, \tag{21}$$

$$\boldsymbol{Q}_1(x)=\prod_{r=1}^{p}({}^rR(x)), \tag{22}$$

а матрица

$$^{r}R(x) = ({}^{r}\overline{R}_0(x), {}^{r}\overline{R}_1(x), {}^{r}\overline{R}_2(x))^T$$

имеет компоненты вида

$${}^{r}\overline{R}_0(x) = (A_r(x), C_r(x), 0),\ {}^{r}\overline{R}_1(x) = (0, A_r(\alpha_2(x)), C_r(\alpha_2(x))),$$
$${}^{r}\overline{R}_2(x) = (-B_r(\alpha_2^2(x)), 0, A_r(\alpha_2^2(x))).$$

Если определитель $\left|{}^{r}R(x)\right| \neq 0,\ x_0 \le x \le x_1,$ то единственное решение $u(x,y)$ задачи T для уравнения (7) в области D в терминах функций (16), (17), (20), (21) может быть получено из (19) в форме

$$\overline{u}^{\pm}(x,y) = \boldsymbol{Q}_1^{-1}(x)\overline{\mathrm{V}}(x,y),\ (x,y) \in D_0^{\pm}, \tag{23}$$

где

$$\boldsymbol{Q}_1^{-1}(x) = \prod_{r=1}^{p} ({}^{p-r+1}R^{-1}(x)), \tag{24}$$

и обратная матрица

$${}^{r}R^{-1}(x) = ({}^{r}\overline{R}_0^{-1}(x),\ {}^{r}\overline{R}_1^{-1}(x),\ {}^{r}\overline{R}_2^{-1}(x))^T$$

имеет компоненты

$${}^{r}\overline{R}_0^{-1}(x)\left|{}^{r}R(x)\right| = (A_r(\alpha_2(x))A_r(\alpha_2^2(x)), -C_r(x)A_r(\alpha_2^2(x)), C_r(x)C_r(\alpha_2(x))),$$

$${}^{r}\overline{R}_1^{-1}(x)\left|{}^{r}R(x)\right| = (-B_r(\alpha_2^2(x))C_r(\alpha_2(x)), A_r(x)A_r(\alpha_2^2(x)), -A_r(x)C_r(\alpha_2(x))),$$

$${}^{r}\overline{R}_2^{-1}(x)\left|{}^{r}R(x)\right| = (B_r(\alpha_2^2(x))A_r(\alpha_2(x)), -B_r(\alpha_2^2(x))C_r(x), A_r(x)A_r(\alpha_2(x))),$$

причем

$$\left|{}^{r}R(x)\right| = A_r(x)A_r(\alpha_2(x))A_r(\alpha_2^2(x)) - C_r(x)C_r(\alpha_2(x))B_r(\alpha_2^2(x)),$$

а для $\overline{\mathrm{V}}(x,y)$, согласно (8)-(13) и равенства (14), должна быть решена

Задача $\mathbf{T}_{\overline{\mathbf{V}}}$. *Найти в области* $D_0 = D_0^+ \cup D_0^- \cup I_0$ *решение* $\overline{\mathrm{V}}(x,y) \in C(\overline{D_0}) \cap C^2(D_0)$ *уравнения (18), удовлетворяющее краевым условиям*

$$\overline{\mathrm{V}}(x,\sigma_0(x)) = \boldsymbol{Q}_1(x)\overline{\varphi}(x),\ x_0 \le x \le x_1, \tag{25}$$

$$\overline{\mathrm{V}}(x_0,y) = \overline{\mathrm{V}}(x_1,y) = 0,\ 0 \le y \le h, \tag{26}$$

$$\overline{\mathrm{V}}(x,-y) = \boldsymbol{Q}_1(x)\overline{\psi}(x),\ x_0 \le x \le x_1/2, \tag{27}$$

условиям сопряжения

$$\overline{\mathrm{V}}(x,0-) = \overline{\mathrm{V}}(x,0+) = \boldsymbol{Q}_1(x)\overline{\omega}(x),\ x_0 \le x \le x_1, \tag{28}$$

$$\overline{\mathrm{V}}_y(x,0-) = \overline{\mathrm{V}}_y(x,0+) = \boldsymbol{Q}_1(x)\overline{\nu}(x),\ x_0 \le x \le x_1, \tag{29}$$

условиям согласования

$$\overline{\mathrm{V}}(x_0,x_0) = 0, \overline{\mathrm{V}}(x_0,h) = \overline{\mathrm{V}}(x_1,h) = 0, \tag{30}$$

где

$$\overline{\psi}(x) = (\psi_0(x), \psi_1(\alpha_2(x)), \psi_2(\alpha_2^2(x)))^T, \tag{31}$$

$$\overline{\varphi}(x) = (\varphi_0(x), \varphi_1(\alpha_2(x)), \varphi_2(\alpha_2^2(x)))^T \text{ -} \tag{32}$$

заданные непрерывные достаточно гладкие вектор-функции, а

$$\overline{\omega}(x) = (\omega(x), \omega(\alpha_2(x)), \omega(\alpha_2^2(x)))^T, \tag{33}$$

$$\overline{\nu}(x) = (\nu(x), \nu(\alpha_2(x)), \nu(\alpha_2^2(x)))^T - \tag{34}$$

вектор - функции подлежащие определению.

3. ОДНОЗНАЧНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ Т

Теорема 1. *Если* $A_r(x),\ B_r(x),\ C_r(x)\ (r=\overline{1,p}),\ \alpha_1(x),\ \alpha_2(x),$
$\varphi_k(x)\in C[x_k,x_{k+1}]\cap C^2(x_k,x_{k+1}),\ \psi_k(x)\in C[x_k,\alpha_2^k(x_1/2)]\cap$
$\cap\,\mathbb{C}^2(x_k,\alpha_2^k(x_1/2))\,(k=0,1,2)$ *;* $\psi_0(x_0)=\varphi_0(x_0)=\varphi_2(x_3)=0,\ \varphi_k(x_{k+1})=\varphi_{k+1}(x_{k+1})\ (k=0,1)$,
$B_r(x_3)=C_r(x_0)=0\ (r=\overline{1,p})$ *и* $\psi_k'(x)$ *при* $x\to x_k\,(k=0,1,2)$ *допускают интегрируемую особенность, то существует единственное решение задачи Т.*
Доказательство.

3.1 *Единственность решения задачи Т* для уравнения (7) в смешанной области D следует из того, что однородная задача T имеет тривиальное решение $\overline{u}^{\pm}(x,y)\equiv 0$ в $\overline{D}_0^{\pm}$ при условии, что однородная задача $T_{\overline{V}}$, согласно (23), имеет в области $\overline{D}_0^{\pm}$ тривиальное решение $\overline{\mathrm{V}}(x,y)\equiv 0$.

Доказательство тривиальности решения однородной задачи $T_{\overline{V}}$ основано на установлении знакоопределенности интеграла

$$\overline{\beta}=\int_{x_0}^{x_1}(\boldsymbol{Q_1}(x)\overline{\omega}(x))(\boldsymbol{Q_1}(x)\overline{\nu}(x))dx.$$

Лемма 1. *Если* $\overline{\mathrm{V}}^{+}(x,y)$ *− решение уравнения (18) в области* D_0^+ *из класса* $C\ (\overline{D}_0^{+})\cap C^2$ (D_0^+), *обращающееся в нуль при* $x=x_0,x_1\ (0\le y\le h);\ \ y=\sigma_0(x)\ (x_0\le x\le x_1),$ *то*

$$\overline{\beta}\le 0,\quad \overline{\beta}=-\iint\limits_{D_0^+}[(\overline{\mathrm{V}}_x^{+}(x,y))^2+(\overline{\mathrm{V}}_y^{+}(x,y))^2]dxdy. \tag{35}$$

Доказательство леммы аналогично [5].

Лемма 2. *Если* $\overline{\mathrm{V}}^{-}(x,y)$ *− решение уравнения (18) в области* D_0^- *из класса* $C\ (\overline{D}_0^{-})\cap C^2$ (D_0^-), *обращающееся в нуле на характеристике* $y=-x,\ x_0\le x\le x_1/2,$ *то*

$$\overline{\beta}\ge 0. \tag{36}$$

Доказательство леммы аналогично [5], [6].

Лемма 3. *Если* $\overline{\omega}(x)\in C[x_0,x_1]\cap C^2(x_0,x_1);\ \bar{\nu}(x)\in C^1(x_0,x_1),$
$\overline{\omega}(x_0)=\overline{\omega}(x_1)=0,$ *то существует единственное решение* $\overline{\mathrm{V}}^{-}(x,y)\in C(\overline{D}_0^{-})\cap$
$\cap\,C^2(D_0^-)$ *задачи Коши (18), (28), (29), (30) вида*

$$\overline{\mathrm{V}}^{-}(x,y)=\frac{1}{2}[\boldsymbol{Q_1}(x-y)\overline{\omega}(x-y)+\boldsymbol{Q_1}(x+y)\overline{\omega}(x+y)]+\frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y}\boldsymbol{Q_1}(\xi)\overline{\nu}(\xi)d\xi, \tag{37}$$

$(x,y)\in D_0^-$, где $\overline{\omega}(t),\overline{\nu}(t)$ определены в (33),(34).

Доказательство следует из формулы Даламбера [7].

Функциональное соотношение между $\overline{\omega}(x),\overline{\nu}(x)$, привнесённое из области D_0^- на линию изменения типа $I_0=\{(x,y):x_0<x<x_1,y=0\}$, найдем из (37), учитывая условие (27):

$$\frac{d}{dx}(\boldsymbol{Q_1}(x)\overline{\omega}(x))=\boldsymbol{Q_1}(x)\overline{\nu}(x)+2\frac{d}{dx}(\boldsymbol{Q_1}(x/2)\overline{\psi}(x/2)),\ x_0<x<x_1, \tag{38}$$

где

$\overline{\psi}(t)$ определяется равенством (31). Из леммы 1 и леммы 2, на основании (35), (36), имеем $\overline{\beta}=0.$ Тогда из положительной определенности и однородности интеграла (35), класса решений и однородности условий задачи $T_{\overline{V}}$, следует

$$\overline{\mathrm{V}}^{+}(x,y)\equiv 0,\ (x,y)\in \overline{D}_0^{+}. \tag{39}$$

Поэтому,

$$\overline{\omega}(x)\equiv 0, \overline{\nu}(x)\equiv 0,\ x_0<x<x_1. \tag{40}$$

На основании (37), условий сопряжения (28), (29), в силу (40), имеем

$$\overline{\mathrm{V}}^{-}(x,y)\equiv 0,\ (x,y)\in \overline{D}_0^{-}. \tag{41}$$

Равенства (39), (41) приводят к утверждению: $\overline{\mathrm{V}}(x,y)\equiv 0,\ (x,y)\in \overline{D}_0.$

Единственность решения задачи $T_{\overline{V}}$ доказана.

Из (23), в силу $\overline{\mathrm{V}}(x,y)\equiv 0,\ (x,y)\in \overline{D}_0,$ следует тривиальность $\overline{u}^{\pm}(x,y)$ решения однородной задачи Т в области $\overline{D}_0$, то есть *единственность* решения задачи Т.

3.2 *Найдем решение* $\overline{\mathrm{V}}^{+}(x,y)$ задачи $T_{\overline{V}}$ в области D_0^{+}.

Лемма 4. Если $\overline{\omega}(x), \overline{\varphi}(x)\in C[x_0,x_1]\cap C^2(x_0,x_1)$, $\overline{\omega}(x_0)=\overline{\omega}(x_1)=\overline{\varphi}(x_0)=\overline{\varphi}(x_1)=0,$ *то существует единственное решение* $\overline{V}^{+}(x,y)\in C(\overline{D}_0^{+})\cap C^2(D_0^{+})$ *задачи Дирихле (18), (25), (26), (28) вида:*

$$\begin{gathered}\overline{\mathrm{V}}^{+}(x,y)=-\{\mathbf{P}_x^{-i(y-\sigma_0(x))}-\mathbf{P}_x^{i(y-\sigma_0(x))}\}\sum_{m=0}^{+\infty}\mathbf{P}_x^{i\sigma_0(x)(2m+1)}(\boldsymbol{Q}_1(x)\overline{\omega}(x))+\\ +\{\mathbf{P}_x^{-iy}-\mathbf{P}_x^{iy}\}\sum_{m=0}^{+\infty}\mathbf{P}_x^{i\sigma_0(x)(2m+1)}(\boldsymbol{Q}_1(x)\overline{\varphi}(x)),\ (x,y)\in D_0^{+},\end{gathered} \tag{42}$$

или (в интегральной форме)

$$\begin{gathered}\overline{V}^{+}(x,y)=-\frac{i}{2\pi}\int_{x_0}^{x_1}(\boldsymbol{Q}_1(\xi)\overline{\omega}(\xi))N(x,y-\sigma_0(x),\xi)d\xi+\\ +\frac{i}{2\pi}\int_{x_0}^{x_1}(\boldsymbol{Q}_1(\xi)\overline{\varphi}(\xi))N(x,y,\xi)d\xi,\ (x,y)\in D_0^{+},\end{gathered} \tag{43}$$

где

$$i=\sqrt{-1},\ N(x,y,\xi)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\xi}\ln\frac{\gamma_{1k}^{+}(x,y,\xi)\gamma_{2k}^{+}(x,y,\xi)}{\gamma_{1k}^{-}(x,y,\xi)\gamma_{2k}^{-}(x,y,\xi)}, \tag{44}$$

а

$$\gamma_{\rho k}^{\pm}(x,y,\xi)=\cos[\pi(\xi+(-1)^{\rho}(x\pm iy))/x_1]-ch[\pi\sigma_0(x\pm iy)\,(2k+1)/x_1]\ (\rho=1,2),$$
$$N(x,y,\xi)\in C(\overline{D}_0^{+})\cap C^2(D_0^{+}),$$

причем $\overline{\varphi}(x)$ *имеет вид (32).*

Доказательство следует из непосредственно проверяемого общего решения

$$\overline{\mathrm{V}}^{+}(x,y)=\overline{K}_1(x+iy)+\overline{K}_2(x-iy)=\mathbf{P}_x^{-iy}\overline{K}_1(x)+\mathbf{P}_x^{iy}\overline{K}_2(x), \tag{45}$$

($\overline{K}_1(t),\overline{K}_2(t)$ – дважды непрерывно дифференцируемые произвольные вектор – функции), из которого с помощью условия (28) относительно $\overline{K}_1(x)$ получим разностное уравнение

$$\overline{K}_1(x)=\mathbf{P}_x^{2iy}\overline{K}_1(x)+\mathbf{P}_x^{iy}\overline{\mathrm{V}}^+(x,y)-\mathbf{P}_x^{2iy}\boldsymbol{Q}_j(x)\overline{\omega}(x),\ x_0\le x\le x_1$$

и его [8] решение

$$\overline{K}_1(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbf{P}_x^{2iky}(\mathbf{P}_x^{iy}\overline{\mathrm{V}}^+(x,y)-\mathbf{P}_x^{2iy}\boldsymbol{Q}_j(x)\overline{\omega}(x)),\ x_0\le x\le x_1,$$

принимающее, в силу (25), окончательный вид

$$\overline{K}_1(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbf{P}_x^{2ik\sigma_0(x)}(\mathbf{P}_x^{i\sigma_0(x)}\boldsymbol{Q}_1(x)\overline{\varphi}(x)-\mathbf{P}_x^{2i\sigma_0(x)}\boldsymbol{Q}_1(x)\overline{\omega}(x)),\ x_0\le x\le x_1,$$

при этом

$$\overline{K}_2(x)=\boldsymbol{Q}_1(x)\overline{\omega}(x)-\overline{K}_1(x),\ x_0\le x\le x_1.$$

Поэтому на основании (45) и последних равенств получим решение (42) задачи Дирихле (18), (25), (26), (28).

Любая [9] финитная на промежутке $[x_0,x_1]=[0,x_1]$ непрерывная функция

$$f(x)=(f(\xi),\delta(\xi-x)-\delta(\xi+x))=\int_{x_0}^{x_1}f(\xi)[\delta(\xi-x)-\delta(\xi+x)]d\xi, \tag{46}$$

где дельта-функция [10] Дирака

$$\delta(z)=\frac{1}{2x_1}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\exp(i\lambda_m z),\ \lambda_m=m\pi/x_1. \tag{47}$$

Поэтому, применяя к (42) выражения (46), (47), учитывая формулу 5.4.12.1 из [11], аналогично [12] получим интегральное представление решения задачи Дирихле (18), (25), (26), (28) в форме (43), (44), поскольку, например

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbf{P}_x^{iy(2k+1)}f(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbf{P}_x^{iy(2k+1)}\int_{x_0}^{x_1}f(\xi)[\delta(\xi-x)-\delta(\xi+x)]d\xi=$$

$$=\frac{1}{2x_1}\int_{x_0}^{x_1}f(\xi)\sum_{m=-\infty}^{+\infty}(e^{i\lambda_m(\xi-x)}-e^{-i\lambda_m(\xi+x)})\sum_{k=0}^{+\infty}e^{-\lambda_m y(2k+1)}d\xi=$$

$$=\frac{i}{x_1}\int_{x_0}^{x_1}f(\xi)\sum_{m=1}^{+\infty}(\sin[\lambda_m(\xi-x)]+\sin[\lambda_m(\xi+x)])\sum_{k=0}^{+\infty}e^{-\lambda_m y(2k+1)}d\xi=$$

$$=\frac{i}{x_1}\int_{x_0}^{x_1}f(\xi)\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty}(\sin[\lambda_m(\xi-x)]+\sin[\lambda_m(\xi+x)])e^{-\lambda_m y(2k+1)}d\xi=$$

$$=-\frac{i}{2x_1}\int_{x_0}^{x_1}f(\xi)\sum_{k=0}^{+\infty}(\frac{\sin[\pi(\xi-x)/x_1]}{\cos[\pi(\xi-x)/x_1]-ch[\pi y(2k+1)/x_1]}+$$

$$+\frac{\sin[\pi(\xi+x)/x_1]}{\cos[\pi(\xi+x)/x_1]-ch[\pi y(2k+1)/x_1]})d\xi=$$

$$=-\frac{i}{2\pi}\int_{x_0}^{x_1}f(\xi)\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\xi}\ln\{\cos[\pi(\xi-x)/x_1]-ch[\pi y(2k+1)/x_1)]\}\times$$

$$\times\{\cos[\pi(\xi+x)/x_1]-ch[\pi y(2k+1)/x_1]\}d\xi,$$

причем ряды, входящие в интеграл, абсолютно и равномерно сходятся в области $x_0\le x,\xi\le x_1,$ дважды непрерывно дифференцируемы в $x_0<x,\xi<x_1,$ так как, в силу того, что $|\sin[\pi(\xi\pm x)/x_1]|\le 1,$ $|\cos[\pi(\xi+x)/x_1]|\le 1,$

$$|ch[\pi y(2k+1)/x_1]-\cos[\pi(\xi\pm x)/x_1]|\ge ch[\pi y(2k+1)/x_1]-1=2sh^2[\pi y(2k+1)/2x_1]\ge$$

$\geq 2[\pi y(2k+1)/2x_1]^2$, мажорируются сходящимся числовым [11, формула 5.1.4.1] рядом

$$\sum_{\mathrm{k}=0}^{+\infty}\frac{1}{(2\mathrm{k}+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

Лемма доказана.

Найдем *функциональное соотношение между* $\bar{\omega}(x)$ *и* $\bar{\nu}(x)$, привнесённое из D_0^+ на линию изменения типа $I_0=\{(x,y): x_0<x<x_1, y=0\}$.

Условие (29) и решение (42) позволяют записать

$$\boldsymbol{Q}_1(x)\bar{\nu}(x)=i\frac{d}{dx}(\boldsymbol{Q}_1(x)\bar{\omega}(x))-2i\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbf{P}_x^{2i\sigma_0(x)k}\frac{d}{dx}(\boldsymbol{Q}_1(x)\bar{\omega}(x))+$$
$$+2i\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbf{P}_x^{i\sigma_0(x)(2k+1)}\frac{d}{dx}(\boldsymbol{Q}_1(x)\bar{\varphi}(x)),\ x_0<x<x_1,$$

то есть

$$(1-\mathbf{P}_x^{2i\sigma_0(x)})(\boldsymbol{Q}_1(x)\bar{\nu}(x))=-i(1+\mathbf{P}_x^{2i\sigma_0(x)})\frac{d}{dx}(\boldsymbol{Q}_1(x)\bar{\omega}(x))+$$
$$+2i\mathbf{P}_x^{i\sigma_0(x)}\frac{d}{dx}(\boldsymbol{Q}_1(x)\bar{\varphi}(x)),\ x_0<x<x_1. \qquad (48)$$

Полученное выражение является искомым функциональным соотношением.

3.3. *Вопрос существования решения* задачи $T_{\bar{V}}$ в области D_0, в силу условий сопряжения (28), (29), сводится к разрешимости системы функциональных соотношений (38), (48), то есть к разностному уравнению

$$(1+i\mathbf{P}_x^{2i\sigma_0(x)})(\boldsymbol{Q}_1(x)\bar{\nu}(x))=-(i+1)(1+\mathbf{P}_x^{2i\sigma_0(x)})\frac{d}{dx}(\boldsymbol{Q}_1(x/2)\bar{\psi}(x/2))+$$
$$+(i+1)\mathbf{P}_x^{i\sigma_0(x)}\frac{d}{dx}(\boldsymbol{Q}_1(x)\bar{\varphi}(x)),\ x_0<x<x_1,$$

решение которого, найденное аналогично [8], имеет вид

$$\boldsymbol{Q}_1(x)\bar{\nu}(x)=(i-1)\frac{d}{dx}(\boldsymbol{Q}_1(x/2)\bar{\psi}(x/2))-2i\sum_{m=0}^{+\infty}(-i)^m\mathbf{P}_x^{2i\sigma_0(x)m}\frac{d}{dx}(\boldsymbol{Q}_1(x/2)\bar{\psi}(x/2))+$$
$$+(i+1)\sum_{m=0}^{+\infty}(-i)^m\mathbf{P}_x^{i\sigma_0(x)(2m+1)}\frac{d}{dx}(\boldsymbol{Q}_1(x)\bar{\varphi}(x)),\ x_0<x<x_1 \qquad (49)$$

или, применяя к (49) выражения (46), (47), учитывая формулу 5.4.12.1 из [11], аналогично [12] получим интегральное представление

$$\boldsymbol{Q}_1(x)\bar{\nu}(x)=(i-1)\frac{d}{dx}(\boldsymbol{Q}_1(x/2)\bar{\psi}(x/2))-\frac{i+1}{2x_1}\int_{x_0}^{x_1}\frac{d}{d\xi}(\boldsymbol{Q}_1(\xi/2)\bar{\psi}(\xi/2))\mathrm{W}(x+i\sigma_0(x),\xi)d\xi+$$
$$+\frac{1}{2x_1}\int_{x_0}^{x_1}\frac{d}{d\xi}(\boldsymbol{Q}_1(\xi)\bar{\varphi}(\xi))\mathrm{W}(x,\xi)d\xi,\ x_0<x<x_1, \qquad (50)$$

где

$$\mathrm{W}(x,\xi)=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\left(\frac{\partial}{\partial y}\ln\frac{\Delta_{11}^+(x,y,\xi,k)\Delta_{21}^-(x,y,\xi,k)}{\Delta_{22}^+(x,y,\xi,k)\Delta_{12}^-(x,y,\xi,k)}\right)\Big|_{y=0},$$

а

$$\Delta_{l\rho}^{\pm}(x,y,\xi,k)=\cos[-y+\pi(\xi\pm x)/x_1]-ch[(-1)^l y+\pi\sigma_0(x)(4k+2\rho-1)/x_1]$$

$(l,\rho=1{,}2)$, причем $W(x,t)\in\mathbb{C}^1(x_0\le x,\xi\le x_1)\cap\mathbb{C}^2(x_0<x,\xi<x_1)$.

В силу свойств функций $\overline{\varphi}(x),\overline{\psi}(x)$, входящих в (49)(или (50)), выполняется включение $\boldsymbol{Q}_j(x)\overline{\nu}(x)\in C^1(x_0,x_1)$. Из (38), на основании (50), можно найти $\boldsymbol{Q}_1(x)\overline{\omega}(x)\in C\ [x_0,x_1]\cap C^2(x_0,x_1)$. Подставляя найденные значения $\boldsymbol{Q}_1(x)\overline{\nu}(x)$, $\boldsymbol{Q}_1(x)\overline{\omega}(x)$ в (37), (43), получим окончательный вид решений $\overline{V}^-(x,y)$ и $\overline{V}^+(x,y)$ задачи $T_{\overline{V}}$ в областях $\overline{D}_0^-$ и $\overline{D}_0^+$, то есть искомую функцию $\overline{V}(x,y)$ задачи $T_{\overline{V}}$ в области $D_0=D_0^-\cup D_0^+\cup I_0$.

Единственное решение $u(x,y)$ задачи T в области D_0, представимое формулой (23), можно записать, согласно (17), (21), (24), в покомпонентной форме

$u_k^{\pm}(\alpha_2^k(x),y)=\overline{\boldsymbol{Q}}_{1k}^{-1}(x)\overline{V}(x,y),\ (x,y)\in D_0^{\pm}(k=0{,}1{,}2),$

или

$$u(x,y)=u_k^{\pm}(x,y)=\overline{\boldsymbol{Q}}_{1k}^{-1}(\alpha_1^k(x))\overline{V}(\alpha_1^k(x),y),\ (x,y)\in D_k^{\pm}(k=0{,}1{,}2),$$

где $\overline{\boldsymbol{Q}}_{1k}^{-1}(x)$ - компоненты матрицы $\boldsymbol{Q}_1^{-1}(x)$ из (24).

Теорема доказана.

Список литературы

1. Бицадзе А.В. (1981) Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука.
2. Смирнов М.М. (1964) Некоторые краевые задачи для одного уравнения смешанного составного типа // Сиб.матем.журн., Т.5, №4, 949-954.
3. Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д., Свешников А.Г. (2001) О существовании режима установившихся колебаний в задаче Коши для уравнения составного типа // Журн. вычисл. матем. и матем. физ., Т.41, №4, 646-647.
4. Бицадзе А.В. (1959) Уравнения смешанного типа. М.: АН СССР.
5. Смирнов М.М. (1985) Уравнения смешанного типа. М.: Высшая школа.
6. Зарубин А.Н. (1999) Уравнения смешанного типа с запаздывающим аргументом. Орел: ОГУ.
7. Тихонов А.Н., Самарский А.А. (1972) Уравнения математической физики. М.: Наука.
8. Зарубин А.Н. (2012) Краевая задача для уравнения смешанного типа с опережающе-запаздывающим аргументом // Дифференц. уравнения, Т.48, №10, 1404-1411.
9. Агранович М.С. (2008) Обобщенные функции. М.: МЦНМО.
10. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. (1988) Курс математического анализа. М.: Наука.
11. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. (1981) Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука.
12. Зарубин А.Н. (2015) Задача Трикоми для опережающе-запаздывающего уравнения смешанного типа с переменным отклонением аргумента // Дифференц. уравнения, Т.51, №10, 1315-1327.

INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR FUNCTIONAL-DIFFERENTIAL MIXED INTEGRAL EQUATIONS

A.N.Zarubin
Dr. Sci. (Phys.-Math.), professor
matdiff@yandex.ru
Orel
Orel State University named after I.S. Turgenev

E.V.Chaplygina
Cand. Sci. (Phys.-Math.), associate professor
lena260581@yandex.ru
Orel
Orel State University named after I.S. Turgenev

Abstract. The Tricomi problem for the functional-differential mixed-compound advanced - delayed Lavrentyev - Bitsadze equation is investigated. The theorems of uniqueness and existence of a twice continuously differentiable solution are proved.
Keywords: mixed-type equation, integral equations, difference equation, functional delay and advance.

References

1. Bitsadze A.V. (1981) Nekotorye klassy uravnenij v chastnyh proizvodnyh [Some classes of partial differential equations]. Moscow: Science.
2. Smirnov M. M. (1964) Nekotorye kraevye zadachi dlya odnogo uravneniya smeshannogo sostavnogo tipa [Some boundary value problems for one equation of mixed composite type] // Sib.mod.journal., Vol. 5, №4, 1964, 949-954.
3. Korpusov M.O., pletner Yu.D., Sveshnikov A.G. (2001) O sushchestvovanii rezhima ustanovivshihsya kolebanij v zadache Koshi dlya uravneniya sostavnogo tipa [On the existence of the regime of steady oscillations in the Cauchy problem for the composite equation] // Journal. compute.mod. and mod. Fiz., Vol. 41, №4, 646-647.
4. Bitsadze A.V. (1959) Uravneniya smeshannogo tipa [Equations of mixed type]. Moscow: an SSSR.
5. Smirnov M.M. (1985) Uravneniya smeshannogo tipa [Equations of mixed type]. Moscow: Higher school.
6. Zarubin A.N. (1999) Uravneniya smeshannogo tipa s zapazdyvayushchim argumentom [Mixed-type equations with a lagging argument]. Orel: OSU.
7. Tikhonov A.N., Samarskiy A.A. (1972) Uravneniya matematicheskoj fiziki [Equations of mathematical physics]. Moscow: Science.
8. Zarubin A. N. (2012) Kraevaya zadacha dlya uravneniya smeshannogo tipa s operezhayushche-zapazdyvayushchim argumentom [Boundary value problem for a mixed type equation with a leading-lagging argument] // Differents. equations, Vol. 48, №10, 1404-1411.
9. Agranovich M.S. (2008) Obobshchennye funkcii [Generalized functions]. Moscow: mtsnmo.
10. Ter-Krikorov A.M., Shabunin M. I. (1988) Kurs matematicheskogo analiza [Course in mathematical analysis]. Moscow: Science.
11. Prudnikov A.P., Brychkov Y.A., Marichev O.I. (1981) Integraly i ryady [Integrals and series]. Elementary functions. Moscow: Science.
12. Zarubin A.N. (2015) Zadacha Trikomi dlya operezhayushche-zapazdyvayushchego uravneniya smeshannogo tipa s peremennym otkloneniem argumenta [The Tricomi problem for the leading-lagging equation of mixed type with variable deviation of the argument] // Differents. equations, Vol. 51, №10, 1315-1327.