УДК 517.983

О СУЩЕСТВОВАНИИ И НЕПРЕРЫВНОСТИ ОПЕРАТОРА $\varphi(A)$ НА АЛГЕБРЕ H

Татьяна Николаевна Можарова
к.ф.-м.н., доцент
tatjana.mozharova@yandex.ru
г. Орел

Орловский государственный университет имени И.С.Тургенева

Аннотация. Автором рассматриваются вопросы, связанные с исследованием условий применимости и непрерывности линейных ограниченных операторов с переменными коэффициентами, действующих в полной локально выпуклой алгебре *H*.

Ключевые слова:линейный ограниченный оператор, порядок и тип оператора, целая векторнозначная функция, порядок и тип роста целой векторнозначной функции, полная локально выпуклая алгебра.

Пусть H – полная локально выпуклая алгебра, топология которой задается счетной системой норм $\{\|\cdot\|_p\}$, $p = 1, 2, \ldots$, причем

$$\forall x,y\in H,\ \forall p,\ \exists p_1,\ p_2:\ \|xy\|_p \le \|x\|_{p_1}\cdot\|y\|_{p_2}.$$

Пусть, далее, A: $H\to H$ – линейный ограниченный оператор порядка $\beta\ne 0,\infty$ и типа $\alpha<\infty$. В этих условиях справедлива

Теорема 1

Каждая целая векторнозначная функция $\varphi(t)=\sum_{k=0}^{\infty} x_k t^k$, $x_k\in H$, $\forall k$,

со значениями в H, порядок роста которой $\rho\le\dfrac{1}{\beta}$, а при $\rho=\dfrac{1}{\beta}$ тип $\sigma<\dfrac{\beta}{\alpha e}$,

определяет линейный, непрерывный оператор

$$\varphi(A)(x)\equiv\sum_{k=0}^{\infty} x_k A^k(x), \quad (1)$$

действующий на H и переводящий H в себя.

Доказательство

Оценим общий член ряда (1):

$$\left\|x_k A^k(x)\right\|_p \le \left\|x_k\right\|_{p_1}\cdot\left\|A^k(x)\right\|_{p_2},\ \forall p,\ \exists p_1,\ p_2,\ x_k\in H,\ x\in H.$$

При этом получим, что

$$\left\|x_k A^k(x)\right\|_p < \left[\frac{(\sigma_{p_1}+\varepsilon)e(\alpha_{p_2}+\varepsilon)}{\beta}\right]^{\beta k}\cdot\|x\|_q,\ \forall\varepsilon>0,\ \forall p,\ \exists q,$$

где $\alpha_{p_2} \le \alpha$ – p_2 - тип оператора A при порядке β, $\sigma_{p_1} \le \sigma$ – p_1 - тип роста функции $\varphi(t)$ при порядке роста $\rho = \dfrac{1}{\beta}$.

Тогда $\dfrac{\sigma_{p_1} e\alpha_{p_2}}{\beta} \le \dfrac{\sigma e\alpha}{\beta} < 1$, поскольку (по условию теоремы) $\sigma < \dfrac{\beta}{\alpha e}$.

Отсюда следует, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ $\dfrac{(\sigma_{p_1} + \varepsilon)e(\alpha_{p_2} + \varepsilon)}{\beta} < 1$,

а значит, $\left\| x_k A^k(x) \right\|_p < \gamma^k \|x\|_q$, $0 < \gamma < 1$; $\forall p$.

Следовательно, ряд (1) сходится абсолютно по топологии пространства H и справедлива оценка:

$$\|\varphi(A)(x)\|_p \le C_p \|x\|_q, \ \forall p,\ \forall x \in H,\ C_p > 0,\ \exists q.$$

Теорема доказана.

Отметим, что справедливость теоремы 1 для случая скалярной характеристической функции доказана ранее Громовым В.П. ([1]).

Довольно часто на практике встречаются случаи, когда тип оператора A равен бесконечности. Теорема 1 этот случай не включает. При $\alpha = \infty$ справедлива

<u>Теорема 2</u>

Пусть H – полная локально-выпуклая алгебра с заданной на ней счетной системой норм $\{\|\cdot\|_p\}$, $p = 1, 2, \ldots$, и A: $H \to H$ – линейный непрерывный оператор порядка $\beta \ne 0,\infty$ и типа $\alpha = \infty$, причем $\alpha_p < \infty$, $\forall p$. Тогда каждая целая векторнозначная функция $\varphi(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k t^k$, $x_k \in H$, - со значениями в H, порядок роста которой $\rho \le \dfrac{1}{\beta}$, а при порядке $\rho = \dfrac{1}{\beta}$ тип $\sigma = 0$, определяет линейный непрерывный оператор $\varphi(A)$: $H \to H$.

<u>Доказательство</u>

Имеем: $\forall p$, $\forall x \in H \exists p_1, p_2$:

$$\left\| x_k A^k(x) \right\|_p \le \|x_k\|_{p_1} \cdot \left\| A^k(x) \right\|_{p_2}, \ x_k \in H.$$

Из условия $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} k^{\beta} \sqrt[k]{\|x_k\|_q} = 0$, $\forall$q, получаем:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \|x_k\|_{p_1} < \left[\frac{\varepsilon}{k^{\beta}}\right]^k, \ \forall k > k_0(\varepsilon). \quad (2)$$

По определению p-типа оператора A: $\forall p_2, \forall \varepsilon > 0$, $\exists q$, такое, что

$$\left\| A^k(x) \right\|_{p_2} < \left[(\alpha_{p_2} + \varepsilon) k \right]^{\beta k} \left\| x \right\|_q, \ \forall k > k_1(p_2, \varepsilon), \ \forall x \in H. \quad (3)$$

Используя оценки (2) и (3), находим, что при фиксированных $\alpha_{p_2} < \infty$ и β и достаточно малом $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство:

$$\left(\alpha_{p_2} + \varepsilon \right)^{\beta} \cdot \varepsilon < 1.$$

Это означает, что ряд (1) сходится по топологии пространства H и

$$\left\| \varphi(A)(x) \right\|_p < C_p \left\| x \right\|_q, \forall x \in H, \ \forall p.$$

Терема доказана.

Рассмотрим простейшие примеры, иллюстрирующие теоремы 1 и 2.

1) Рассмотрим действующий в пространстве $H(\boldsymbol{C})$ оператор $A = \dfrac{d}{dz}$. Известно, что $\beta = 1$, $\alpha = 0$.

Пусть

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z) t^k, \ c_k(z) \in H(\boldsymbol{C}). \quad (4)$$

Тогда, как следствие теоремы 1, получаем:

<u>Предложение 1</u>

Пусть целая вектор-функция $\varphi(t)$: $\boldsymbol{C} \to H(\boldsymbol{C})$ имеет порядок роста $\rho \le 1$, а при порядке $\rho = 1$ тип $\sigma < \infty$. Тогда она порождает линейный непрерывный оператор $\varphi\left(\dfrac{d}{dz}\right)(F) \equiv \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(z) F^{(k)}(z)$, $c_k(z) \in H(\boldsymbol{C})$, действующий на $H(\boldsymbol{C})$ и переводящий $H(\boldsymbol{C})$ в себя.

2) Пусть $H = H(G)$ – пространство функций, аналитических в односвязной области G, $G \ne \boldsymbol{C}$, топология которого задается бесконечной системой норм

$$\left\| F \right\|_p = \max_{z \in G_p} \left| F(z) \right| \quad G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G; \ \bigcup_{p \ge 1} G_p = G; \ F \in H(G).$$

В этом случае для оператора $A = \dfrac{d}{dz}$ $\beta = 1$, $\alpha = \infty$.

Пусть $\varphi(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(z) t^k$, $c_k(z) \in H(G)$. В этом случае в качестве следствия теоремы 2 получаем

<u>Предложение 2</u>

Пусть целая вектор-функция $\varphi(t)$: $\boldsymbol{C}\to H(G)$ имеет порядок роста $\rho\le 1$, а при порядке $\rho = 1$ тип $\sigma = 0$. Тогда она порождает линейный непрерывный оператор $\varphi\left(\frac{d}{dz}\right)(F)\equiv\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z)F^{(k)}(z)$, $c_k(z)\in H(G)$, определенный на $H(G)$ и переводящий $H(G)$ в себя.

3) Пусть $H = H_R$ – пространство функций, аналитических в круге $|z| < R < \infty$;

$\|F\|_p=\max_{|z|\le p<R}|F(z)|$, $F\in H_R$. $A = D_{f_1}$ – оператор обобщенного дифференцирования Гельфонда-Леонтьева ([2]), порожденный целой скалярной функцией $f_1(z)$, порядок роста которой $\rho > 0$ и тип $\sigma > 0$. Как известно ([3]), порядок и тип оператора D_{f_1} в H_R:

$\beta=\frac{1}{\rho}$, $\alpha = \infty$.

Пусть $\varphi(t)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z)t^k$, $c_k(z)\in H_R$.

Из теоремы 2 следует

Предложение 3

Пусть целая вектор-функция $\varphi(t)$: $\boldsymbol{C}\to H_R$ имеет порядок роста не выше ρ, а при порядке ρ – минимальный тип. Тогда она порождает линейный непрерывный оператор $\varphi(D_{f_1})(F)\equiv\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z)D_{f_1}^k(F)$, $c_k(z)\in H_R$, определенный на пространстве H_R и переводящий H_R в себя.

4) Рассмотрим оператор $A = D_{f_1}$ действующий в пространстве $H(\boldsymbol{C})$. В этом случае $\beta=\frac{1}{\rho}$, $\alpha = 0$ ($\rho > 0$ – порядок роста порождающей оператор D_{f_1} целой скалярной функции $f_1(z)$).

Пусть $\varphi(t)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z)t^k$, $c_k(z)\in H(\boldsymbol{C})$.

Из теоремы 1 следует

Предложение 4

Пусть целая вектор-функция $\varphi(t)$: $\boldsymbol{C}\to H(\boldsymbol{C})$ имеет порядок роста не выше ρ, а при порядке ρ – тип $\sigma<\infty$. Тогда она порождает линейный непрерывный оператор $\varphi(D_{f_1})(F)\equiv\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z)D_{f_1}^k(F)$,определенный на $H(\boldsymbol{C})$ и переводящий это пространство в себя.

Для случая скалярной характеристической функции утверждения, указанные выше в предложениях 1-4, доказаны ранее другим методом в работах А.Ф. Леонтьева ([2]).

Список литературы

1. Громов В.П. (1988) О разложении векторов локально-выпуклого пространства в ряд // В сб. «Комплексный анализ и его приложения». Деп. в ВИНИТИ, №3728-В88, с.3-27.
2. Леонтьев А.Ф. (1981) Обобщения рядов экспонент. М.: Наука.
3. Можарова Т.Н. (2015) Операторы бесконечного порядка с переменными коэффициентами, построенные по обобщенным производным Гельфонда – Леонтьева// В сборнике: Избранные труды физико-математического факультета Орловского государственного университета. Орел, с.85-92.

THE EXISTENCE AND CONTINUITY OF THE OPERATOR φ(A) ON THE ALGEBRA*H*

T. N. Mozharova
K. F.-M. N., associate Professor
tatjana.mozharova@yandex.ru
Orel

Orel state University named after I. S. Turgenev

Abstract. The author considers the issues related to the study of the conditions of applicability and continuity of linear bounded operators with variable coefficients acting in the full locally convex algebra *H*.

Keywords:a linear bounded operator, the order and type of the operator to a vector-valued function, order and type of growth of a vector-valued function, a complete locally convex algebra.

References

1. Gromov V. P. (1988) On the decomposition of vectors of locally convex space in a series // In SB. "Complex analysis and its applications". DEP. in VINITI, No. 3728-88, pp. 3-27.
2. Leontiev A. F. (1981) Generalizations of series of exponents. M.: Science.
3. Mozharova T. N. (2015) Operators of infinite order with variable coefficients constructed from generalized Gelfond – Leontiev derivatives // In the collection: Selected works of the faculty of physics and mathematics of the Orel state University. Orel, pp. 85-92.