УДК 517

ПРИЛОЖЕНИЕ МЕТОДА ЛЯПУНОВА К ИССЛЕДОВАНИЮ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ

Ирина Адольфовна Елецких
к.ф.-м.н., доцент
yeletskikh.irina@yandex.ru
г. Елец

Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина

Аннотация. В работе изучаются общие вопросы теории устойчивости по Ляпунову: даны определения устойчивости, неустойчивости и асимптотической устойчивости точки равновесия, приведены основные положения метода Ляпунова для случая автономных систем. В статье приводятся задачи на исследование качественного поведения динамической системы в точках равновесия с помощью применения первого метода Ляпунова. Использование компьютерных технологий позволяет расширить приложения известных теорем Ляпунова. В частности, получить наглядное представление поведения системы в окрестности точки равновесия, сформулировать обратные теоремы, которые позволяют расширить класс различных процессов и явлений при их математическом моделировании. На примере модели математического маятника исследование на устойчивость и асимптотическую устойчивость точек равновесия проводится с использованием фазовых портретов, с использованием энергетических концепций, с использованием определённым образом заданных функций (функций Ляпунова). Этот пример выявляет важную особенность теоремы устойчивости Ляпунова: эта теорема дает лишь достаточные условия устойчивости. Однако, не выполнение для выбранной функции Ляпунова условий устойчивости или асимптотической устойчивости не означает, что начало координат не является устойчивой или асимптотически устойчивой точкой равновесия системы. Данное положение подтверждается принципом инвариантности Ла-Салля, в котором обобщается теорема Ляпунова за счет ослабления требования относительно отрицательной определенности производной функции Ляпунова, показывается возможность использования в случаях, когда система имеет не только одну изолированную точку равновесия, но и целое множество устойчивых состояний, устанавливается, что функция Ляпунова не обязательно должна быть положительно определенной и её построение не связано с построением положительно инвариантного множества. Предложенное Ла-Саллем обобщение основной теории Ляпунова, рассматривается в случае линейной стационарной системы.

Ключевые слова: устойчивость, неустойчивость, асимптотическая устойчивость автономная система, линейная стационарная система, принцип инвариантности.

В развитии теории дифференциальных уравнений ясно прослеживаются два противоположных направления: исследования, в процессе которых получается решение либо в конечной (замкнутой) форме, либо в результате некоторого приближённого процесса. Исследования в первом направлении возможны в редких случаях. Целью исследований, относящихся ко второму направлению, является получение информации о свойствах всего множества решений, причем не важно будут ли эти решения точными или приблизительными. Именно таким образом ещё в 1880 году были сформулированы задачи качественной теории дифференциальных уравнений французским математиком и механиком А. Пуанкаре. Главной задачей качественной теории является изучение поведения решений, близких к некоторому заданному решению. Это решение изображается кривой или траекторией в некотором пространстве. Вставший впоследствии вопрос о расположении других траекторий вблизи заданного решения привел к необходимости создания теории устойчивости.

Отправной точкой всех исследований в этом направлении служит классическая работа А.М. Ляпунова «Общая задача об устойчивости движения», появившаяся в России в 1892 году. В своей работе русский математик и инженер А.М. Ляпунов изучает вопросы устойчивости с помощью двух различных методов. Для использования так называемого первого метода Ляпунова необходимо предположить, что исследуемое решение известно; этот метод применим лишь к ограниченному классу важных случаев. Напротив, второй, или прямой метод Ляпунова является чрезвычайно общим и мощным, и, самое главное, для применения этого метода не нужно знать самих решений — в этом его неоценимое преимущество.

Центральным вопросом теории Ляпунова является устойчивость точек равновесия. В соответствии с этой теорией точка равновесия устойчива, если все решения, начинающиеся вблизи этой точки, остаются в ее окрестности; в противном случае эта точка неустойчива. Точка равновесия асимптотически устойчива, если все решения, начинающиеся в близких к ней точках, не только остаются вблизи нее, но и стремятся к этой точке равновесия при стремлении времени к бесконечности [1, с.114]. Теоремы устойчивости Ляпунова позволяют получить достаточные условия для устойчивости, асимптотической устойчивости и других типов устойчивости. Однако они не дают необходимых критериев устойчивости. Существуют теоремы, в которых утверждается, что условия многих теорем Ляпунова являются также и необходимыми условиями. Подобные теоремы обычно называют обратными теоремами Ляпунова. Методы анализа, используемые в теории устойчивости Ляпунова, могут применяться для доказательства факта ограниченности решения даже в случаях, когда рассматриваемая система не имеет точек равновесия, и обобщаться на более сложные случаи моделирования различных процессов. На основании изложенного выше следует актуальность заявленной темы.

Целью данного исследования является изучение обобщений основных теорем Ляпунова для случая автономных систем, предложенных американскими учеными Ж. Ла-Саллем и С. Лефшецем [2, с. 130-155].

Поставим задачу показать, что обобщенные теоремы Ляпунова распространяются на более широкий класс дифференциальных уравнений и их систем, и имеют широкое применение для использования в задачах на анализ устойчивости различных процессов и явлений при их математическом моделировании.

Приведем основные положения теории, которые будем использовать в дальнейших рассуждениях. Автономная система дифференциальных уравнений (динамическая) – частный случай системы дифференциальных уравнений, когда аргумент t системы не входит явным образом в функции, задающие систему.

Общий вид автономной системы в векторной записи:

$$\dot{x} = f(x), x \in R^n, (1)$$

где $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $f: D \to R^n$ – локально липшицевое отображение области $D \subset R^n$ в R^n. Предположим, что $\bar{x} \in D$ – точка равновесия системы (1), т.е. $f(\bar{x}) = 0$. Исследуем свойства устойчивости этой точки в случае, когда $\bar{x} = 0$.

Напомним, что точка равновесия $x = 0$ системы (1) называется

– устойчивой, если $(\forall \varepsilon > 0)(\forall t \geq 0)(\exists \delta(\varepsilon) > 0)$: $\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon$;

– асимптотически устойчивой, если константа δ может быть выбрана таким образом, что $||x(0)|| < \delta \Rightarrow \lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$ [1, с.115].

Исследование на устойчивость и асимптотическую устойчивость точек равновесия можно проводить с использованием фазовых портретов, с использованием энергетических концепций, с использованием определённым образом заданных функций (функций Ляпунова).

Пример 1. В качестве примера рассмотрим математическую модель маятника, задаваемую системой уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -a\sin x_1 - bx_2. \end{cases} \quad (2)$$

Используем уже построенные в [3, с.434 – 436] фазовые портреты решений системы (2).

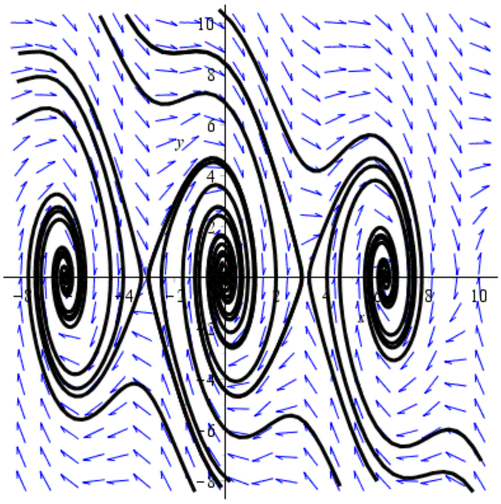

Рис.1

На рис.1 фазовый портрет построен с учетом силы трения. Он демонстрирует периодичность по x_1 с периодом 2π.Следовательно, все характерные особенности качественного поведения рассматриваемой системы могут быть представлены на вертикальной полосе $-\pi \le x_1 \le \pi$. Точки равновесия (0; 0), (2π; 0), (- 2π; 0) и т.д. соответствуют нижней точке равновесия маятника (0; 0). Траектории в окрестности этой точки равновесия демонстрируют качественное поведение, характерное для траекторий в окрестности устойчивого фокуса. С другой стороны, точки равновесия (π; 0) и (- π; 0) и т.д. соответствуют верхней точке равновесия маятника (0; 0). Траектории в окрестности этой точки равновесия демонстрируют качественное поведение, характерное для траекторий в окрестности седловой точки. Устойчивые траектории седловых точек (π; 0) и (- π; 0) образуют сепаратрисы, которые отделяют области, характеризующиеся тем, что все траектории, начинающиеся внутри этих областей, стремятся к точке равновесия (0; 0). Эта картина периодически повторяется. Тот факт, что траектории могут стремиться к различным точкам равновесия, объясняется тем, что маятник может совершить несколько полных оборотов, прежде чем он установится в нижнем положении равновесия.

Подход, который использовался при анализе примера маятника, связан с исследованием фазовых портретов уравнений его динамики. Попытки обобщить этот подход на случай системы общего вида (1) связаны с большими трудностями и во многих случаях будут безуспешны. Однако заключения, которые были сделаны выше в отношении устойчивой точки равновесия маятника, могут быть получены с использованием энергетических концепций.

Обозначим энергию маятника, представляющую собой сумму кинетической и потенциальной энергий, через $E(x)$ и предположим, что потенциальная энергия определена таким образом, что $E(0) = 0$. Тогда

$$E(x) = \int_0^{x_1} a \sin y \, dy + \frac{1}{2}x_2^2 = a(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2}x_2^2 .$$

При отсутствии трения $(b = 0)$ система консервативна. Поэтому при движении системы $E = \text{const}$ или, другими словами, вдоль решений системы $dE/dt = 0$. Поскольку при $E(x) = c$, где c – малая величина, вокруг $x = 0$ образуется замкнутый контур, т.е. $x = 0$ является устойчивой точкой равновесия, что соответствует фазовому портрету (рис.2).

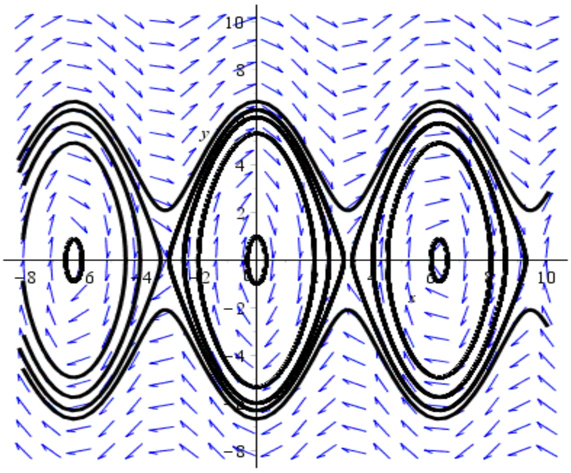

Рис. 2

В случае, когда в системе имеет место трение $(b > 0)$ во время её движения энергия рассеивается, т.е. вдоль решений системы $dE/dt \leq 0$. Вследствие наличия трения энергия E может при движении системы оставаться постоянной неопределенно долгое время, и поэтому она продолжает уменьшаться до тех пор, пока не достигнет нулевого значения, что соответствует стремлению траектории к точке $x = 0$ при $t \to \infty$. Таким образом, анализ производной функции E вдоль траекторий системы позволяет исследовать свойства устойчивости точки равновесия.

В 1892 году Ляпунов показал, что для установления свойств устойчивости состояния равновесия вместо функции энергии могут использоваться некоторые другие функции. Пусть $V: D \to R$ – непрерывно дифференцируемая функция, определённая в области $D \subset R^n$, содержащей начало координат. Производная V вдоль траекторий системы (1), обозначаемая $\dot{V}(x)$, имеет следующий вид:

$$\dot{V}(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x).$$

Производная V вдоль траекторий системы зависит от уравнений этой системы. Следовательно, представление $\dot{V}(x)$ будет различно для различных систем. Теорема Ляпунова может быть сформулирована следующим образом.

Теорема 1. *Пусть $x = 0$ – точка равновесия автономной системы $\dot{x} = f(x)$ и $D \subset R^n$ – открытая область, содержащая $x = 0$. Пусть $V: D \to R$ – непрерывно дифференцируемая функция, такая что*

$$V(0) = 0 \text{ и } V(x) > 0 \text{ в } D\backslash\{0\}, \quad (3)$$

$$\dot{V}(x) \leq 0 \text{ в } D. \quad (4)$$

Тогда $x = 0$ *устойчива. Более того, если* $\dot{V}(x) < 0$ *в* $D\backslash\{0\}$*, то* $x = 0$ *асимптотически устойчива* [1, с. 118].

В дальнейшем будем рассматривать только приведенную в статье теорему и на её основе проводить исследование систем дифференциальных уравнений. Введем ряд определений:

- Непрерывно дифференцируемая функция $V(x)$, удовлетворяющая условиям (3) и (4) называется функцией Ляпунова.
- Поверхность $V(x) = c$ называется поверхностью Ляпунова или поверхностью уровня.
- Функция $V(x)$, удовлетворяющая условию (3) при $x \neq 0$, называется положительно определенной.
- Если функция $V(x)$ удовлетворяет более слабому условию $V(x) \geq 0$ при $x \neq 0$, она называется положительно полуопределенной.
- Функция $V(x)$ называется отрицательно определённой или отрицательно полуопределённой, если $-V(x)$ является соответственно положительно определённой или положительно полуопределённой.
- Если $V(x)$ не имеет определённого знака в смысле приведённых выше определений, она называется знаконеопределённой.

С учетом введённых терминов можно переформулировать теорему Ляпунова: *начало координат устойчиво (асимптотически устойчиво), если существует непрерывно дифференцируемая положительно определённая функция* $V(x)$*, такая что* $\dot{V}(x)$ *отрицательно полуопределена (отрицательно определена).*

Пример 2. Рассмотрим уравнение маятника без трения

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -a\sin x_1 \end{cases}$$

и исследуем точки равновесия в начале координат. В качестве функции Ляпунова выберем функцию энергии:

$$V(x) = a(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2}x_2^2.$$

Очевидно, что $V(0) = 0$ и $V(x)$ положительно определена в области $-2\pi < x_1 < 2\pi$. Производная $V(x)$ вдоль траекторий системы имеет вид

$$\dot{V}(x) = a\dot{x}_1 \sin x_1 + x_2\dot{x}_2 = ax_2 \sin x_1 - ax_2 \sin x_1 = 0.$$

Таким образом, условия (3) и (4) теоремы выполнены, и можно сделать заключение, что начало координат устойчиво. Поскольку $\dot{V}(x) \equiv 0$ можно сказать, что начало координат асимптотически устойчиво. Траектории, начинающиеся на поверхности Ляпунова $V(x) = c$, остаются на этой поверхности при всех будущих моментах времени.

Пример 3. Рассмотрим уравнение маятника с учетом трения

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -a\sin x_1 - bx_2. \end{cases}$$

Рассмотрим в качестве функции Ляпунова ту же функцию $V(x) = a(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2}x_2^2$. Тогда

$$\dot{V}(x) = a\dot{x}_1 \sin x_1 + x_2\dot{x}_2 = -bx_2.$$

Производная $\dot{V}(x)$ – отрицательно полуопределённая функция. Она не является отрицательно определённой, т.к. $\dot{V}(x) = 0$ при $x_2 = 0$ вне зависимости от значения x_1, т.е. $\dot{V}(x) = 0$ вдоль x_1-оси. Таким образом можно сделать заключение, что начало координат устойчиво. Однако при анализе фазового портрета при $b > 0$ можно заметить, что начало координат асимптотически устойчиво. Функция энергии не удовлетворяет условиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости, поскольку её производная $\dot{V}(x) = -bx_2^2$ отрицательно полуопределена. Заметим, что $\dot{V}(x)$ отрицательна везде, за исключением линии $x_2 = 0$, где $\dot{V}(x) = 0$. Для того чтобы для траектории рассматриваемой системы было выполнено $\dot{V}(x) = 0$, необходимо, чтобы эта траектория располагалась целиком на линии $x_2 = 0$. Это можно обеспечить только в точке начала координат, т.к. из уравнений системы видно:

$$x_2(t) \equiv 0 \Rightarrow \dot{x}_2 \equiv 0 \Rightarrow \sin x_1(t) \equiv 0.$$

Следовательно, на промежутке $-\pi \leq x_1 \leq \pi$ линии $x_2 = 0$ условие $\dot{V}(x) = 0$ вдоль траекторий системы может быть выполнено лишь в начале координат. Таким образом, вдоль этих траекторий функция $V\big(x(t)\big)$ должна убывать к 0 и, следовательно, $x(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Этот результат соотносится с тем, что при наличии трения энергия находящейся в движении системы не может оставаться постоянной.

Этот пример выявляет важную особенность теоремы устойчивости Ляпунова: эта теорема дает лишь достаточные условия устойчивости. Не выполнение для выбранной функции Ляпунова условий устойчивости или асимптотической устойчивости не означает, что начало координат не является устойчивой или асимптотически устойчивой точкой равновесия системы. Приведённое выше рассуждение указывает так же на то, что если в области вблизи начала координат определена функция Ляпунова, чья производная вдоль траекторий системы отрицательно полуопределена, и если установлено, что ни одна из траекторий не может оставаться в точках, где $\dot{V}(x) = 0$, за исключением начала координат, то начало координат асимптотически устойчиво. Эта идея следует из принципа инвариантности Ла-Салля [1, с.133].

Теорема 2. *Пусть* $\Omega \subset D$ *– компактное множество, которое является положительно инвариантным множеством для системы* (1). *Пусть* $V: D \to R$ *– непрерывно дифференцируемая функция, такая что* $\dot{V}(x) \leq 0$ *в* Ω. *Предположим, что* E *– множество всех точек из* Ω, *в которых* $\dot{V}(x) = 0$, *и* M *– наибольшее инвариантное множество, содержащееся в* E. *Тогда каждое решение, начинающееся в* Ω, *стремится к* M *при* $t \to \infty$.

Пример 4. Рассмотрим систему первого порядка $\dot{y} = ay + u$ и адаптивный закон управления $u = -ky$, $\dot{k} = \gamma y^2, \gamma > 0$.

Полагая $x_1 = y$ и $x_2 = k$, получаем замкнутую систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -(x_2 - a)x_1, \\ \dot{x}_2 = \gamma x_1^2. \end{cases}$$

Ось ординат $x_1 = 0$ представляет собой множество состояний равновесия. Покажем, что траектории стремятся к этому множеству при $t \to \infty$, т.е. адаптивный регулятор обеспечивает стремление выхода системы y к нулю. Рассмотрим функцию Ляпунова

$$V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2\gamma}(x_2 - b)^2,$$

где $b > a$. Производная V вдоль траекторий системы определяется равенством

$$\dot{V}(x) = x_1\dot{x}_1 + \frac{1}{\gamma}(x_2 - b)\dot{x}_2 = (-x_1^2)(x_2 - a) + x_1^2(x_2 - b) = -x_1^2(b - a) \leq 0.$$

Таким образом, $\dot{V}(x) \leq 0$. Поскольку $V(x)$ радиально неограниченна, множество

$\Omega_c = \{x \in R^2 / V(x) \leq \text{c}\}$ компактно и является положительно инвариантным. Полагая $\Omega = \Omega_c$, получаем, что все условия теоремы 2 (Ла-Салля) выполнены. Множество E задастся отношением $\text{E} = \{x \in \Omega_c \ / \ x_1 = 0\}$. Поскольку каждая точка на оси ординат $x_1 = 0$ является точкой равновесия, E является инвариантным множеством. Поэтому в рассматриваемом примере $M = E$. Из теоремы 2 следует, что любая траектория, начинающаяся в Ω_c стремится к E при $t \to \infty$, т.е. $x_1(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Более того, поскольку $V(x)$ радиально неограниченна, полученное утверждение выполнено глобально, т.е. оно справедливо для всех начальных условий $x(0)$, потому что для любого $x(0)$ константа c может быть выбрана настолько большой, что $x(0) \in \Omega_c$.

Как видим, Ла-Салль обобщил теорему Ляпунова ослабив требования относительно отрицательной определенности производной функции Ляпунова, показал возможность использования в случаях, когда система имеет не только одну изолированную точку равновесия, но и целое множество устойчивых состояний, установил, что функция Ляпунова $V(x)$ не обязательно должна быть положительно определенной и её построение не связано с построением множества Ω.

В случае линейной стационарной системы $\dot{x} = Ax(t)$ устойчивость точки равновесия $x = 0$ может быть полностью охарактеризована на основании информации о местоположении собственных чисел матрицы A. Этот метод анализа рассмотрен в работе [4], в которой также исследуется вопрос, о том, когда и как может быть установлен факт устойчивости точки равновесия с использованием линеаризации системы в окрестности этой точки.

Список литературы

1. Халил Х.К. (2009) Нелинейные системы. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований.

2. Ла-Салль Ж., Лефшец С. (1964) Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. М.: МИР.

3. Мелякова О.Ю. (2016) Исследование устойчивости нелинейных систем на примере уравнения маятника // Международный студенческий научный вестник, вестник №3 (часть3) М.: ИД «Академия естествознания».

4. Барбашин Е.А. (2013) Введение в теорию устойчивости. М.: Наука.

APPLICATION OF THE METHOD OF LYAPUNOV TO INVESTIGATE ON THE STABILITY OF LINEAR STATIONARY SYSTEMS

I.A. Yeletskikh
Cand. Sci. (Phys. –Math.), associate professor
yeletskikh.irina@yandex.ru
Yelets

Bunin Yelets State University

Abstract. The paper investigates the general questions of the theory of stability according to Lyapunov: the definitions of stability, instability and asymptotic stability, equilibrium points are given, the main provisions are determined for conditions of autonomous systems. The article presents the problems on the investigation of the qualitative behavior of a dynamic system at equilibrium points using the first Lyapunov method. The use of computer technology allows the application of well-known Lyapunov theorems to be expanded. In particular, to obtain a visual representation of the behavior of the system in the vicinity of the equilibrium point, to formulate converse theorems that allow one to expand the class of various processes and phenomena in their mathematical modeling. Using the model of the mathematical pendulum as an example, the investigation of stability and asymptotic stability of equilibrium points is carried out using phase portraits, using energy concepts, using certain functions (Lyapunov functions) given in a certain way. This example reveals an important feature of the Lyapunov stability theorem: this theorem gives only sufficient stability conditions. However, not fulfilling the conditions of stability or asymptotic stability for the chosen Lyapunov function does not mean that the origin of coordinates is not a stable or asymptotically stable equilibrium point of the system. This statement is confirmed by the LaSalle invariance principle, which generalizes the Lyapunov theorem by weakening the requirement for negative definiteness of the derivative of the Lyapunov function, shows the possibility of using in cases when the system has not only one isolated equilibrium point, but also a whole set of stable states; that the Lyapunov function does not necessarily have to be positive definite and its construction is not connected with the construction of a positively invariant set. The proposed by LaSalle generalization of the main Lyapunov theory is considered in the case of a linear stationary system.

Keywords: stability, instability, asymptotic stability autonomous system, linear stationary system, invariance principle.

References

1. Khalil Kh.K. (2009) Nelineynyye sistemy. M.–Izhevsk: Institut kompyuternykh issledovaniy.
2. La-Sall Zh., Lefshets S. (1964) Issledovaniye ustoychivosti pryamym metodom Lyapunova. M.: MIR.
3. Melyakova O.Yu. (2016) Issledovaniye ustoychivosti nelineynykh sistem na primere uravneniya mayatnika //Mezhdunarodnyy studencheskiy nauchnyy vestnik №3 (chast 3) M.: ID «Akademiya estestvoznaniya».
4. Barbashin E.A. (2013) Vvedeniye v teoriyu ustoychivosti. M.: Nauka.