УДК 531.011

О ГАМИЛЬТОНА-ДОПУСТИМЫХ УРАВНЕНИЯХ, ИХ ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛАХ И АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ В МЕХАНИКЕ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ СИСТЕМ

Светлана Александровна Будочкина
к.ф.-м.н., доцент
budochkina-sa@rudn.ru
г. Москва

Российский университет дружбы народов

Аннотация. При разработке некоторых методов гамильтоновой механики непотенциальных систем с бесконечным числом степеней свободы используются, в частности, решения обратных задач вариационного исчисления (ОЗВИ) для уравнений с непотенциальными операторами. На основе методов решения ОЗВИ для таких уравнений могут быть решены задачи о представлении уравнений движения бесконечномерных систем в виде неканонических уравнений Гамильтона. При исследовании движения систем с бесконечным числом степеней свободы также существенную роль могут играть алгебраические структуры, связанные с уравнениями движения. Целью работы является исследование уравнений движения непотенциальных систем с бесконечным числом степеней свободы в форме Гамильтона-допустимых уравнений.

Ключевые слова: Гамильтона-допустимые уравнения, первые интегралы, Ли-допустимые алгебры, алгебры Ли, скобки Пуассона, механика бесконечномерных систем.

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант №19-08-00261а).

Работа является продолжением работ [1-6]. В ней используются обозначения и терминология этих работ.

Рассматриваются симметрическая невырожденная билинейная форма

$$\Phi(\cdot,\cdot) \equiv <\cdot,\cdot>: V_1 \times V_1 \to \mathbb{R} \quad (1)$$

и уравнение

$$u_t = G_u(grad_\Phi H[u]). \quad (2)$$

Определение 1 [7]. Линейный оператор $G_u: D(G_u) \subset V_1 \to V_1$ называется гамильтоновым (относительно билинейной формы (1)), если $\forall\, h, v, g \in V_1$ выполнены условия

$$< g, G_u h >= -< h, G_u g >,$$
$$< v, G_u'(g; G_u h) > +< g, G_u'(h; G_u v) >+< h, G_u'(v; G_u g) >=0.$$

Определение 2 [7]. Уравнение (2), где оператор G_u является гамильтоновым, называется уравнением Гамильтона.

Определение 3 [7]. Алгеброй $\mathcal{A}$ называется линейное пространство над полем $\mathcal{K}$, наделенное билинейным произведением $*$, удовлетворяющим для произвольных $a, b, c \in \mathcal{A}$ и любом $\lambda \in \mathcal{K}$ следующим условиям:

$$a * (b + c) = a * b + a * c,$$
$$(a + b) * c = a * c + b * c,$$
$$(\lambda a) * b = a * (\lambda b) = \lambda(a * b).$$

Определение 4 [7]. Алгебра Ли – это алгебра $\mathcal{A}$ над полем $\mathcal{K}$, для которой выполняются условия

$$a * b + b * a = 0,$$

$$a * (b * c) + b * (c * a) + c * (a * b) = 0 \; \forall a, b, c \in \mathcal{A}.$$

Определение 5 [7]. Любая алгебра $\mathcal{A}$ над полем $\mathcal{K}$ с произведением $*$ называется Ли-допустимой алгеброй, если алгеброй Ли является алгебра $\mathcal{A}$, которая есть линейное пространство $\mathcal{A}$ над полем $\mathcal{K}$, наделенное билинейным произведением

$$[a, b] = a * b - b * a \; \forall a, b \in \mathcal{A}.$$

Рассмотрим действительное линейное пространство $\mathcal{F}_\Phi$, элементами которого являются параметрически зависящие от t функционалы $F[t,\cdot]: U_1 \subseteq V_1 \to \mathbb{R}$, допускающие представление

$$\delta F[t, u, h] = < grad_\Phi F[t, u], h > \; \forall \, u \in U_1, \forall \, h \in D(F_u').$$

Отметим, что в дальнейшем параметрически зависящие от t функционалы $F[t, u]$ будем обозначать также $F[u]$.

В этом пространстве определим билинейную операцию $\{\cdot,\cdot\}$, которая каждой паре функционалов F_1 и F_2 ставит в соответствие функционал $\{F_1, F_2\}$, определяемый формулой

$$\{F_1, F_2\}[u] = < K_1(u), G_u K_2(u) > \; \forall u \in U_1, \quad (3)$$

где $K_i(u) = grad_\Phi F_i[u], i = 1,2$.

Формула (3) определяет скобку Пуассона.

Замечание. Если $u = (q, p), q = (q_1, q_2, \dots, q_n), p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$,

$$G_u \equiv G = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{pmatrix},$$

I_n- единичная матрица, то из (3) получаем классическую скобку Пуассона, составленную из функций $\varphi(q, p, t)$ и $\psi(q, p, t)$ (см. [8])

$$\{\varphi, \psi\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial p_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial q_i} \right) \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(q_i, p_i)}.$$

Линейное пространство $\mathcal{F}_\Phi$, наделенное билинейной операцией (3), образует алгебру Ли.

Определение 6 [7]. Уравнение

$$u_t = \tilde{G}_u(grad_\Phi H[u]) \quad (4)$$

называется Гамильтона-допустимым уравнением, если оператор $G_u \equiv \tilde{G}_u - \tilde{G}_u^*$ является гамильтоновым в области $D(\tilde{G}_u)$ относительно заданной билинейной формы. В этом случае оператор $\tilde{G}_u$ называется Гамильтона-допустимым оператором.

Теорема 1. Оператор $\tilde{G}_u: D(\tilde{G}_u) \subset V_1 \to V_1$ является Гамильтона-допустимым оператором тогда и только тогда, когда он представим в виде

$$\tilde{G}_u = \tilde{G}_{1u} + \tilde{G}_{2u}, \quad (5)$$

где $\tilde{G}_{1u}$ – симметрический оператор, а $\tilde{G}_{2u}$ - гамильтонов.

Доказательство. Предположим, что оператор $\tilde{G}_u$ является Гамильтона-допустимым оператором. Представим его в виде

$$\tilde{G}_u = \frac{\tilde{G}_u + \tilde{G}_u^*}{2} + \frac{\tilde{G}_u - \tilde{G}_u^*}{2}$$

и обозначим

$$\tilde{G}_{1u} = \frac{\tilde{G}_u + \tilde{G}_u^*}{2}, \tilde{G}_{2u} = \frac{\tilde{G}_u - \tilde{G}_u^*}{2}.$$

Отметим, что оператор $\tilde{G}_{1u}$ является симметрическим, а $\tilde{G}_{2u}$ – гамильтоновым (по определению Гамильтона-допустимого оператора).

Обратно, пусть имеет место (5). Тогда

$$\tilde{G}_u^* = \tilde{G}_{1u} - \tilde{G}_{2u}$$

и оператор

$$\tilde{G}_u - \tilde{G}_u^* = 2\tilde{G}_{2u}$$

является гамильтоновым.

Теорема доказана.

Пример.

Рассмотрим уравнения

$$\begin{cases} u_t = \frac{\delta H}{\delta p}, \\ p_t = -\frac{\delta H}{\delta u} + s(u,p). \end{cases} \quad (6)$$

Предположим, что $\delta H/\delta p \neq 0$.

Покажем, что уравнения (6) являются Гамильтона-допустимыми уравнениями. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\delta H}{\delta u} \\ \frac{\delta H}{\delta p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\delta H}{\delta u} \\ \frac{\delta H}{\delta p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\delta H}{\delta u} \\ \frac{\delta H}{\delta p} \end{pmatrix} =$$

$$= \left[\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Theta \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} \frac{\delta H}{\delta u} \\ \frac{\delta H}{\delta p} \end{pmatrix},$$

где $\Theta = s/(\delta H/\delta p), I$ – тождественный оператор.

В данном случае оператор

$$\tilde{G}_{\bar{u}} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & \Theta \end{pmatrix}$$

представим в виде суммы

$$\tilde{G}_{1\bar{u}} + \tilde{G}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

симметрического и гамильтонова операторов.

Здесь $\bar{u} = (u,p)$. Тогда по теореме 1 оператор $\tilde{G}_{\bar{u}}$ является Гамильтона-допустимым оператором.

Рассмотрим уравнение

$$N(u) \equiv u_t - \tilde{G}(grad_\Phi H[u]) = 0, u \in D(N). \quad (7)$$

По теореме 1 уравнение (7) является Гамильтона-допустимым уравнением, так как $\tilde{G} = \tilde{G}_1 + \tilde{G}_2$, где оператор

$$\tilde{G}_1 = \frac{\tilde{G} + \tilde{G}^*}{2},$$

очевидно, симметрический, а оператор

$$\tilde{G}_2 = \frac{\tilde{G} - \tilde{G}^*}{2}$$

гамильтонов, так как он кососимметрический и не зависит от u.

Предположим, что функционал $J[u]$ – первый интеграл уравнения (7), а симметрический оператор $\tilde{G}_1$ является положительно определенным относительно заданной билинейной формы Φ, то есть

$$\Phi(v, \tilde{G}_1 v) \geq k \parallel v \parallel \;\; \forall v \in D(\tilde{G}_1),$$

где k – положительная постоянная.

Будем считать, что функционалы H и J не зависят явно от t. Тогда

$$D_t(H[u] + \alpha J[u])|_{(6)} = \Phi\left(grad_\Phi H[u] + \alpha grad_\Phi J[u], \tilde{G}(grad_\Phi H[u])\right) = \quad (8)$$

$$= \Phi\left(grad_\Phi H[u], \tilde{G}(grad_\Phi H[u])\right) + \alpha\Phi\left(grad_\Phi J[u], \tilde{G}(grad_\Phi H[u])\right) =$$

$$= \Phi\left(grad_\Phi H[u], \tilde{G}_1(grad_\Phi H[u])\right) \geq k \parallel grad_\Phi H[u] \parallel \ \forall u \in D(N), \alpha \in \mathbb{R},$$

что указывает на возможность использования функционалов H (при $\alpha = 0$) или $H + \alpha J$ в качестве функционалов Ляпунова для исследования устойчивости движения системы.

Отметим, что в (8)

$$\Phi\left(grad_\Phi J[u], \tilde{G}(grad_\Phi H[u])\right) = 0$$

по определению первого интеграла, а

$$\Phi\left(grad_\Phi H[u], \tilde{G}_2(grad_\Phi H[u])\right) = 0$$

ввиду кососимметричности оператора $\tilde{G}_2$.

Из изложенного выше естественным образом возникает задача нахождения первых интегралов Гамильтона-допустимых уравнений.

Теорема 2. Функционал $J[u]$ является первым интегралом уравнения (4) тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial J[u]}{\partial t} + \{J, H\}[u] + < grad_\Phi J[u], \tilde{G}_u^*(grad_\Phi H[u]) > = 0$$

на решениях уравнения (4).

Доказательство. Необходимость. Пусть $J[u]$ является первым интегралом уравнения (4), то есть

$$\frac{d}{dt} J[u]\Big|_{(4)} = 0.$$

Отсюда получаем

$$\frac{d}{dt} J[u]\Big|_{(4)} = \left(\frac{\partial J[u]}{\partial t} + < grad_\Phi J[u], u_t >\right)\Big|_{(4)} = \frac{\partial J[u]}{\partial t} + < grad_\Phi J[u], \tilde{G}_u(grad_\Phi H[u]) >=$$

$$= \frac{\partial J[u]}{\partial t} + < grad_\Phi J[u], \left(\tilde{G}_u - \tilde{G}_u^*\right)(grad_\Phi H[u]) > + < grad_\Phi J[u], \tilde{G}_u^*(grad_\Phi H[u]) >=$$

$$= \frac{\partial J[u]}{\partial t} + \{J, H\}[u] + < grad_\Phi J[u], \tilde{G}_u^*(grad_\Phi H[u]) > = 0.$$

Достаточность доказывается обратным ходом рассуждений.

Теорема доказана.

Следствие 1. Если

$$\frac{\partial H[u]}{\partial t} + < grad_\Phi H[u], \tilde{G}_u^*(grad_\Phi H[u]) > = 0$$

на решениях уравнения (4), то гамильтониан H является первым интегралом этого уравнения.

Следствие 2. Функционал $J[u]$ является первым интегралом уравнения Гамильтона (2) тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial J[u]}{\partial t} + \{J, H\}[u] = 0$$

на решениях уравнения (2).

Здесь

$$\{J, H\}[u] = < grad_\Phi J[u], G_u(grad_\Phi H[u]) >.$$

Следствие 3. Если гамильтониан H не зависит явно от t, то он является первым интегралом уравнения Гамильтона (2).

В пространстве $\mathcal{F}_\Phi$ введем билинейную операцию

$$(F_1, F_2)[u] =< grad_\Phi F_1[u], \tilde{G}_u grad_\Phi F_2[u] >, (9)$$

где $\tilde{G}_u$ – Гамильтона-допустимый оператор.

Теорема 3. Линейное пространство $\mathcal{F}_\Phi$, наделенное билинейной операцией (9), образует Ли-допустимую алгебру.

Доказательство. Действительно, (9) позволяет ввести структуру алгебры в линейном пространстве $\mathcal{F}_\Phi$, так как условия определения 3, очевидно, выполняются.

Эта алгебра не является алгеброй Ли. Однако она является Ли-допустимой алгеброй, так как для скобки $\{\cdot,\cdot\}$, определенной формулой

$$\{F_1, F_2\}[u] = (F_1, F_2)[u] - (F_2, F_1)[u] =$$
$$=< grad_\Phi F_1[u], \left(\tilde{G}_u - \tilde{G}_u^*\right) grad_\Phi F_2[u] >,$$

выполняются условия определения 4, так как оператор $G_u \equiv \tilde{G}_u - \tilde{G}_u^*$ является гамильтоновым.

Теорема доказана.

Список литературы

1. Савчин В.М., Будочкина С.А. (2008) Уравнения Гамильтона для бесконечномерных систем и их уравнения в вариациях // Дифференциальные уравнения. Т. 44, №4. С. 570-573.
2. Будочкина С.А., Савчин В.М. (2011) О Bu-гамильтоновых уравнениях в механике систем с бесконечным числом степеней свободы // Доклады Академии наук. Т. 439, №4. С. 583-584.
3. Будочкина С.А. (2013) О представлении одного операторного уравнения с первой производной по времени в форме Bu-гамильтонова уравнения // Дифференциальные уравнения. Т. 49, №2. С. 175-185.
4. Будочкина С.А., Савчин В.М. (2013) О бесконечномерных лагранжевых системах с непотенциальными силами // Доклады Академии наук. Т. 448, №5. С. 518-519.
5. Будочкина С.А., Савчин В.М. (2015) О квазипотенциальных операторах и Гамильтона-допустимых уравнениях в механике бесконечномерных систем // Доклады Академии наук. Т. 464, №3. С. 267-269.
6. Будочкина С.А., Савчин В.М. (2016) Операторное уравнение со второй производной по времени и Гамильтона-допустимые уравнения // Доклады Академии наук. Т. 470, №1. С. 7-9.
7. Савчин В.М. (1991) Математические методы механики бесконечномерных непотенциальных систем. М.: Изд-во УДН.
8. Галиуллин А.С. (1998) Аналитическая динамика. М.: Изд-во РУДН.

ON HAMILTONIAN-ADMISSIBLE EQUATIONS, FIRST INTEGRALS AND ALGEBRAIC STRUCTURES IN THE MECHANICS OF INFINITE-DIMENSIONAL SYSTEMS

S.A. Budochkina
Cand. Sci. (Phys.–Math.), associate professor
budochkina-sa@rudn.ru
Moscow

Peoples' Friendship University of Russia

Abstract. Solutions of inverse problems of the calculus of variations (IPCV) for equations with nonpotential operators are used for development of some methods of Hamiltonian mechanics for infinite-dimensional nonpotential systems. The problem of representation of such equations in the form of noncanonical Hamiltonian equations can be studied with the use of methods for solving IPCV. Algebraic structures associated with the equations of motion play an important role in the mechanics of infinite-dimensional systems. The aim of the work is to investigate the equations of motion of infinite-dimensional nonpotential systems in the form of Hamiltonian-admissible equations.

Keywords: Hamiltonian-admissible equations, first integrals, Lie-admissible algebras, Lie algebras, Poisson brackets, mechanics of infinite-dimensional systems.

References

1. Savchin V.M., Budochkina S.A. (2008) Hamilton equations for infinite-dimensional systems and their variational equations // Differential Equations. V. 44, №4. P. 593-596.
2. Budochkina S.A., Savchin V.M. (2011) On Bu-Hamiltonian equations in mechanics of infinite-dimensional systems // Doklady Mathematics. V. 84, №1. P. 525-526.
3. Budochkina S.A. (2013) On a representation of an operator equation with first time derivative in the form of a Bu-Hamiltonian equation // Differential Equations. V. 49, №2. P. 176-186.
4. Budochkina S.A., Savchin V.M. (2013) On infinite-dimensional Lagrangian systems with nonpotential forces // Doklady Mathematics. V. 87, №1. P. 110-111.
5. Budochkina S.A., Savchin V.M. (2015) On quasipotential operators and Hamiltonian-admissible equations in the mechanics of infinite-dimensional systems // Doklady Mathematics. V. 92, №2. P. 554-555.
6. Budochkina S.A., Savchin V.M. (2016) An operator equation with the second time derivative and Hamiltonian-admissible equations // Doklady Mathematics. V. 94, №2. P. 487-489.
7. Savchin V.M. (1991) Matematicheskie metody mekhaniki beskonechnomernykh nepotentsial'nykh sistem [Mathematical methods of the mechanics of infinite-dimensional nonpotential systems]. M.: UDN.
8. Galiullin A.S. (1998) Analiticheskaya dinamika [Analytical dynamics]. M.: RUDN.