УДК 51(09), 908

ИСТОРИЯ ПРИМЕНЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА В ЛГУ

Ирина Ивановна Демидова
к.ф.-м. н, ст.н.с.
maria_ib@mail.ru
г. Санкт-Петербург

Санкт-Петербургский государственный университет

Аннотация. Анализируется история применения интегральных уравнений Вольтерра для описания особенностей поведения реальных полимерных материалов в неизотермических условиях и для решения задач термовязкоупругости и фототермовязкоупругости.

Ключевые слова: интегральные уравнения Вольтерра 2 рода, обобщённые кривые, термовязкоупругость, фототермовязкоупругость.

К 105 – летию Ю.Н. Работнова, Л.М. Качанова
и 90-летию И.И. Бугакова

Введение. В механике деформируемого твёрдого тела есть дисциплина теория ползучести, в которой изучаются зависимости деформации материалов от продолжительности действия нагрузок. Ползучесть свойственна всем реальным материалам, в частности, полимерным материалам при любых температурах. В числе первых исследователей, обнаруживших явление деформирования материалов во времени при постоянной нагрузке были Л.Вика (1834, изучал свойства бетона), В. Вебер (1835, провёл эксперименты с шёлковыми нитями и обнаружил явление, которое позднее было названо упругим последействием), В. Кольрауш (1847, физик, изучал упругое последействие). Д. Максвелл (1867) впервые представил закон деформирования по времени в виде дифференциального уравнения. Несколько позднее в 1874 году Л. Больцман предложил феноменологическую линейную теорию ползучести изотропных материалов, основанную на принципе сложения, и опубликовал более общий математический аппарат для описания явления линейной ползучести. Этот аппарат является и в настоящее время разделом теории интегральных уравнений. В 1909 году В. Вольтерра построил иным путем те же уравнения.

Известный итальянский математик и физик Вито Вольтерра (1860-1940), член-корреспондент Физико-математического отделения Петербургской академии наук (1908 год), почётный член АН СССР (1926 год) работал в области дифференциальных уравнений с частными производными, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений функционального анализа, теории упругости. С 1884 года учёный начал исследования интегральных уравнений при решении проблемы, посвящённой распределению электрического заряда на сферическом сегменте. Он показал, что эта задача приводит к решению уравнения, которое в современных терминах называется интегральным уравнением первого рода с симметричным ядром [1]. Позднее Вольтерра перешёл к рассмотрению интегрального уравнения второго рода с переменным верхним пределом интегрирования.

$$\ddot{F}a = \int_0^t F(t-\omega)da(\omega) \tag{1}$$

Здесь F(t)–материальная функция; F(t)=0 при t<0, F(0) = F_0 при t=0. Интегрирование правой части (1) по частям дает

$$\ddot{F}_a = F_0 a(t) + \int_0^t \dot{F}(t-\omega)a(\omega)d\omega\,. \tag{2}$$

Точка означает производную по временному аргументу t. Оператор **F** полностью определяется функцией F(t). Развитие теории шло по линии связи ее с экспериментами путем подбора ядер F(t) интегральных зависимостей. Были развиты направления общей линейной наследственной теории для разных отраслей техники, связанных с использованием различных материалов.

Такой специальный тип интегральных уравнений получил название интегральное уравнение типа Вольтерра. Учёный использовал уравнения в астрономии (Об изменяемости широт,1898), в физике (О потоке механической энергии, 1899). Он старался охватить предмет как можно шире и придать изложению увлекательную форму. Таким было выступление Вито Вольтерры в 1901 при вступлении в должность руководителя кафедры в Римском университете - «О некоторых возможностях применения математики к биологии и экономике») и при изучении вязкоупругих материалов. [1,37 стр.] С 1906 года Вольтерра в «Стокгольмских лекциях по уравнениям в частных производных отметил возможность с единой точки зрения рассмотреть различные задачи по теории потенциала, распространению волн, электродинамике, теории упругости». С 1900 по 1914 г. он обратился к созданию математического аппарата теории дисторсий, теории остаточного состояния и создал новую дисциплину- теорию упругости многосвязных тел.[1, 41 стр.] Результаты своих исследований проверил сам учёный экспериментально, а инженеры из Рима проверили его результаты методом фотоупругости [1, 49 стр.] Начиная с 1908 года, Вольтерра посвятил исследованию принципа остаточного действия. Он продолжил исследование уравнения, предложенного в 1874 году Больцманом для упругой среды при наличии вязкости в одномерном случае между напряжением и деформацией.

Поскольку в 60-е годы полимерные материалы начали интенсивно применяться в технике, возник вопрос о прочности и надёжности конструкций из таких материалов. Л. М. Качанов (1914-1993), бессменный заведующий кафедрой теории упругости мат-меха ЛГУ с 1956 до 1977, внёс значительный вклад в теорию пластичности, ползучести, механику разрушения. На кафедре с 1929 года существовала лаборатория фотоупругости, в которой исследовалось напряженное состояние в моделях конструкций [2]. Материалы моделей выбирались из оптически чувствительных полимерных материалов. При решении задач на объёмных моделях использовались методы «замораживания», т.е. нагревания модели под нагрузкой и охлаждении. Л.М. Качанов обратил внимание на возможность обоснования применяемых методов, описания механических свойств полимерных материалов и функционирование конструкций из полимеров и их композиций на основе уравнений Вольтерра и предложил аспиранту И.И. Бугакову (1929-1989) тему диссертации применительно к методу фотоупругости.

В. Вольтерра
(1860-1940)

Л. М. Качанов
(1914-1993)

И.И. Бугаков
(1929- 1989)

Метод фотоползучести. История развития метода фотоползучести тесно связана с развитием теории ползучести для металлов, поскольку сначала на полимерных материалах моделировалась ползучесть металлов, а первые полимерные материалы были, в основном, линейными с узким температурным интервалом для проведения исследований.

Для описания поведения полимеров в линейной теории ползучести предлагалось использовать интегральные соотношения наследственного типа Больцмана- Вольтерра. Первые исследования И.И. Бугакова образцов из целлулоида на ползучесть показали, что этот материал в узком интервале нагрузок и температур обладает ползучестью. Им были получены линейные зависимости между оптическими и механическими свойствами материала, разработан метод изохронных кривых. Показано, что возможно моделировать на этом материале задачи ползучести для металлов [2].

Приведенное время. А.Р. Ржаницин (1911-1987)- член-корреспондент Академии по строительству и архитектуре, известный специалист по строительной механике, теории упругости и теории ползучести, развил теорию Больцмана - Вольтерра для учета изменяющейся температуры, применив принцип температурно-временного соответствия для механических параметров. Основные идеи принципа (1939 г.) были высказаны в работах А.П. Александрова (1903-1994), физик, академик АН СССР, и Ю.С. Лазуркина (1916-2009), специалиста в области химии и физики полимеров. Влияние температуры на реологические свойства материалов можно учесть с помощью внутреннего (приведенного) времени ξ, которое связывается с внешним временем t зависимостью в интегральной форме

$$\xi(t) = \int_0^t g[T(\rho)]d\rho \tag{3}$$

при начальном условии $\xi = 0$ при $t = 0$. Здесь g– материальная функция температуры, называемая масштабом времени. Это непрерывная неотрицательная возрастающая функция: $dg/dT>0$.

Система уравнений фототермовязкоупругости (фтву). При решении задач методом фтву модели изготавливают из оптически чувствительных полимерных материалов, нагружают в соответствии с условиями задачи, измеряют оптические характеристики: δ- оптическая разность хода, φ - параметр изоклины. И далее численными методами находят напряжение

$$\sigma_{11}(x_i, t) - \sigma_{22}(x_i, t) = \mathbf{R}_\xi\, \delta(x_i, t) \cos 2\varphi(x_i, t) \tag{4}$$

$$\sigma_{12}(x_i, t) = (1/2)\,\mathbf{R}_{\xi}\,\delta(x_i, t)\sin 2\varphi(x_i, t) \tag{5}$$

где $\mathbf{R}_{\xi} = \mathbf{C}_{\xi}^{-1}$- оптический оператор, определяемый функцией R(ξ). Из уравнений (4), (5) можно найти только касательное напряжение и разность нормальных напряжений. Для того, чтобы найти каждое из нормальных напряжений по отдельности, добавляется дифференциальное уравнение равновесия

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2} = 0 \tag{6}$$

и граничное условие в напряжениях.

Обобщённые функции. Для определения функций, определяющих операторы $\mathbf{R}_{\xi}$, необходимо было провести эксперименты на образцах с известным распределением напряжений.

Для исследуемого материала проверялись принцип суперпозиции и принцип температурно- временного соответствия, находили области линейности.

Кроме этого, для перехода от решения модельной задачи к натуре необходимо исследование и механических свойств материала. Реологические уравнения линейной неизотермической ползучести для изотропных полимерных материалов в области линейной ползучести запишутся в виде

$$\varepsilon_{ij}(t) = (1+\boldsymbol{\nu}_{\xi})\,\mathbf{D}_{\xi}\,\sigma_{ij}'(t) + \mathbf{K}\,\sigma_m(t)\,\delta_{ij} + \varepsilon^T(t)\,\delta_{ij} \tag{7}$$

$\mathbf{D}_{\xi}$,–неизотермический оператор ползучести при одноосном растяжении и сжатии, $\boldsymbol{\nu}_{\xi}$ –неизотермический оператор поперечной ползучести, соответствующий коэффициенту Пуассона, **К** –податливость при гидростатическом давлении. На основании опытов построены обобщённые оптическая C(ξ) и механическая D(ξ) функции ползучести в широком интервале времени ξ, охватывающем более 14 десятичных порядков рис. 1.

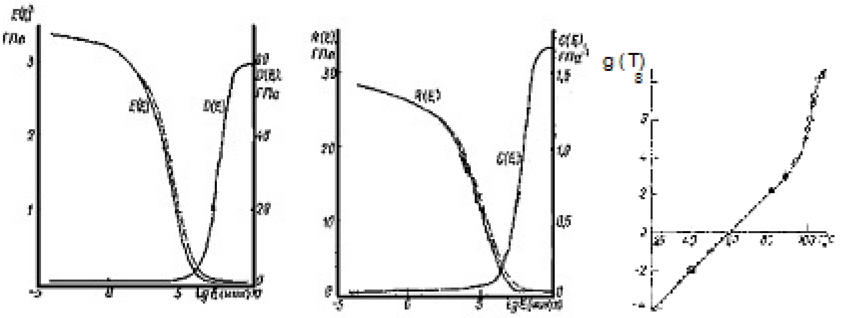

Рис.1.Обобщённые механические функции D(ξ), E(ξ) и оптические кривые ползучести C(ξ), R(ξ) и функция смещения g (T)

Полученные результаты показали, что эпоксидный полимер ЭД-20 является термореологически и термооптически простым материалом. Обобщенные кривые используются для решения разнообразных задач термовязкоупругости и для расшифровки интерференционных картин.

Численная реализация метода. Часто при математическом решении задач ползучести удобным оказывается применение оператора $\mathbf{E} = \mathbf{D}^{-1}$, при экспериментальном решении - оператора $\mathbf{R} = \mathbf{C}^{-1}$, входящего в уравнения (4, 5, 7). Функции E(ξ) и R(ξ), определяющие операторы **E** и **R** находятся из решения линейных интегральных уравнений Вольтера 11 рода

$$\mathbf{D}E(\xi) = h(\xi),\ \mathbf{C}R(\xi) = h(\xi).$$

Для проведения расчётов совместно с В.С, Екельчиком (1936), известным специалистом по изготовлению конструкций из композитных материалов для кораблей, была предпринята попытка аналитического описания обобщенных функции C(ξ) и E(ξ) дробно-экспоненциальными функциями Ю.Н. Работнова. Отметим, что Ю.Н. Работнов (1914- 1985) - академик АН СССР. Основные работы Ю. Н. Работнова относятся к теории упругости и пластичности, теории оболочек и устойчивости упруго-вязкопластических систем, теории ползучести металлов и наследственной теории упругости, механике разрушения и механике композиционных материалов. В частности, он стал одним из создателей теории ползучести металлов.

Оказалось, что достаточно точное описание обобщённых функций D(ξ) и C (ξ) во всем интервале возможно только суммой не менее трех интегралов от $Э_\alpha$ - функций (с одинаковым показателем дробности α как для D(ξ), так и для C (ξ).

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \left[1 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int_0^t Э_\alpha \left(-\beta_i, \tau \right) d\tau \right]$$

Такое представление значительно усложнило бы численный расчёт.

Поскольку обобщённые кривые невозможно было описать простыми аналитическими функциями, то после консультаций с проф. С.Г. Михлиным (1908-1990), выдающимся специалистом в области интегральных уравнений и численных методов, и ст.н.с. В.Я. Ривкиндом (1940–1996), специалистом по численным методам решения задач гидромеханики и теории упругости, было принято решение о численном решении поставленных задач. Расчёты проводились на машинах М-222 на базе вычислительного центра математико-механического факультета ЛГУ. Программы вычислений были составлены и отлажены аспиранткой Лобановой Г.Ф., инженером Уткиным А.А. В программах для ЭВМ предусмотрено табличное задание функций материала.

Примеры решения термовязкоупругих задач методом фтву. Далее были решены температурные задачи вязкоупругости при действии однородных и неоднородных, стационарных и нестационарных температурных полей, а также задачи для составных тел.

Задача об однородном нагревании и охлаждении составных моделей в жёстком кольце из металла: 1 – стержень, 2- кольцо, 3- модель «звёздочка».

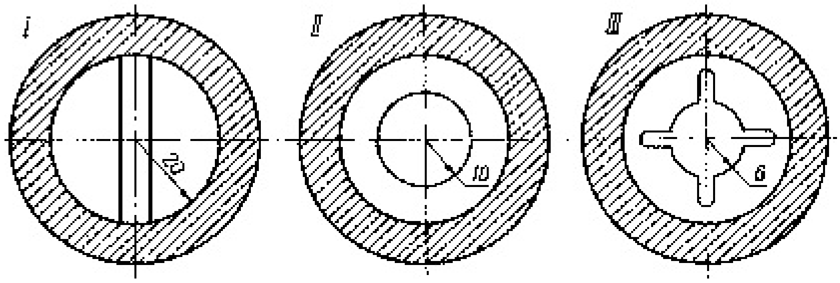

Рис. 2. Исследованные составные модели

По измеренному двупреломлению вычислили кинетику напряжений, используя обобщённые кривые, которые строятся для конкретного материала и программы изменения температуры (Рис.3).

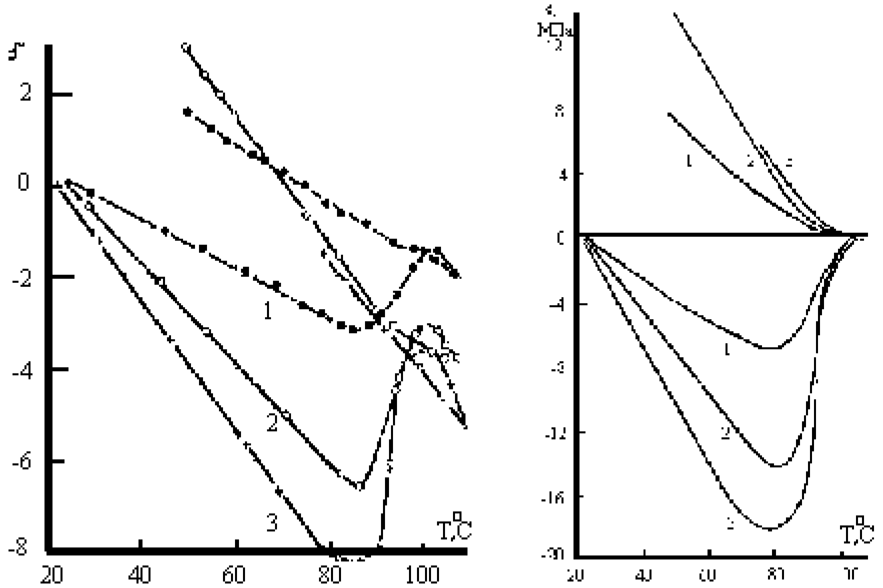

Рис. 3. Кинетика двупреломления и напряжений в моделях 1-3

Связь исходных задач о составных телах с задачей о защемлённом стержне. Если ввести скалярную функцию времени

$$\sigma(t) = \mathbf{E}_{\xi}\upsilon, \tag{8}$$

имеющую размерность напряжения, то она зависит от реологии материала, разности тепловых деформаций $\upsilon = \upsilon(T)$ и изменения температуры $T = T(t)$. Функция $\sigma(t)$ есть напряжение в полимерном стержне с жестко защемленными концами (рис.2.модель 1). Предполагается, что программы нагревания и охлаждения стержня те же, что и в задачах для моделей 2,3.

Вследствие линейности систем решение краевой задачи в напряжениях имеет вид

$$\sigma_{ij}(x, t) = a_{ij}^{\xi}\,\sigma(t), \tag{9}$$

где a_{ij}^{ξ} - компоненты безразмерного симметричного двухвалентного тензора, которые зависят от геометрии задачи (формы тела, размеров и положения поверхности), от координат точек тела x_i. Заметим, что аналитические функции операторов Вольтерра сами являются операторами Вольтерра.

Таким образом, применение интегральных уравнений Вольтерра позволило установить соотношения ((9), которое значительно упростило решение задач о составных телах [6]. На основе анализа уравнений наследственного типа и особенностей поведения реальных полимерных материалов в неизотермических условиях, построены приближенные уравнения термовязкоупругости и фототермовязкоупругости для случаев монотонных изменений температуры, позволяющие упростить решения температурных задач и обработку экспериментальных данных.

Результаты исследований опубликованы в монографиях и работах коллег [4-7].

Отметим, что теоретические и экспериментальные исследования были продолжены для материалов с нелинейными свойствами с учётом зависимости приведенного времени (3) от напряжений [5, 7].

Благодарности: Автор благодарит всех сотрудников лаборатории оптического метода НИИММ им. акад. В.И. Смирнова и Вычислительного центра за помощь в работе. Особо хочется вспомнить сотрудников лаборатории зав.лаб. ст.н.с. С.П. Шихобалова, ст.н.с. Е.И. Эдельштейна. Большую помощь в работе оказали ст.н.с. Т.Д. Максутова, инженеры А.Н. Спецаков, Н.И. Александрова и А.А. Уткин.

Список литературы

1. Полищук Е.М. Вито Вольтерра. Изд. Наука. Ленинградское отд. Ленинград. 1977. 114с.
2. Демидова И.И. Развитие метода фотоупругости. Вестник Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина. Серия «Педагогика» (История и теория математического образования). Елец. 2016. С. 54-59
3. Екельчик В.С., Демидова И.И. Об описании реологии полимеров с помощью сумм дробно-экспоненциальных функций. Сб. «Исследования по упругости и пластичности" Изд. ЛГУ, 1978. №12. 25-30 с.
4. Бугаков И.И. Ползучесть полимерных материалов. М. Наука 1973 г. 288 с
5. Бугаков И.И. Фотоползучесть. М.: Наука. 1991. 165 с
6. Бугаков И.И., Демидова И.И. Метод фототермовязкоупругости. СПб. 1993.166 с.
7. Федоровский Г.Д. Деформирование реологически сложных полимерных сред : автореферат дисс. кандидата физико-математических наук. Санкт-Петербург, 1998. 15 с

HISTORY OF APPLICATION OF VOLTERRA' INTEGRAL EQUATIONS IN LENINGRAD UNIVERSITY

I. Demidova
Cand. Sci. (Phys.–Math.), senior researcher
maria_ib@mail.ru
Saint Petersburg

Sankt Petersburg University

Abstract. History of the application of the Volterra'integral equations for the description of the features of the behaviors of a real polymer materials under the non-isothermal conditions and for the decision of the problems for the thermoviscoelasticity and photothermoviscoelasticity.

Keywords: Volterra'integral equations, generalized curves, thermoviscoelasticity, photothermoviscoelasticity

References

1. Polishuk E. Vito Volterra. "Nauka". Leningrad. 1977. 114p.
2. Demidova I. Development of method photoelsticity. Vestnic of Elets university by name I. Bunin. Elets. 2016. P. 54-59
3. Ekelchik V., Demidova I. About description of polymer rheology by summe of fractional exponential functions. Proceedings "Elastic and plastic Investigations". Leningrad. 1978. N 12. 25-30 p.
4. Bugakov I. Creep of polymer materials. Moscow. Nauka. 1973. 288 p.
5. Bugakov I. Photocreeps. Moscow. Nauka. 1991. 165 p.
6. Bugakov I., Demidova I. Photothermoviscoelasticity method. Saint Petersburg. 1993. 166 p.
7. Fedorovskii G. Deformation of rheology complex polymer media. Autoabstract of dissertation for kandidat (phd) on physical-mathematicals sciences. Saint Petersburg. 1998.15 c.