УДК 372.851

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СОФИЗМЫ КАК СРЕДСТВО ВОСПИТАНИЯ У УЧАЩИХСЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ КУЛЬТУРЫ

Кузнецова Татьяна Ивановна
д.п.н., доцент
kuzti45@gmail.com
ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова»

Казаков Никита Александрович
alphan95@mail.ru,
г. Москва
ГОУ ВО МО «Московский государственный областной университет»

Аннотация. Одной из ярких тем для работы с учащимися является тема «Математические софизмы». Математические софизмы могут рассматриваться обучающимися различных классов, в зависимости от изучаемого урочного или внеурочного материала. В широком классе задач на математические софизмы выделяют: арифметические, алгебраические и геометрические софизмы. В исследованиях [1, 2] описана работа по ознакомлению школьников с геометрическими софизмами. В настоящем исследовании показываются ситуации, в которых учащиеся сталкиваются с необходимостью поиска ошибки в алгебраическом преобразовании, используемом в ходе решения какой-либо алгебраической задачи. Обычно при этом выявляется неравносильный алгебраический переход.

Ключевые слова: обучение математике, алгебраические софизмы, метод поиска ошибки.

Часто в логике, философии и математике встречается понятие «софизм». Понятие «софизм» происходит от греческого слова «sophisma»: уловка, выдумка, ухищрение. По словарю Ожегова, софизм – формально кажущееся правильным, но по существу ложное умозаключение, основанное на неправильном подборе исходных положений. Софистами называли учителей-наставников, задачей которых являлось развитие у своих учеников умения выражать свои мысли, проводить логические умозаключения и убедительно защищать любую свою точку зрения [3].

Математический софизм представляет собой некоторое математическое утверждение с приведённым к нему доказательством или обоснованием, в котором скрыта ошибка. Эта ошибка и приводит к противоречивости исходного суждения. Основная задача – поиск скрытой ошибки.

Содержание школьной программы по математике не подразумевает рассмотрение математических софизмов. Однако привнесение задач-софизмов в образовательный процесс может заметно повысить его качество. Решение софизмов ведёт к более глубокому понимаю предмета, способствует развитию аналитического мышления [4].

Задачи-софизмы, которые используются в ходе урока, можно условно разделить на два типа: алгебраические и геометрические. Логические и арифметические софизмы – отдельные задачи, которые можно рассматривать во внеурочное время. В настоящей статье рассмотрим примеры алгебраических софизмов и покажем их роль и пользу в ходе обучения математике.

Пример 1. *Любое число равно меньшему числу.*

Пусть $a > b \Rightarrow a = b + c, c \neq 0$. *Домножим последнее равенство на разность* $a - b$, *получим* $a^2 - ab = ab + ac - b^2 - bc \Rightarrow a^2 - ab - ac = ab - b^2 - bc \Rightarrow a(a-b-c) = b(a-b-c)$. *Разделим последнее равенство на общий множитель и получим*: $a = b$.

Как следствие этой задачи можем заключить, что 2=5 или 2+2=5, так как 4=5.

При демонстрации софизма школьники должны установить и обосновать, где допущена ошибка. В данном случае она допущена при делении на общий множитель. Обучающиеся должны помнить, что ***каково бы ни было равенство, его части можно разделить или умножить на одно и то же число, отличное от нуля.*** В данном примере выражение $a-b-c=0$, что легко заметить, обращаясь к условию $a=b+c$.

Пример 2. 1 *рубль* = 10000 *копейкам*.

Всем известно, что 1 *рубль* = 100 *копейкам*, 10 *рублей* = 1000 *копейкам. Перемножим части этих равенств, получим*: 10 *рублей* = 100000 *копейкам. Разделив последнее равенство на* 10, *получим*: 1 *рубль* = 10000 *копейкам*.

Данную задачу можно предложить классу при изучении мер величин. Обучающиеся должны хорошо помнить, что, ***прежде чем осуществлять какие-либо действия с именованными числами, необходимо понять, что при этом нельзя игнорировать размерности!*** Найдём ошибку в рассуждениях. Первое, что было сделано в предложенном решении — были почленно перемножены два верных равенства:

$$\begin{gathered}1\ \textit{руб.} = 100\ \textit{коп.},\\ 10\ \textit{руб.} = 1\,000\ \textit{коп.}\end{gathered} \tag{*}$$

На самом деле после этого получилось равенство

$$10\ \textit{руб.}^2 = 100\,000\ \textit{коп.}^2$$

Далее, чтобы получить искомое соотношение между рублями и копейками, надо разделить не просто на 10, а на 10 руб.:

$$10\ \textit{руб.}^2 / 10\ \textit{руб.} = 100\,000\ \textit{коп.}^2 / 10\ \textit{руб.} \tag{**}$$

В левой части всё ясно – получаем 1 *руб*. А вот приступая к работе с правой частью, надо вспомнить, что, ***прежде чем осуществлять какие-либо действия с именованными числами, необходимо сначала привести их к одной и той же единице измерения,*** что мы и делаем, используя верное равенство (*)**:**

$$100\,000\ \textit{коп.}^2 / 10\ \textit{руб.} = 100\,000\ \textit{коп.}^2 / 1\,000\ \textit{коп.} = 100\ \textit{коп.}$$

Таким образом, в данном софизме актуализируется операция перевода из одной величины в другую, что в дальнейшем будет способствовать формированию основных действий с десятичными дробями.

Замечание. Настоящий пример очень популярен и активно используется в разных вариациях литературы о софизмах (см., например, [5; 6]). В данном примере, как и во многих других, мы вынуждены обратить внимание учащихся не только на математические ошибки, которые мы уже обсудили, но и на необходимость бережного отношения к русскому математическому языку, т. е. к правильному чтению математических текстов. Поскольку в рассматриваемом софизме имена пишутся полностью (не в сокращённом виде – руб. и коп.), то можем утверждать, что из пяти случаев использования имени «копейки» только в одном, а именно, во втором случае, это сделано правильно:

1 *рубль* = 100 *копейкам* (читаем так: один рубль равен ста копейкам).

Во всех остальных случаях следует говорить «копеек». В первом и последнем случаях:

1 *рубль* = 10000 *копейкам* (читаем так: один рубль равен десяти тысячам копеек);

в третьем случае:

10 *рублей* = 1000 *копейкам* (читаем так: десять рублей равны тысяче копеек)

и, наконец, в четвёртом случае:

1 *рубль* = 100000 *копейкам* (читаем так: один рубль равен ста тысячам копеек).

Пример 3.*Из неравенства* $a > b$ *следует неравенство* $a > 2b$ *(здесь* a, b *— произвольные положительные числа).*

Из неравенства $a > b$ *почленным умножением на* b *получаем*:

$$a \cdot b > b^2 .$$

Вычтем из обеих частей полученного неравенства a^2:

$$a \cdot b - a^2 > b^2 - a^2 .$$

Полученное неравенство разделим почленно на $b - a$:

$$a > b + a .$$

Сложив полученное неравенство с исходным, получим:

$$2a > 2b + a \Rightarrow a > 2b .$$

Данный софизм полезно рассмотреть при решении простейших неравенств. Распространенная ошибка школьников – при умножении (делении) частей неравенства на отрицательное число знак неравенства ошибочно сохраняют. Приведённый пример как раз рассчитан на подобную невнимательность класса. Следует обратить внимание на то, что при почленном делении неравенства на $b - a$ знак неравенства должен измениться на противоположный, поскольку разность $b - a < 0$. Последнее очевидно из условия $a > b$. Приведём ещё один пример, связанный с похожей ошибкой.

Пример 4. $\frac{1}{8}$ *больше* $\frac{1}{4}$.

Перемножая почленно соотношения $\lg\frac{1}{2} = \lg\frac{1}{2}$ и $3 > 2$, *получаем:*

$$3 \cdot \lg\frac{1}{2} > 2 \cdot \lg\frac{1}{2};$$

$$\lg\left(\frac{1}{2}\right)^3 > \lg\left(\frac{1}{2}\right)^2;$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 > \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{1}{8} > \frac{1}{4}.$$

У обучающихся на первый взгляд возникает мнение, что никакой ошибки не допущено. Тем не менее, результат парадоксален. Такой софизм целесообразно приводить школьникам при изучении основных действий с логарифмами. В данном случае актуализируется сравнение логарифма с нулём. Обучающиеся должны, прежде всего, установить, что $\lg\frac{1}{2} < 0$. В связи с этим фактом, как и в прошлом примере, знак неравенства после почленного перемножения должен поменяться на противоположный, поскольку проводится умножение обеих частей неравенства $3 > 2$ на отрицательное число $\lg\frac{1}{2}$. Однако в приведённом решении знак сохранился, в этом и заключена ошибка.

Пример 5. $-1 > +1$.

Если в пропорции $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ *левая дробь больше* 1, *то правая дробь также больше* 1; *другими словами, из неравенства* $a > b$ *следует* $c > d$. *Основное свойство пропорции*:

$$a \cdot d = b \cdot c,$$

очевидно, не нарушается, если положить

$$a = 1; b = -1; c = -1; d = +1.$$

Здесь $a > b$ *и, следовательно, должно быть* $c > d$, *т.е.* $-1 > +1$.

Этот пример направлен на развитие общего логического мышления и внимательности. Задача школьников – установить противоречие между условием и промежуточными умозаключениями приведённого доказательства. Противоречие состоит в том, что при $a = 1; b = -1$ получаем $\frac{a}{b} = \frac{1}{-1} = -1 < 1$, что противоречит тому условию, что левая дробь больше 1.

Пример 6. *Решить уравнение* $\sqrt{x} + x = 2$.

$$\sqrt{x} + x = 2 \Rightarrow \sqrt{x} = 2 - x \Rightarrow x = 4 - 4x + x^2 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$$

Находим корни последнего уравнения: $x_1 = 4; x_2 = 1$.

Подставляем первый корень в исходное уравнение, получаем $6 = 2$. При получении корней уравнения школьников всегда приучали делать проверку, т. е. устанавливать, все ли полученные корни удовлетворяют исходному равенству. Корни, которые не удовлетворяют равенству, отбрасывают. Но в связи с чем возникают «лишние» корни? Целесообразно поставить этот вопрос школьникам. Наверняка, первым ответом школьников будет формулировка условия неотрицательности подкоренного выражения $x \ge 0$. Однако полученные корни удовлетворяют этому условию. Чтобы выявить ошибку в решении, необходимо убедиться в равносильности приведённых переходов. Когда выражение $\sqrt{x} = 2 - x$ возводится в квадрат, необходимо поставить условие неотрицательности его правой части, т. е. $2 - x \ge 0$, откуда получаем $x \le 2$. Без постановки данного условия возведение в квадрат не является равносильным переходом. В отсутствии этого условия и заключена ошибка. Проверяя полученные корни на условие $x \le 2$, устанавливаем, что уравнение имеет единственное решение $x = 1$, дальнейшая проверка не требуется. Приведённую задачу можно использовать при решении уравнений, содержащих радикалы. После разбора софизма в качестве упражнения можно предложить аналогичную задачу на решение уравнения $3\sqrt{x} + x + 2 = 0$; ожидаемый результат – уравнение не имеет корней. При решении уравнений различного типа, необходимо ставить вопрос о возможном существовании корней и их количестве, определяемое наибольшей степенью неизвестной величины. Таким образом, надо заметить, что предложенные уравнения не могут иметь более одного корня.

При решении уравнений с неизвестным в знаменателе довольно часто учащиеся забывают предварительно найти ОДЗ и, естественно, в заключение проверить полученные корни на принадлежность ОДЗ. В этом смысле показателен следующий софизм.

Пример 7. *Решить уравнение* $\frac{1}{x-2} + 3 = \frac{3-x}{x-2}$.

$$\frac{1}{x-2} + 3 = \frac{3-x}{x-2} \Leftrightarrow 1 + 3(x-2) = 3 \Leftrightarrow 4x = 8 \Leftrightarrow x = 2.$$

Подставляем найденный корень 2 в уравнение и в знаменателях обеих частей получаем нули. Учащиеся вспоминают, что на нуль делить нельзя, откуда следует, что обе части данного уравнения не имеют смысла и, следовательно, число 2 не является корнем.

Отсутствие ОДЗ в приведённом решении свидетельствует о недостаточности аргументов, а первый же переход (от первого уравнения ко второму) неравносилен, т. е. сделан с нарушением правила умозаключения – равносильности. Кроме того, полученный корень оказался тем самым значением, которое нарушает равносильность рассмотренного перехода.

В результате проведённых обсуждений учащиеся должны запомнить, что представленный в софизме способ решения уравнений с неизвестным в знаменателе тоже имеет право на существование, но при двух условиях: 1) не надо писать между записями уравнения знак эквивалентности и 2) для полученных значений неизвестных, претендующих на звание корней, необходимо провести проверку (соответствующую определению корня), как это было сделано в наших вариантах решения примера 6 и настоящего примера. Однако такой способ решения неприемлем для неравенств. Учитывая то, что часто уравнения и неравенства рассматриваются вместе (в системе), мы всё-таки предпочитаем более общий способ — с использованием понятия ОДЗ (уравнения, неравенства, их систем) [7; 8, с. 143–144].

Алгебраические софизмы могут служить «подводящими» задачами, т. е. задачами, которые актуализируют изучение какого-либо нового материала.

Пример 8. *Решить уравнение* $1{,}3247^{x}+1{,}3247^{x+1}+1{,}3247^{x+2}=1{,}3247^{6}$.

Числа везде одинаковые, поэтому можем приравнять показатели, получим:

$$x+(x+1)+(x+2)=6 \Rightarrow 3x+3=6 \Rightarrow x=1$$

Проверка показывает, что результат неверен. Значит, выбранный нами способ решения задачи не является верным. Данную задачу можно задать как подводящую при изучении способов решения показательных уравнений и неравенств. Актуализируются свойства степени, а также метод замены. Действительно, сделав замену

$$y = 1{,}3247^{x}$$

и воспользовавшись формулой произведения степеней с одинаковыми основаниями, преобразуем данное уравнение в следующее:

$$y + 1{,}3247\, y + 1{,}3247^{2}\, y = 1{,}3247^{6},$$

откудавыражаемy:

$$y= 1{,}3247^{6} / (1 + 1{,}3247 + 1{,}3247^{2}).$$

Теперь легко написать ответ:

$$x= \log_{1{,}3247} y= \log_{1{,}3247} [1{,}3247^{6} / (1 + 1{,}3247 + 1{,}3247^{2})].$$

Таким образом, математические софизмы могут служить отличным дополнением к содержанию основной программы обучения математике. Мы наблюдаем широкие возможности их применения к различным разделам алгебры и геометрии, а также их различную целевую направленность: для актуализации, систематизации и обобщения знаний. Такие задачи также используются для переключения внимания и снятия напряжения. Не случайно в интернете можно найти далеко не одну самостоятельную работу, посвящённую софизмам, выполненную учащимися, см., например, исследовательскую работу по теме «Софизмы и парадоксы», выполненную учеником 6Б класса воронежского лицея № 1 Хохловым Кириллом (руководитель: учитель математики Казьменко Е.А.) [6]. По нашему мнению, грамотному педагогу привносить задачи такого рода в процесс обучения вполне целесообразно, поскольку они способствуют реализации принципов проблемно-развивающего обучения, активизации образовательного процесса и, следовательно, повышению его эффективности, что, в конечном счёте, воспитывает у учащихся высокую математическую культуру.

Список литературы

1. Казаков Н.А., Кузнецова Т.И. Из истории терминов "модель" и "моделирование". Часть 3. Чертежи — модели задач // Проблемы учебного процесса в инновационных школах: Сб. науч. тр. / Под ред. О.В. Кузьмина. Иркутск: Издательство ИГУ. 2018. Вып. 21. С. 54–58.
2. Казаков Н.А., Кузнецова Т.И. Применение интерактивных геометрических сред в кружковой работе при решении геометрических софизмов // Десятая (юбилейная) ежегодная межрегиональная научно-практическая конференция преподавателей, аспирантов и студентов «Платоновские чтения». Иркутск, ИМЭИ ИГУ, 29 января –12 февраля 2018 г.
3. Пойа Д. Как решать задачу: пособие для учителей. М.: Государственное учебно-педагогическое издательство Министерства Просвещения РСФСР, 1959.
4. Лямин А. А. Математические парадоксы и интересные задачи : сборник задач для любителей математики. М.: типография Г. Лисснера и Д. Собко, 1911.
5. Презентация на тему «Математические софизмы». URL: https://infourok.ru/prezentaciya-po-matematike-na-temu-matematicheskie-sofizmi-1939087.html (дата обращения 22.08.2019)
6. Хохлов К. Исследовательская работа по теме «Софизмы и парадоксы» / Под рук. Е.А. Казьменко. Воронеж. МБОУ «Лицей №1». 2017. URL: https://znanio.ru/media/issledovatelskaya_rabota_po_teme_sofizmy_i_paradoksy-100458/119552(дата обращения 22.08.2019)
7. Кузнецова Т.И.Опровержение — необходимый компонент обсуждения работы учащегося, дискуссии (в условиях математического образования) // Байкальский психологический и педагогический журнал. 2004. № 1–2 (3–4). С. 135–140.
8. Кузнецова Т.И. Модель выпускника подготовительного факультета в пространстве предвузовского математического образования. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2011.

ALGEBRAIC SOPHISMS AS A MEANS OF EDUCATION IN STUDENTS OF MATHEMATICAL CULTURE

T.I. Kuznetsova — Lomonosov Moscow State University
д.п.н., доцент
kuzti45@gmail.com
N.A. Kazakov — Moscow Region State University
alphan95@mail.ru,
Moscow

Abstract. One of the vivid topics for working with students is the topic "Mathematical sophisms." Mathematical sophisms can be considered by students of various classes, depending on the studied lesson or extracurricular material. In a wide class of problems, mathematical sophisms are distinguished: arithmetic, algebraic, and geometric sophisms. In studies [1, 2] describes the work of familiarizing students with geometric sophisms. This study shows situations in which students are faced with the need to search for errors in the algebraic transformation used in solving an algebraic problem. Usually, an unequal algebraic transition is revealed.

Keywords: teaching mathematics, algebraic sophisms, error search method.

References

1. Kazakov, N.A., Kuznetsova, T.I. (2018). From the history of the terms “model” and “modeling”. Part 3. Drawings - problem models [*Iz istorii terminov "model'" i "modelirovanie". CHast' 3. CHertezhi — modeli zadach*]. Problems of the educational process in innovative schools: Sat. scientific tr / Ed. O.V. Kuzmina. Irkutsk: Publishing house of ISU. V. 21. Pp. 54–58.
2. Kazakov, N.A., Kuznetsova, T.I. (2018). The use of interactive geometric media in circle work in solving geometric sophisms [*Primenenie interaktivnyh geometricheskih sred v kruzhkovoj rabote pri reshenii geometricheskih sofizmov*]. The tenth (anniversary) annual interregional scientific-practical conference of teachers, graduate students and students "Platonic Readings". Irkutsk, IMEI ISU, January 29 – February 12, 2018.
3. Poia, D. (1959). How to solve the problem: a manual for teachers [*Kak reshat' zadachu: posobie dlya uchitelej*]. Moscow: State Educational and Pedagogical Publishing House of the Ministry of Education of the RSFSR.
4. Lyamin, A. A. Mathematical paradoxes and interesting problems: a collection of problems for mathematics lovers [*Matematicheskie paradoksy i interesnye zadachi : sbornik zadach dlya lyubitelej matematiki*]. Moscow: Printing House of G. Lissner and D. Sobko, 1911.
5. Presentation on the topic "Mathematical sophisms." [*Prezentaciya na temu «Matematicheskie sofizmy»*]. URL: https://infourok.ru/prezentaciya-po-matematike-na-temu-matematicheskie-sofizmi-1939087.html (accessed 08.22.2019)
6. Khokhlov, K. (2017). Research on the subject of “Sophisms and paradoxes” [*Issledovatel'skaya rabota po teme «Sofizmy i paradoksy»*]. Hand. E.A. Kazmenko. Voronezh. MBOU "Lyceum №1". URL: https://znanio.ru/media/issledovatelskaya_rabota_po_teme_sofizmy_i_paradoksy-100458/119552
7. Kuznetsova, T.I. (2004). Refutation is a necessary component of the discussion of student work, discussion (in the context of mathematical education) [*Oproverzhenie — neobhodimyj komponent obsuzhdeniya raboty uchashchegosya, diskussii (v usloviyah matematicheskogo obrazovaniya)*]. Baikal Psychological and Pedagogical Journal. V. 1–2 (3-4). Pp. 135-140.
8. Kuznetsova, T.I. (2011). A model of a graduate of the preparatory faculty in the space of pre-university mathematical education: Scientific publication [*Model' vypusknika podgotovitel'nogo fakul'teta v prostranstve predvuzovskogo matematicheskogo obrazovaniya*]. Moscow: Book house "LIBROCOM".