5. Bogun, V.V. (2014) Remote dynamic settlement projects on a research of functions of material variable: manual [*Distancionnye dinamicheskie raschetnye proekty po issledovaniyu funkcij veshchestvennogo peremennogo: uchebnoe posobie*]. *Yaroslavl: Kantsler publishing house.*
6. Dvoryatkina, S.N., Dyakina, A.A.,Rozanova, S.A. (2017). Synergy of humanitarian and mathematical knowledge as pedagogical condition of the solution of cross-disciplinary problems [*Sinergiya gumanitarnogo i matematicheskogo znaniya kak pedagogicheskoe uslovie resheniya mezhdisciplinarnyh problem*]. *Integration of education.* V. 1 (86). Pp.8-16.
7. Dvoryatkina, S.N., Rozanova, S.A. (2016). Development of integrative courses on the basis of synergetic approach at the solution of professional and applied [*Razrabotka integrativnyh kursov na osnove sinergeticheskogo podhoda pri reshenii professional'nyh i prikladnyh zadach*]. *Yaroslavl pedagogical bulletin. It is gray. "Psychology and pedagogical sciences".*V. 6. Pp. 127-131.
8. Kuznetsov, A.A., Bogun, V.V., Smirnov, E.I. (2010). Problems and prospects of realization of the uniform environment of distance learning of students of pedagogical higher education institutions [*Problemy i perspektivy realizacii edinoj sredy distancionnogo obucheniya studentov pedagogicheskih vuzov*]. *Information scientist and education* . V. 7. Pp.74-82.
9. SmirnovE.I., BogunV.V., UvarovA.D. (2016). Synergy of mathematical education: Introduction to the analysis [*Sinergiya matematicheskogo obrazovaniya: Vvedenie v analiz*].*Yaroslavl:Kantsler publishing house.*
10. Smirnov, E.I., Smirnov, N.E., Uvarov, A.D. (2017). Stages of technological maintenance of process of self-organization in mathematical education of future teacher [*Etapy tekhnologicheskogo soprovozhdeniya processa samoorganizacii v matematicheskom obrazovanii budushchego pedagoga*]. *Yaroslavl pedagogical bulletin.* V. 3. Pp.102-110.

УДК 373.51

О ПРЕОДОЛЕНИИ НЕКИХ СТЕРЕОТИПОВ В ОБОЗНАЧЕНИЯХ И ТЕРМИНОЛОГИИ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ И НАЧАЛ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Александр Борисович Будак
к.ф.м.н., доцент
e-mail abbudak@cs.msu.su
г. Москва

МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет ВМК,
кафедра общей математики

Аннотация. В данной статье содержатся важные, на взгляд автора, предложения об использовании обозначений и применении терминов в теории и задачах элементарной и начал высшей математики. Предлагается дополнить, уточнить и сделать более последовательными использование терминологий в элементарных алгебре, тригонометрии и геометрии, математическом анализе, высшей алгебре и аналитической геометрии и других математических дисциплинах.

Ключевые слова: стереотипы, длина отрезка, величина угла, знаки включения, скалярное и векторное произведения векторов, эллипс, гипербола, парабола, комплексное число.

Остановимся кратко на проблемах, на которые недостаточно обращают внимание многие авторы учебников и учебных пособий по элементарнойматематике и началам высшей математики.

Об этих проблемах автор неоднократно докладывал на различных конференциях: в г. Чебоксары 2011 и 2013 годов, ISAAK – конгрессе в Москве 2011 г., конференциях НМС по математике: «Образование, наука и экономика в вузах. Интеграция в международное образовательное пространство», Армения 2011, 2014, 2015 гг.

Автору часто приходится обращать внимание своих коллег, публикующих разного рода книги и брошюры по элементарной математике, многих авторов, присылающих в НМС по математике рукописи, как по вопросам элементарной математики, так и по началам высшей математики, претендующих на тот или иной гриф, на все эти проблемы.

Очень часто наблюдаются серьезные неточности в изложении ряда математических вопросов, причем довольно удивительно, что многие авторы действительно следуют сложившимся стереотипам или явно ошибочным, или содержащим завуалированные некорректности. Печально, что все это часто выдается за истину в последней инстанции, и авторы порой совершенно не обращают внимание на разного рода математические тонкости.

Остановимся на следующих примерах только что сказанного.

1. В определениях скалярного и векторного произведений двух геометрических векторов часто не учитывается то, что один или оба вектора могут оказаться нулевыми, а потому угол между ними и его величина не определены, помимо этого, говоря о правой или левой тройке векторов, порой забывается, что все эти векторы должны быть ненулевыми. На наш взгляд более корректными являются следующие определения.

Определение 1. Скалярным произведением свободных векторов ***a*** и ***b*** называется число 0, если хотя бы один из этих векторов нулевой и произведение длин этих векторов на косинус величины угла φ между ними, (обозначается величина угла между ненулевыми векторами ***a*** и ***b*** $(\hat{a;b})$) если они оба ненулевые. При этом угол между векторами определен только, *если они оба ненулевые.*

Если эти векторы приведены к общему началу О: ***a*** $=\vec{OA}$, ***b*** $=\vec{OB}$, то угол между ними это угол между лучами ОА и ОВ, его *величина* φ (в радианной мере) изменяется в пределах $0 \le \varphi \le \pi$, скалярное произведение векторов (***a*** , ***b***) в случае ненулевых векторов следует записывать в виде (***a*** , ***b***) = |***a***|·|**b**|·$\cos\varphi$ или (***a*** , ***b***) = |***a***|·|**b**|·$\cos(\hat{a;b})$ ($\varphi = (\hat{a;b})$).

Определение 2. Векторным произведением свободных векторов ***a*** и ***b*** называется нулевой вектор ***c***(***c*** =**o**), если хотя бы один из них является нулевым вектором, если векторы ***a*** и ***b*** ненулевые, то вектор ***c***, удовлетворяющий *условиям*:

1) |***c***| = |***a***|·|***b***|·$\sin\varphi$ или |***c***| = |***a***|·|***b***|·$\sin(\hat{a;b})$ ($\varphi = (\hat{a;b})$);

2) вектор ***c*** ортогонален каждому из векторов ***a*** и ***b***(***c*** $\perp$ ***a***, ***c*** $\perp$ ***b***);

3) если вектор ***c*** – ненулевой (***c*** ≠**o**), то упорядоченная тройка векторов ***a***, ***b***,***c***— правая (правой ориентации).

Обозначается векторное произведение векторов ***a*** и ***b***[***a*** , ***b***] или ***a***×***b***.

Отметим, что в случае **правой** ориентации тройки векторов ***a***, ***b***,***c***, которые сонаправлены соответственно с большим (первым), указательным (вторым) и средним (третьим) пальцами *правой* руки, если смотреть с конца третьего пальца на плоскость первого и второго пальцев, то кратчайший поворот от первого пальца ко второму осуществляется *против часовой стрелки*, а в случае **левой** ориентации тройки векторов ***a***, ***b***,***c***, которые сонаправлены соответственно с большим, указательным и средним пальцами *левой* руки, если смотреть с конца третьего пальца на плоскость первого и второго пальцев, то кратчайший поворот от первого пальца ко второму осуществляется *по часовой стрелке.*

Приведенные, например, в [3] и [4] определения 1 и 2 являются корректными.

2. В определениях кривых второго порядка на плоскости: эллипса, гиперболы, параболы часто не указывается, что: в случае эллипса сумма расстояний от каждой его точки до фокусов должна быть больше расстояния между фокусами; в случае гиперболы модуль разности расстояний от каждой ее точки до фокусов есть величина положительная, причем меньшая расстояния между фокусами; в случае параболы фокус не должен лежать на директрисе. А ведь тогда соответственно под определение эллипса попадает обычный отрезок прямой, под определение гиперболы может попасть прямая и даже плоскость, перпендикулярные отрезку и проходящие через его середину, и объединение двух лучей одной прямой, не имеющих общих точек, под определения параболы — прямая, перпендикулярная директрисе и проходящая через лежащей на ней фокус.

Сформулированные в [3] и [4] "словесные" определения кривых второго порядка корректные в плане четкого соответствия их геометрическим образам. Однако многие авторы предпочитают давать определения кривых второго порядка как множества точек координатной плоскости, координаты которых удовлетворяют неким уравнениям второй степени с двумя переменными, содержащим некие параметры. При этом, порой забывая подчеркнуть, что данным уравнениям удовлетворяют координаты исключительно указанных точек в определенным образом выбранной системе координат, да и потом, пытаясь переводить эти определения на "словесные" забывают оговорить указанные выше важные условия, которые, правда, могут вытекать как из вида уравнений, так и ограничений на указанные параметры

3. Во многих задачах элементарной геометрии часто смешиваются понятия отрезка и его длины, угла и его величины, хотя отрезок и угол – геометрические объекты, состоящие из определенных типов множеств точек, а длины и величины – их числовые характеристики (по сути числа), определенным образом вводимые и обладающие некими "базовыми" свойствами. Можно доказать корректность их введения.

Дело доходит до того, что в одном и том же варианте вступительного испытания по математике в вуз и даже в тексте одной геометрической задачи присутствуют, например, обороты типа "длина отрезка равна 3" и "отрезок равен 5" (см. ниже пример Ж)).

При том, что в векторной алгебре практически везде вектор (направленный отрезок) и его длина четко различаются, как, по сути, так и в обозначениях.

Интересно проанализировать примеры формулировок текстов геометрических задач вступительных экзаменов в период с 1977 по 1984 годы, когда основными школьными учебниками по геометрии были учебники под редакцией А.Н. Колмогорова. Тексты задач заимствованы из книги [2].К некоторым из них приводятся подробные решения с характерной терминологией, четко различающей понятия отрезка и его длины, угла и его величины (правда, авторы в отдельных местах от этой традиции иногда все же отходят, создавая, тем самым, некую непоследовательность рассуждений).

А) <u>МГУ, Мехмат 1977 № 2</u>

Длины боковых сторон трапеции ABCD (AD || BC) равны 3 и 5. Известно, что в трапецию можно вписать окружность. Средняя линия трапеции делит ее на два четырехугольника, отношение площадей которых равно 5/11. Найти длины оснований трапеции. Ответ: |AD|=7, |BC|=1.

Б) <u>МГУ, Мехмат 1977 № 5</u>

Основанием пирамиды SABC является равносторонний треугольник ABC, длина стороны которого равна $4\sqrt{2}$. Боковое ребро SC перпендикулярно плоскости основания и имеет длину 2. Найти величину угла и расстояние между скрещивающимися прямыми, одна из которых проходит через вершину S и середину ребра CB, а другая проходит через вершину C и середину ребра AB.

Ответ: $\pi/4,\ 2/\sqrt{3}$.

В) <u>МГУ, Мехмат 1979 № 3</u>

Отрезок AB является диаметром некоторой окружности. Через его концыА и B проведены две прямые, пересекающие окружность в точках C и D, лежащих по одну сторону от прямой (AB). Точка O, в которой пересекаются эти прямые, равноудалена от концов диаметра AB. Найти радиус окружности, если|CD| = 1 и $O\hat{C}D = \pi / 3$ (заметим: не CD=1 и $\angle$OCD = π / 3). Ответ: R = 1.

Г) МГУ, Мехмат 1980 № 2

В трапеции длина средней линии равна 4, а углы при одном из ее оснований имеют величины 40° и 50°. Найти длины оснований трапеции, если длина отрезка, соединяющего середины этих оснований, равна 1.

Ответ: длины оснований трапеции равны 5 и 3 (вполне допустимы и "словесные" ответы).

Однако примерно с середины 1980-х годов после перехода от основных учебников геометрии под редакцией А.Н. Колмогорова к учебнику А.В. Погорелова произошло, с одной стороны, возвращение к более простой терминологии (замененное в учебниках геометрии равенство фигур на "конгруэнтность" снова стало "равенством").К сожалению, А.В. Погореловым были или удалены из ранее написанных им пособий для учителей многие важные дополнительные теоремы (например, о пересечении двух медиан (как отрезков) и двух биссектрис (как отрезков) треугольника, двух диагоналей (как отрезков) параллелограмма), или не возвращены в основной текст учебника некоторые теоремы, которые были удаленны из текста учебников А.П. Киселева в тексте учебников под ред. А.Н. Колмогорова (например, о пропорциональных отрезках в прямоугольном треугольнике и круге, о квадрате длины отрезка касательной к окружности). И снова стали смешиваться понятия отрезка и его длины, угла и его величины, и резко усилился "разнобой" использования этих понятий в задачах вступительных экзаменов по математике в вузы. Остановимся на некоторых и этих примерах. Подробнее см. [4].

Варианты вступительных испытаний в МГУ 2010 г. (вместо ЕГЭ).

Д) Стороны треугольника равны 3, 5, 7. Найти величину наибольшего угла треугольника. (Терминология "смешанная"). Ответ: 120° или 2π / 3.

Е) Параллелограмм, одна из сторон которого равна 3, описан около окружности радиуса 1. Найти площадь параллелограмма. (Терминология "смешанная", под радиусом понимается число — расстояние от центра окружности до любой из ее точек). Ответ: 6.

Ж) В основании правильной пирамиды ABCDS лежит квадрат со стороной 6. Через середины ребер AD, BC, и CS проведена плоскость. Найти периметр сечения пирамиды этой плоскостью, если длины боковых ребер равны 7. (Терминология "смешанная") Ответ: 16.

З) Найти площадь треугольника ABC, если его сторона BC равна 4, а углы AB равны π /2 и π /8. (Терминология, характерная для задач ЕГЭ последних лет).

Ответ: $2\sqrt{2}$.

И) Ребра куба равны 1. Найти расстояние между серединами его скрещивающихся ребер. (Терминология, характерная для задач ЕГЭ последних лет). Ответ: $\sqrt{6}$ /2.

К) На плоскости расположен отрезок AB длины 24 и две точки P и Q. Точка P равноудалена от A и B на расстояние 15, а точка Q также равноудалена от A и B на расстояние 20. Найти длину отрезка PQ, если известно, что она меньше длины отрезка AB. (Терминология, характерная для задач А) – Г)). Ответ: 7.

Л) Из точки, взятой на окружности, проведены две хорды, образующие угол в 45°. Длина отрезка, соединяющего середины этих хорд, равна 2. Найти длину радиуса окружности. (Терминология, характерная для задач А)–Г), где под радиусом понимается *отрезок*, один из концов которого — центр окружности, другой конец — точка окружности). Ответ: $2\sqrt{2}$.

Если внимательно вчитаться в условия и решения предлагаемых геометрических задач ДВИ по математике в МГУ последних лет, то и в них постоянно наблюдается та же "смешанная" терминология.

Методистам, отвечающим за школьное математическое образование, следовало бы обратить весьма пристальное внимание на проблему преодоления "путаницы" в терминологиях для восстановления математической науки в целом как стройной и строго логически построенной.

В дополнение отметим, следует *не смешивать*: "контурные" углы, "контурные" треугольники и многоугольники, с плоскими (терминология учебников А.В. Погорелова) углами и плоскими треугольниками и многоугольниками как соответствующими контурными фигурами, объединенными со своими внутренними областями (более четкой оказалась ситуация различия окружности и круга, сферы и шара). А также следует обратить внимание и на отсутствие объяснений, почему совпадение прямых, совпадение плоскостей, принадлежность прямой плоскости то относят к случаю параллельности (при этом отношение параллельности рефлексивно, что важно для выделения классов факторизации), то не относят. Подробнее см. [1].

Еще один момент: постоянное использование оборота "опущенный перпендикуляр", который на самом деле может быть и "поднятым вверх", проведенным "в бок" и.т.п. Судя по всему, этот оборот унаследован из учебника планиметрии А.П. Киселева. Однако в цикле школьных учебников геометрии Л.С. Атанасяна, В.Ф. Бутузова и др. везде в подобных ситуациях присутствует единственный и удобный для всяких возможностей расположения геометрических фигур оборот "перпендикуляр *проведен*".

4. Определенной традицией стало давать переопределенные определения частных видов параллелограммов: прямоугольником называют параллелограмм, у которого все углы прямые, хотя достаточно потребовать наличие хотя бы одного прямого угла; ромбом называют параллелограмм, у которого все стороны равны, хотя достаточно потребовать равенство хотя бы двух смежных сторон.

5. В ряде курсов высшей алгебры, авторы, приводя определение ранга матрицы как наибольшего порядка отличных от нуля ее миноров, забывают указать случай, когда ненулевых миноров нет, то есть случай нулевой матрицы, ранг нулевой матрицы по определению считается равным нулю.

6. Примерно с середины 1970-х годов в школьной тригонометрии отказались от записей в ответах к решениям уравнений значений целочисленных параметров вида $n = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \ldots$, заменив их на запись$n \in \mathrm{Z}$, которая все же по смыслу отличается от записи $a \in A$, предполагающей, что a — какой-то элемент множества A, а это не совсем согласуется с ситуацией, когда n оказывается *произвольным* целым числом, "пробегая" все множество целых чисел Z.

В варианте вступительного экзамена по математике на экономический факультет МГУ в 1991 году предлагалось решить уравнение

$$\sin(3\pi\times 2^x) = \cos(\pi\times 2^x) - \sin(\pi\times 2^x)\ .$$

Естественно было сделать замену $t = \pi\times 2^x$, где $t > 0$. Решаяуравнение

$$\sin 3t = \cos t - \sin t,$$

получаем

$$2^x = \frac{1}{2} + n,\ 2^x = \frac{1}{12} + n,\ 2^x = \frac{5}{12} + n,$$

где n принимает любое целочисленное, но *неотрицательное* значение.

Ответ:$x = \log_2\left(\frac{1}{2} + n\right),\ x = \log_2\left(\frac{1}{12} + n\right),\ x = \log_2\left(\frac{5}{12} + n\right),\ n = 0,1,2,\ \ldots$.

Таким же образом записывался ответ в справочнике для поступающих в Московский университет 1992 года. Заметим, не $n \in N_0$, где N_0 —расширенный натуральный ряд чисел (подобное часто наблюдается в ряде книг по подготовке к вступительным экзаменам в вузы: наряду с записью $n \in \mathrm{Z}$ можно встретить записи вида $n = 0,1,2,\ \ldots$, если требуется отбор решений простейших тригонометрических уравнений, но это представляется весьма нелогичным). Однако 90 – 95% абитуриентов написали $n \in Z$, в общем, подразумевая (как уже до этого 15 лет учили в школах), что n — произвольное целое число. Это, разумеется, было, грубой ошибкой, но конкурсная ситуация требовала за эту ошибку не снижать оценку за данную задачу. Получалось, что при неверном ответе задача, фактически, засчитывалась как решенная верно. Замысел составителя этой задачи, где предполагалось умение производить отбор целочисленных значений параметра n, провалился. Но в 1991 году действовала "выхолощенная" программа по математике для поступающих в вузы (об этом ниже в работе будет говориться), а специальной программы по математике для поступающих в МГУ еще не было.

В варианте вступительного экзамена по математике на геологический факультет МГУ в 1996 году предлагалось решить уравнение

$$\sin 5|x| = \sin(-3) .$$

В соответствии с условием равенства синусов

$$|x| = \left((-1)^{n+1}\frac{3}{5} + \frac{\pi n}{5}\right),$$

n может принимать только целые положительные (натуральные) значения.

Ответ: $x = \pm\left((-1)^{n+1}\frac{3}{5} + \frac{\pi n}{5}\right)$, $n = 1, 2, 3, \dots$.

Вновь встречалась ошибочная запись $n \in \mathrm{Z}$. Но, в отличие от ситуации, описанной в предыдущем примере, задача правильно решенной уже не считалась. Сказывалось существование более серьезной программы вступительных экзаменов по математике и, как следствие, более качественная подготовка абитуриентов, нежели в 1991 году. Подробнее см. [4] и [5].

7. Проблемной является "приученность" к ограничению на параметр a в показательной функции $y = a^x$: $0 < a \neq 1$.

Многие авторы и педагоги фиксируют ограничения на значение a: $0 < a$ и $a \neq 1$, то есть выбирают те же ограничения, что и для логарифмической функции $y = \log_a x$. Это можно объяснить тенденцией (увлечением) рассматривать вместе пары взаимно обратных функций. Тогда учащийся быстро воспринимает базовые решения уравнений и взаимную связь функций. Но работа с функциями (межпредметные связи) обязывает этим не ограничиваться, а поднять уровень концептуальности. Следует, по возможности, фиксировать максимально допустимые расширения функций. Иначе можно лишиться, например, периодических функций. Поэтому для показательной функции следует рассматривать $a = 1$, т.к. 1^x при любом действительном x определено и равно 1.

Другая крайность – небрежность в отношении не анализируемых последствий. В книге В.В. Зайцева, В.В. Рыжкова и М.И. Сканави «Элементарная математика» (последнее издание в середине 1970-х годов) мелким шрифтом говорилось о ситуации $a = 1$ и $a = 0$. Эти случаи считались слишком тривиальными, а потому, не представляющими интереса. Безмятежно выкинуто «взросление» учащегося на концептуальном пути.

Следует признать, что вопросы вида о множестве положительных решений уравнения $x^x=1$ в этих условиях не являются «честными». Часть учащихся, естественно, дает ответ «решений нет», что связано с их приученностью к ограничению $a \neq 1$ у показательной функции. Конечно, решение $x = 1$ очевидно. Также очевидно, что учащийся должен справиться с вычислением выражения 1^1. Тогда, возможно, его следует не наказать, а отметить как правильную тенденцию сведения неизвестной ему задачи к известной. В противном случае в выигрыше окажется более неподготовленный с ответом «не знаю». Но в конечном итоге дать учащемуся правильное разъяснение о решении этой задачи весьма важно.

Когда дело касается экзаменов, то последствия могут оказываться, мягко говоря, неэтичными. В варианте вступительного экзамена по математике на факультет ВМК МГУ в 1981 году предлагалось решить уравнение (вторая задача из шести)

$$\frac{1}{\sqrt{2x-1}} = (2x-1)^{\log_{1/4}(1+7x-2x^2)}.$$

Отметим, что эта задача грамотно составлена. Условие $2x - 1 > 0$ вытекает не потому, что $2x - 1$ стоит в правой части в основании степени, а из-за выражения в левой части уравнения под знаком квадратного корня, да еще и в знаменателе дроби. Второе ограничение $1+7x-2x^2>0$ — это положительность выражения, от которого в показателе степени берется логарифм в правой части уравнения. Перепишем уравнение в виде: $(2x-1)^{-1/2}$ = $(2x-1)^{\log_{1/4}(1+7x-2x^2)}$. Это уравнение с учетом указанных ограничений на x сводится к следующей совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{c} 2x-1=1; \\ \log_{1/4}(1+7x-2x^2) = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x=1; \\ 1+7x-2x^2=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x=1; \\ 2x^2-7x+1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x=1; \\ x=\dfrac{7+\sqrt{41}}{4}. \end{array}\right.$$

Ответ: $x = 1, x = \frac{7+\sqrt{41}}{4}$.

В одной из экзаменационных работ, которую довелось проверять автору этой статьи, были правильно решены первая, третья, четвертая, пятая и половина шестой задачи. Во второй же задаче корень уравнения $x = 1$ был потерян, не было рассмотрено условие $2x - 1 = 1$. Судя по всему, это произошло из-за пресловутого ограничения $a \neq 1$ на основание показательной функции. За работу была выставлена оценка 4. Не будь ошибки, была бы оценка 5 в соответствии с критериями выставления оценок того года. Тогда медалист мог быть представлен к зачислению на факультет без сдачи остальных вступительных экзаменов. Получив оценку 4, необходимо было сдавать все экзамены.

8. О степенной функции $y = x^{\alpha}$, ($\alpha > 0$) в связи с показательной функцией.

У такой степенной функции можно рассматривать неотрицательное значение x. В частности, 0 и 1 входят в ее область определения. Это обеспечивает определение $a^x = 1$ при $a = 1$ (причем для всех действительных x, поскольку для любого действительного α , не только положительного, $1^{\alpha}=1$), а также и $a^x = 0$ при $a = 0$ и $x > 0$, но при $x \leq 0$ 0^x не определено. Правда, здесь стоит отметить, что поскольку уже для произвольного действительного α в школьном курсе считают функцию $y = x^{\alpha}$ определенной *только при всех положительных значениях* x, то для некоторых, в частности, положительных действительных значениях α вопрос о расширении такой области определения степенной функции *требует ее доопределения при* $x=0$ *значением* 0. Последнее обстоятельство согласуется еще и с тем, что согласно определению натуральной степени *любого* числа a

$$a^n \overset{def}{=} \begin{cases} a, & \text{если } \mathrm{n} = 1, \\ \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}, & \text{если } \mathrm{n} \geq 2, \end{cases}$$

откуда, в частности при $a = 0$ при любом натуральном n $0^n = 0$, далее, если $\alpha = \dfrac{m}{n}$, где m и n – натуральные числа (стало быть, α – рациональное положительное число), то, распространяя на случай $a = 0$ определение степени с рациональным положительным показателем $a^{\alpha} = a^{\frac{m}{n}} \overset{def}{=} \sqrt[n]{a^m}$ получим, что и при любом положительном рациональном α $0^{\alpha} = 0$. Кстати, можно на случай иррационального положительного α распространить определение значения a^{α} при $0 < a < 1$ и на $a = 0$ (это такое число b, которое удовлетворяет для любых рациональных положительных α' и α'' таких, что $\alpha' \le \alpha \le \alpha''$ неравенствам $a^{\alpha''} \le b \le a^{\alpha'}$). Тогда получим, что и при любом иррациональном положительном α также $0^{\alpha} = 0$.

9. Об области определения функции $f(x)^{g(x)}$.

Это общий случай для показательной и степенной функции. Повторимся. Следует, по возможности, фиксировать максимально допустимые (школьной программой) расширения функций, обеспечивая концептуальное «взросление» учащегося. А в школьных курсах элементарной математики принято считать, что $f(x) > 0$. Часто это связано с определением a^b на основании формулы приведения $a^b = e^{b\ln a}$. Несогласованность замечают пытливые абитуриенты, приводя в пример выражение $(-1)^n$, фигурирующее в формуле решений простейшего тригонометрического уравнения $\sin x = a$. Беспокоясь о концептуальности учащегося, следует считать областью определения сложной функции $f(x)^{g(x)}$ множество всех значений x, которые допускают вычисление выражения a^b. Тогда она определяется условиями: во-первых, $a > 0$; во-вторых, $a = 0$ и $b > 0$.

По этому поводу стоит обратить внимание на одну из задач, предлагавшихся на выпускном экзамене по математике на подготовительном отделении МГУ в 1996 г., где долгие годы (вплоть до 2010 г.) читался специальный расширенный подготовительный курс элементарной математики.

Найти все действительные решения $(x; y; z; t)$ следующей системы:

$$\begin{cases} 5^{x+y} = 10\cdot 2^{x-y}, \\ (x^2+y^2)(x^z+y^z) = x^5+y^5+t^5, \\ \left|5-\dfrac{15}{z}\right| + \left|7+\dfrac{11}{z}\right| + |t| \le \dfrac{32}{3}. \end{cases}$$

Решение. Считая, что выражение $x^z + y^z$ в соответствии с "расширенной" областью определения выражения $f(x)^{g(x)}$ определено и при нулевых значениях x и y, при этом $z > 0$, а также при отрицательных значениях x и y и при этом, по крайней мере, целых значениях z, мы, обозначая через $u = 1/z$ с учетом того, что при любом t $|t| \ge 0$, получаем для левой части неравенства системы оценку снизу $|15u - 5| + |11u + 7| + |t| \ge |15u - 5| + |11u + 7| = g(u) \ge 32/3$, которая получается путем раскрытия модулей $|15u - 5|$ и $|11u + 7|$ и затем на основе монотонностей линейных функций на соответствующих промежутках — вычисления наименьшего значения выражения $g(u)$ по всем действительный значениям переменной u, которое оказывается равным как раз 32/3 и достигается оно при $u = 1/3$, стало быть $z = 3$. Таким образом, последнему неравенству системы, а потому и всей системе удовлетворяют только $z = 3$ и $t = 0$. Подставляя их в первое и второе уравнения системы, решая ее, получаем следующие четверки решений:

$$x = 0,\ y = 1,\ z = 3,\ t = 0;$$

$$x = \log_{5/2} 10,\ y = 0,\ z = 3,\ t = 0;$$

$$x = -\log_4 10 < 0,\ y = \log_4 10,\ z = 3,\ t = 0.$$

Возможны и другие расширения. Например, $a < 0$ и $b = m/(2n-1)$, где $m \in Z$, $n \in N$. Но при этом придется знакомить с обстоятельствами ограничений. В данном случае наличие нечетного знаменателя позволяет получить значение -1. При его отсутствии можем получить противоречие $-1 = (-1)^{1/3} = (-1)^{2/6} = ((-1)^2)^{1/6} = 1^{1/6} = 1$. Тут эту проблему приходится решать двояким образом, или, сохраняя все основные свойства степеней с положительными основаниями, отказаться от рассмотрения неположительных значений стоящего в основании степени выражения $f(x)$, или, как это делается в курсах математического анализа, функция $y = x^{\alpha}$ при $\alpha = \dfrac{m}{2n-1}$, где $m \in Z$, $n \in N$, НОД $(|m|; 2n-1) = 1$, может быть доопределена при отрицательных действительных значениях x: четным образом при m четном и нечетным образом при m нечетном. Но в этом случае *приходится отказываться от выполнимости некоторых свойств степеней* для отрицательных оснований при $n \geq 2$. Для снятия указанного выше противоречия можно считать *по определению* $(-1)^{2/6} = (-1)^{1/3} = \sqrt[3]{-1} = -1$, а равенство типа $(-1)^{2/6} = ((-1)^2)^{1/6}$ — уже *не имеющим места* при отрицательных значениях основания степени. Это вполне согласуется еще и с тем, что значение корня шестой степени из квадрата -1 может быть не обязательно арифметическим, но тогда оно не обозначается радикалом. А если вести речь о выражении z^{α} для комплексных значенийz$\neq 0$ и α, то из теории функций комплексного переменного (ТФКП) известно, сколько значений оно имеет на самом деле, и сколько из них являются действительными числами.

Кстати, еще отметим, что для случая $a = 0$ свойство степени $a^{-\alpha} = 1/a^{\alpha}$ не имеет места. Учитывая, что в настоящее время все это еще не вошло в школьную программу (хотя рассматривалось, например, в специальном курсе элементарной алгебры С.И. Новоселова для студентов педагогических вузов), для составителей экзаменационных задач вступительных испытаний следует выражение $f(x)$ задавать так, чтобы условие $f(x) > 0$ вытекало бы из дополнительных условий, можно вместо $f(x)^{g(x)}$ рассматривать или $\dfrac{1}{(\sqrt{f(x)})^{-2g(x)}}$, или $a^{g(x)\log_a f(x)}$ при постоянном a, которое удовлетворяет неравенствам $0 < a \neq 1$.

10.Довольно часто смешиваются ∞ и $+\infty$, хотя с точки зренияпредельных переходов в математическом анализе функций одной переменной $-\infty, \infty$ и $+\infty$ все три разные бесконечности.

Например, в книгах часто используются как равные:

$$(a; +\infty) = (a; \infty); (-\infty; +\infty) = (-\infty; \infty);$$

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^{\infty} f(x)dx; \sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n; \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(z).$$

Объяснение этого в естественном отображении (наследственности) иерархии понятий в знаковых выражениях (в алгебре). На это следует специально обращать внимание. Знак ∞ относят к неограниченному множеству. Знаки $+\infty$, $-\infty$ относят к неограниченному множеству с порядком. Тогда, если в записи легко обнаруживается алгебраическая система с порядком, можем (по принципу умолчания) использовать любой вариант из приведенных равенств. Т.е. в каждом случае допустимо использовать более общий знак ∞ для частного случая. Обратим внимание, что при таком взаимоотношении понятий и знаков, можем писать и равенство $(\infty; a) = (-\infty; a)$. Допустимо даже равенство вида $(\infty; \infty) = (-\infty; +\infty)$. Оно не используется из-за схожести с $(a; a) = \varnothing$, но с иным смыслом ($(\infty; \infty)$ не равно $\varnothing$).

В математическом анализе другая картина. В анализе предел используется при характеристике неограниченных последовательностей. Знаки $+\infty$, $-\infty$ сообщают о неограниченности посредством предельной несобственной точки. Знак ∞ по-прежнему фиксирует неограниченность, но уже представляет три типа неограниченности: $+\infty$, $-\infty$ и другие (вида $(-1)^n n$).

Поэтому, если $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ или $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\infty$, то $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \infty$,

$$(\lim_{n\to+\infty} x_n = \infty, \text{ если } \forall A > 0\ \exists N(A): \forall n > N \Rightarrow |x_n| > A,$$

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty, \text{ если } \forall A > 0\ \exists N(A): \forall n > N \Rightarrow x_n > A,$$

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = -\infty, \text{ если } \forall A > 0\ \exists N(A): \forall n > N \Rightarrow x_n < -A),$$

т.е. общий знак ∞ заменяет соответственно знак $+\infty$, $-\infty$. Если же $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \infty$ и если мы собираемся быть точнее, то следует выяснить: $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, или $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\infty$, или

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} x_n \neq +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} x_n \neq -\infty \end{cases}.$$

Для последовательности $x_n = (-1)^n \cdot n$ имеет место $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \infty$, поскольку, фиксируя произвольное $A>0$, взяв в качестве $N(A)$=[A]+1, ([A] — целая часть числа) получим, что $|x_n|>A$, однако ни определение $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, ни определение $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\infty$ для этой последовательности выполняться не будут.

Все же, по мнению автора данной работы (вследствие проиллюстрированного примера), *предпочтительнее использовать обозначения* для неограниченных числовых промежутков (a; $+\infty$), ($-\infty$; $+\infty$), в несобственных интегралах $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$. Даже, несмотря на то, что подавляющем большинстве изданий в суммах рядов (то есть в суммах всех членов некой последовательности u_1; u_2; u_3; …), где суммирование ведется по всем натуральным (всем целым положительным значениям индекса n), используется запись $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, следовало бы использовать $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$. Последний пример можно ведь обобщить на случай, например, рядов Лорана в ТФКП, где суммирование может вестись по всем целым значениям индекса n, тогда *следует писать* $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} f_n(z)$, хотя часто можно встретить и $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} f_n(z)$. Подробнее о материале пп. **10** и **11** см. [2].

11. Иногда авторы, используя в основном только знак включения одного множества в другое $\subset$, оговариваются и об использовании знака включения одного множества в другое $\subseteq$, не объясняя различие этих знаков.

Встречается разная семантика у знака $\subset$. Первая семантика — строгое включение (Ø $\not\subset$ Ø), тогда $\subseteq$ – нестрогое включение (Ø $\subseteq$ Ø). Это согласуется с использованием знаков порядка $<$ и $\leq$. Поэтому представляется неестественной вторая семантика — использование только знака $\subset$ (тогда A$\subset$A). При этом строгое включение записывается в виде ($A \subset B$ и A $\neq$B), а нестрогое включение $A \subset B$, которое в любой из этих семантик имеет смысл: $\forall a \in A \Rightarrow a \in B$.

Объяснить неестественное использование только знака отношения множеств $\subset$ можно через естественный механизм общности математического языка. Однако, выбирая из знаков $\subset$ и $\subseteq$ за базовый, (все же $\subseteq$, а не $\subset$, который тоже присутствует и имеет четко следующий смысл: $A \subset B$, если $\forall a \in A \Rightarrow a \in B$ и $\exists b' \in B$ такой, что $b' \notin A$, а также для всякого непустого множества AØ $\subset A$), останавливаемся на составном (не простом). В него лучше вложить «максимальное» расширение. В таком случае, более естественной становится, в частности, рефлексивность A$\subseteq$A, а не A$\subset$A.

12. В определении периодической функции $f(x)$, говоря о существовании T такого, что $f(x+\mathrm{T}) = f(x)$, делают ограничение, что T> 0, исключая, тем самым, наличие отрицательных периодов у периодической функции, хотя наряду с положительными периодами они обладают абсолютно одинаковыми свойствами. Единственное, что можно отметить, так это наличие основного периода (как наименьшего положительного периода), если он существует. Стало быть, все же следует считать $T \neq 0$. При наличии основного периода T_0 у периодической функции можно, применяя, в частности, метод индукции, доказать, что множество всех периодов этой функции состоит только из чисел вида nT_0, $n = \pm 1; \pm 2; \pm 3; \ldots$.

13. Неоднозначным в математической литературе является введение комплексных чисел.

С одной стороны, как упорядоченных пар действительных чисел (a,b), между которыми вводятся отношения "равен" и "не равен". Над ними вводятся правила сложения и умножения, пара (a,0) отождествляется с действительным числом a, пару (0,1) называют мнимой единицей, обозначая буквой i.

С другой стороны, комплексные числа вводятся как выражения вида $a+bi$ с не введенными заранее операциями сложения между a и bi, умножением bиi, да и iпытаются ввести или как число, квадрат которого равен –1, или, что еще хуже, как квадратный корень из числа –1.Подробнее см. [2].

Разумеется, что первый способ математически более корректен и грамотен.

Список литературы

1. Будак А.Б. О некоторых традициях (стереотипах) изложения материала в курсах элементарной и высшей математики и необходимости их преодоления // Математика в образовании. 2011. Выпуск 7. С. 45-58.
2. Будак А.Б. О необходимых предварительных знаниях для изучения математического анализа и других начальных курсов высшей математики и преодолении стереотипов в изучении элементарной и высшей математики // Межвузовский сборник научно-исследовательских работ студентов и преподавателей «На перекрестках наук». Елец: Изд-во ЕГУ им. И.А. Бунина, 2014. С. 10-23.
3. Ильин В.А., Ким Г.Д.Линейная алгебра и аналитическая геометрия. М: Проспект, 2012.
4. Ким Г.Д., Крицков Л.В.Алгебра и аналитическая геометрия. Теоремы и задачи. Т. 1. М: Планета знаний, 2007.
5. Нестеренко Ю.В., Олехник С.Н., Потапов М.К. Задачи вступительных экзаменов по математике. М: Наука, Физматлит, 1983.

ABOUT OVERCOMING CERTAIN STEREOTYPES IN THE DENOTATIONS BOTH NOMENCLATURES ELEMENTARY AND BEGINNINGS OF MAXIMUM MATHEMATICS

A.B. Budak
Candidate of physical and mathematical sciences, senior lecturer
e-mail: abbudak@cs.msu.su
Moscow

MSU by M.V. Lomonosov, faculty CS, department of general (common) mathematics

Abstract. Given article is contained important, on a sight of the writer, the offers on usage of the denotations both application of the terms in theory and problems elementary and beginnings of maximum mathematics. It is offered to supplement, more accurately and to make by more sequential usage of nomenclatures in elementary algebra, trigonometry and geometry, calculus, higher algebra both analytical geometry and other mathematical disciplines.

Keywords: stereotypes, length of a section, value of a corner, signs of including, scalar and vector products of vectors, ellipse, hyperbola, parabola, complex number.

References

1. Budak, A.B. (2011). About some traditions (stereotypes) of material presentation in elementary and higher mathematics courses and the need to overcome them [*O nekotoryh traditsiyax (stereotipah) izlojeniya materiala v kursah elementarnoy i vysshey matematiki i neobhodimosty ih preodoleniya*]. *Mathematics in Education*.V. 7. Pp. 45-58.
2. Budak, A.B. (2014). On the necessary preliminary knowledge for the study of mathematical analysis and other elementary courses in higher mathematics and overcoming stereotypes in the study of elementary and higher mathematics [*O neobhodimyh predvaritel'nyh znaniyah dlya izucheniya matematicheskogo analiza i drugih nachal'nyh kursov vysshey matemetiki i preodolenii stereotipov v izuchenii elementarnoy i vysshey matematiki*]. *Mejvuzovskiy sbornik nauchno-issledovatel'skih rabot studentov i prepodavateley «Na perekrestkah nauk»*. Yelets: Bunin Yelets State University. Pp. 10-23.
3. Il'in, V.A., Kim, G.D. (2012). Linear algebra and analytical geometry [*Lineynaja algebra i analiticheskaya geometriia*]. Moscow: Prospekt.
4. Kim, G.D., Kritskov, L.V. (2007). Algebra and analytic geometry. Theorems and problems [*Algebra i analiticheskaya geometriia. Teoremy i zadachi*]. Vol. 1. Moscow: Planet of knowledge.
5. Nesterenko, Ju.V., Olehnik, S.N., Potapov, M.K. (1983). Math exam tasks [*Zadachi vstupitel'nyh ekzamenov po matematike*]. Moscow: Science.

УДК 378.095

БАЙЕСОВСКИЙ ПОДХОД К ПРОБЛЕМАМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРИОРИТЕТНОСТИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ПРОЕКТОВ

Татьяна Юрьевна Дорохова
к.п.н., доцент
tandor81@mail.ru
г. Тамбов
Николай Петрович Пучков
д.п.н., профессор
puchkov_matematika@mail.ru
г. Тамбов

Тамбовский государственный технический университет

Аннотация. Работа посвящена оценке значимости результатов многофакторных процессов, параметры которых невозможно оценить методами точных наук.Показана целесообразность комплексного использования метода экспертных оценок и байесовского подхода для обоснования приоритетности выбранного педагогического проекта. В качестве рабочего предложен итерационный алгоритм, снижающий вероятности ошибок принятия решений. Предлагается учитывать мнения экспертов на вероятностном уровне. Показано, что расчётсредних апостериорных вероятностей даёт возможность принимать обоснованные решения относительно группы вариантов, когда мнения экспертов относительно всего множества вариантов считаются несогласованными. Рассмотрен пример использования предлагаемой методики для выбора наиболее оптимальной технологии обучения при целевой подготовке специалистов. Работа открывает дополнительные возможности применению математических методов в педагогических исследованиях.