ПРИКЛАДНЫЕ АСПЕКТЫ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

УДК 517.956.227

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Корниенко Дмитрий Васильевич
к.физ.-мат.н., доцент
dmkornienko@mail.ru
г. Елец

Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина

Аннотация. Статья посвящена актуальным проблемам теории систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных, а именно исследованию спектра и базисных свойств систем собственных вектор-функций оператора, сопоставимого граничной задаче. В статье рассматривается задача Коши для двух классов систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных. Изучение свойств разрешимости данных задач свелось к исследованию спектральных характеристик сопоставляемого ей оператора, благодаря введению обобщенного решения. Проводимые исследования базировались на методах, которые принято называть функциональными, а свойства разрешимости описываются в терминах спектральной теории линейных операторов. Подобные методы развивали и широко использовали в своих научных исследованиях К. Фридрихс, Л. Хёрмандер, С.Л. Соболев, А.А. Дезин, В. А. Ильин, В.К. Романко, Е.И. Моисеев, А.П. Солдатов. Хорошо известно, что наиболее часто в теории граничных задач для дифференциальных уравнений исследуются вопросы, связанные с разрешимостью граничных задач и дифференциальными свойствами решений таких задач. Изучение спектральных задач для дифференциальных уравнений является более трудным. Теория спектральных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и для уравнений в частных производных эллиптического типа разработана довольно полно. Для дифференциальных уравнений других типов и для уравнений, не принадлежащих к классическим типам, теория спектральных задач находится в зачаточном состоянии. С этой точки зрения данная статья является весьма актуальной.

Ключевые слова: граничные задачи, спектр оператора, спектральные свойства, системы дифференциальных уравнений в частных производных, базис Рисса, условия Коши, базис.

В статье исследованы спектральные характеристики задачи Коши для определенного класса систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных [5], рассматриваемых в ограниченной области конечномерного евклидова пространства H.

Необходимость исследования свойств разрешимости систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных возникает всякий раз при изучении соответствующих природных явлений и процессов. Важные приложения теории систем уравнений в частных производных и проблемы, связанные с исследованием свойств разрешимости формулируемых граничных задач стимулировали исследование соответствующих спектральных задач. Спектральная теория операторов, порождённых граничными задачами, как дляуравнений, так и длясистем уравнений в частных производных,начала развиваться сравнительно недавно в ряде работ российских и зарубежных математиков. Изучались при этом как асимптотическое поведениесобственных значений и расположение спектра на комплексной плоскости, так и «базисные»свойствасистем, составленных из собственных вектор-функций. Исследование структуры спектра и возможности разложения решений по наборам собственных вектор-функций является в настоящее время одним из основных направленийпри изучении вопросов спектральной теории граничных задач для систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных. Не смотря на значительный интерес к указанной проблематике, до сих пор не разработан метод, позволяющий ответить на возникающие вопросы даже для простейших систем линейных дифференциальныхуравнений в частных производных при числе переменных больше двух. Общие вопросы спектральной теории граничных задач для систем линейных дифференциальныхуравнений так жеизучены не достаточно полно.

В большей степени это относитсяк системам, не относящееся к классическим типам: эллиптическим, гиперболическим, параболическим.

Учитывая важность спектральных свойств граничных задач для неклассических систем линейныхдифференциальных уравнений в частных производных, изучение спектральных характеристик последних весьма актуально. Теория граничных задач для систем линейных дифференциальныхуравнений в частных производных, имея разнообразные применения, базируется на многочисленных методах (асимптотический, вариационный, проекционный, метод интегральных уравнений численные методы и другиеисследования). В связи с этим отметим, что проводимые нами исследования базировались на методах, которые принято называть функциональными, а свойства разрешимостиописываются в терминах спектральной теории замкнутых линейных операторов. Функциональные методы широко использовали в своих научных исследованияхК. Фридрихс, Л. Хёрмандер, С.Л. Соболев, А.А. Дезин, В. А. Ильин [1], В.К. Романко, Е.И. Моисеев [4], А.П. Солдатов [6], А.С. Макин [2].

Исследуемую граничную задачу запишем в виде

$$aD_t u(t) + bBu(t) = \lambda u(t) + f\left(t\right) \qquad (1.1)$$

$$\mathrm{u}^1_{|\mathrm{t}=q} = \mathrm{u}^2_{|\mathrm{t}=q} = 0 \qquad (1.2)$$

где $\lambda \in \square$ - спектральный параметр, $f(t)\in H;\ a,b$ - заданные матрицы(2×2);D_t- операция дифференцирования по переменной $t;\ u(t) = u^1(t)e_1 + u^2(t)e_2;\ (e_1,e_2)$ – ортонормированный базис; $q = 0,T$. Условия (1.2) являются условиями Коши. Поэтому рассматриваемую задачу будем называть задачей Коши для системы дифференциальных уравнений в частных производных вида (1.1).

Дифференциальный операторBдействует в H_x и удовлетворяет определённым требованиям, формулируемым в терминах спектральной теории операторов. Примеры интересующих нас дифференциальных операторовB и, следовательно, линейных систем дифференциальных уравнений в частных производных приведены ниже. Операция $L(Dt, B) = aD_t + bB$в этом случае определена, естественно, на достаточно гладких вектор-функциях $u:\square \to H_x^m, u = u(t), u(t) = (u^1(t),...,u^m(t))^T \in H_x^m, u^j(t)\in H_x,\ j = 1,\dots,m$ принадлежащих для каждого $t\in V_t$ области определения $\mathfrak{D}(B)$ оператора B. Элемент $u(t)\in H$ будем называть решением задачи (1.1)-(1.2), если найдётся последовательность таких гладких и удовлетворяющих условиям (1.2) вектор-функций $u_n(t)\in\mathfrak{D}(B)$, что $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(t) = u(t), \lim\limits_{n\to\infty} L(D_t,B)u_n(t) = f(t)$. Другими словами, мы имеем дело с задачей (1.1)-(1.2), понятие решения которой, как легко заметить, использует стандартную процедуру замыкания (расширения) операции $L(Dt, B) = aD_t + bB$ при условиях (1.2). Оператор $L:H\to H$, определяемый как замыкание в *H* операции $L(D_t, B)$, первоначально заданной на гладких вектор-функциях, удовлетворяющих условиям (1.2), называют сильным расширениемоперации $L(D_t, B)$ при условиях (1.2). В этом случае решение *u=u(t)* называют сильным решениемзадачи (1.1)-(1.2). Уравнение (1.1) зачастую называют операторнымили дифференциально-операторнымуравнением $1^{\underline{\text{го}}}$порядка по t. Уравнение (1.1) находит широкое применение при исследовании в цилиндре граничных задач для линейных систем дифференциальных уравнений в частных производных. Принципиальная схема перехода от граничной задачи для линейных систем дифференциальных уравнения в частных производных к соответствующему дифференциально-операторному уравнению в гильбертовом пространстве *H* будет описана ниже. Здесь же отметим следующее. Интересующие нас вопросы спектральной теории граничных задач для линейной системы дифференциальных уравнений в частных производных будут изучены на основе свойств сопоставляемого задаче дифференциального оператора *L:H→H*[5]. Свойства оператора *L* описываются в терминах спектральной теории линейных операторов.

Метод исследования

Идея метода исследования заключается в следующем. Пусть $\mathrm{H}', \mathrm{H}''$ пара сепарабельных гильбертовых пространств, в каждом из которых задан ортонормированный базис $\{\varphi_k\}_{k=1}^{k=\infty}, \{\psi_k\}_{k=1}^{k=\infty}$. Образуем гильбертово пространство H следующим образом. В качестве базиса H возьмем множество упорядоченных пар $\varphi_k \otimes \psi_j$, определив для этих пар скалярное произведение по правилу

$$(\varphi_k \otimes \psi_j, \varphi_l \otimes \psi_i) = (\varphi_k, \varphi_i) \cdot (\psi_j, \psi_i) \tag{1*}$$

где справа – скалярные произведения в $\mathrm{H}', \mathrm{H}''$ соответственно. Таким образом, относительно нормы, порождаемой скалярным произведением (1), базис $\{\varphi_k \otimes \psi_j\}_{k,j}$ - ортонормированный. Произведение (1*) распространяется обычным образом на конечные линейные комбинации

$$\sum f_{k,j} \varphi_k \otimes \psi_j \tag{2*}$$

Пополнение по введенной норме множества конечных линейных комбинаций (2*) дает (полное) гильбертово пространство $\mathrm{H} = \mathrm{H}' \otimes \mathrm{H}''$ - тензорное произведение исходных гильбертовых пространств.

В соответствии с приведенной конструкцией для любой пары элементов $f = \sum f_k \varphi_k \in \mathrm{H}'$, $g = \sum g_k \psi_k \in \mathrm{H}''$ определено их тензорное произведение

$$f \otimes g = \sum_{i,k} f_i g_k \varphi_i \otimes \psi_k,$$

(поскольку $\sum_{i,k} |f_i|^2 |g_k|^2 < \infty.$).

Если теперь $A' : \mathrm{H}' \to \mathrm{H}'$ - замкнутый линейный оператор с плотной областью определения $\mathrm{D}(A'), \varphi_k \in \mathrm{D}(A')$, для любого k и оператор $A'' : \mathrm{H}'' \to \mathrm{H}''$ обладает аналогичными свойствами, то над плотным в H множеством элементов вида (2*) (над множеством конечных линейных комбинаций) определен оператор

$$A' \otimes A'' \left(\sum_{i,k} f_{i,k} \otimes \psi_k \right) = \sum f_{i,k} A' \varphi_i \otimes A'' \psi_k$$

Замыкание в H заданного таким образом оператора $A' \otimes A''$ (с плотной областью определения) определяет оператор $A' \otimes A'' : \mathrm{H} \to \mathrm{H}$.

Если $\mathrm{H} = \mathrm{H}' \otimes \mathrm{H}''$ и $\mathrm{H}', \mathrm{H}''$ - функциональные пространства, то H' может быть естественным образом вложено в H за счет отождествления с подмножеством $\mathrm{H}' \otimes 1$ (состоящим из элементов вида $\mathrm{f} \otimes 1, f \in \mathrm{H}'$). Имея в виду сказанное, элементы H' рассматривают зачастую как элементы H без каких-либо оговорок (и без перехода в обозначениях от f к $f \otimes 1$). Аналогично обстоит дело с операторами $A' : \mathrm{H}' \to \mathrm{H}'$: их отождествляют с операторами вида $A' \otimes 1$.

Приведенная конструкция возникает естественным образом всякий раз, когда $\mathrm{H}', \mathrm{H}''$ - наши стандартные гильбертовы пространства функций над некоторыми областями $V' \subset \mathbf{R}^{\mathbf{n}'}, V'' \subset \mathbf{R}^{\mathbf{n}''}$. Тогда H - соответствующее пространство над $V' \times V''$. При этом операции $L'(D) \otimes L''(D)$ и соответствующий оператор записываются в виде

$$\sum a_\alpha(x) b_\beta(y) D_x^\alpha D_y^\beta$$

т.е. без использования обозначения $\otimes$ для тензорного произведения.

Поскольку в гильбертовом пространстве переход от базиса Рисса к ортонормированному базису и обратно равносилен замене данного скалярного произведения на эквивалентное. Ясно, что приведенные рассмотрения распространяются естественным образом и на тот случай, когда $\{\varphi_k\}, \{\psi_k\}$ - базисы Рисса в $\mathrm{H}', \mathrm{H}''$.

Переход от $\mathrm{H} = \mathrm{H}' \otimes \mathrm{H}''$ к случаю произвольного числа сомножителей $\mathrm{H} = \bigotimes_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{H}^{\mathrm{k}}$ осуществляется автоматически.

Удобным классом операторов, функции от которых допускают весьма простое определение, являются M-операторы. Действительно, если $A : \mathrm{H} \to \mathrm{H}$ - есть M-оператор, $\{\varphi_k\}$ -система собственных функций оператора A, образующая базис Рисса, и можно, следовательно, для любого элемента $\mathrm{u} \in \mathrm{D}(A)$ записать

$$\mathrm{u} = \sum \mathrm{u}_{\mathrm{k}} \varphi_k,\ Au = \sum \mathrm{u}_{\mathrm{k}} A\varphi_k = \sum \lambda_k u_k \varphi_k,$$

то в предположении, например, что F(z) аналитична в области $\Omega \subset \mathbf{C}$ такой, что $\lambda_k \in \Omega$ для всех k, достаточно положить

$$F(A)u = \sum F(\lambda_k) u_k \varphi_k \tag{3*}$$

При этом $\mathrm{u} \in \mathrm{D}(F_A)$ всякий раз, когда ряд (3*) сходится. Область определения оператора F(A) заведомо плотна (в нее попадают все конечные линейные комбинации элементов базиса).

Трудности, с которыми приходится сталкиваться при попытке применения приведенной идеальной схемы к конкретным ситуациям, возникаемым при анализе граничных задач, бывают связаны обычно, с одной стороны, со сложной природой соответствующих функций F(z), а с другой – со стремлением включить в рассмотрения операторы, не являющиеся M-операторами.

Приведенная схема немедленно распространяется на случай, когда $\mathrm{H} = \bigotimes_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{H}^{\mathrm{k}}$ и $A^k : \mathrm{H}^{\mathrm{k}} \to \mathrm{H}^{\mathrm{k}}$ и $F(z_1,\dots,z_n)$ - функция n комплексных переменных, удовлетворяющая соответствующим требованиям. Операторы A^k предполагаются при этом, разумеется, коммутирующими.

Пространство разрешимости граничной задачи и его представления

Пусть H_x - сепарабельное гильбертово пространство и $\{\varphi^s\}$, s∈S, − его базис Рисса. Здесь и в дальнейшем S − некоторое счётное множество индексов S, которыми нумеруются элементы φ^s базиса пространства H_x. Не ограничивая общности результатов и учитывая ограничения, накладываемые на изучаемую граничную задачу, можно считать, что H_x = =$\mathcal{L}_2(V_x)$ - гильбертово пространство комплексных функций над замкнутой ограниченной областью V_x евклидова пространства R^m с интегрируемым по Лебегу квадратом модуля. Пусть также система $\{\psi^s\}$, s∈S , является базисом H_x, биортогональным базису $\{\varphi^s\}$, s∈S. В таком случае биортогональная система $\{\varphi^s,\ \psi^s\}$, s∈S, состоит из базисов Рисса пространства H_x.

Обозначим через e_1, ... ,e_m канонический ортонормированный базис евклидова пространства $\mathcal{E}^m$ вектор-столбцов: $e_1 \overset{def}{=} (1,0,\ldots,0)^T$,..., $e_m \overset{def}{=} (0,\ldots,0,1)^T$, где T–операция транспонирования; а через U - унитарное пространство элементов $u = u^1e_1 + \ldots + u^m e_m$; $u^k \in \mathbb{C}$, $k = 1,\ldots,m$; со скалярным произведением $(u,v)_U = u^1\overline{v^1} + \ldots + u^m\overline{v^m}$. Пусть также H_x^m - гильбертово пространство элементов $u = u^1e_1 + \ldots + u^m e_m; u^k \in H_k$ с нормой $\|u\|_{H_x^m} = \sqrt{\sum_{k=1}^{m}\|u^k\|_{H_x}^2}$ Очевидно, что любой элемент U является элементом H_x = $\mathcal{L}_2(V_x)$.

При таком подходе U является собственным подпространством H_x.Отметим, что H_x^m можно представить в виде ортогональной суммы m копий гильбертова пространства H_x, то есть в виде:

$$H_x^m = \sum_{k=1}^{m} \oplus H_x \text{ или кратко в виде: } H_x^m = \bigoplus_{k=1}^{m} H_x$$

Пусть $t \in V_t = [T_1, T_2], -\infty < T_1 \le 0 \le T_2 < +\infty, T_2 - T_1 \ne 0.$ Положим H_t=$\mathcal{L}_2(V_t)$гильбертово пространство комплексных функций над V_t с интегрируемым по Лебегу квадратом модуля, $H_{tx} = H_t \otimes H_x$. В дальнейшем изучение свойств разрешимости граничной задачи для линейных систем уравнений в частных производных будем проводить в гильбертовом пространстве $H = H_t \otimes H_x^m$, $H_t = \mathcal{L}_2(V_t)$. Важную роль при исследовании свойств спектральной задачи для линейных систем дифференциальных уравнений в частных производных имеет нижеследующая лемма 1.1 и вытекающая из неё лемма 1.2.

Лемма 1.1. Справедливо следующее равенство: $H_{tx} = H_x \otimes U$.

В силу теории биортогональных систем для любого элемента $u \in H_x^m$ имеет место представление в виде ряда: $u = \sum_{s,k} u_s^k \varphi_k^s$ по биортогональной системе $\{\varphi_k^s, \psi_k^s\}, \varphi_k^s = \varphi^s e_k, \psi_k^s = \psi^s e_k.$ Так как $u_s^k = (u, \psi_k^s) H_x^m = (u^k, \psi^s) H_x$, то в силу безусловной базисности базиса $\{\varphi_k^s\}$ имеем также равносильное представление: $u = \sum_s \varphi^s u_s$ для элемента *u*, где $u_s = u_s^1 e_1 + \ldots + u_s^m e_m \in U.$

Теперь мы можем получить другие формы представления гильбертова пространства *H*.

Лемма1.2.Справедливы следующие равенства:

$$H = H_t^m \otimes H_x = H_t \otimes H_x^m = \bigoplus_{k=1}^{m} H_{tx}.$$

Достаточно заметить, что для вектор - функции $u(t)\in H$ в силу леммы 1.1 справедливы два представления $u(t)=\sum_{s,k}u_s^k(t)\varphi_k^s=\sum_s\varphi^s u_s(t)$ и воспользоваться разложением вектор-функций $u_s(t)$ (функций $u_s^k(t)$) в ряд по полной ортонормированной системе в H_t^m (в H_t).

Отметим, что норма элемента u гильбертова пространства H вектор-функций u: $\overline{V}\to H_x^m, u=u(t)=u^1(t)e_1+\ldots+u^m(t)e_m$ может быть вычислена по формуле: $\|u\|_H=\left\|\|u(t)\|_{H_x^m}\right\|_{H_t}$.

Дифференциальный оператор *B* и его расширение

Пусть B:$H_x\to H_x$ - линейный замкнутый неограниченный оператор с плотной в H_x областью определения $\mathfrak{D}(B)$, не зависящей от $t\in V_t$ и $B\varphi^s=B\{s\}\varphi^s$ для любого $s\in S$, то есть все элементы базиса Рисса $\{\varphi^s\}$, $s\in S$, пространства H_x являются собственным элементами оператора B: собственному значению $B(s)$ соответствует собственный элемент φ^s. Оператор, для которого существует полная система собственных элементов, образующая базис Рисса в H_x, принято называть М - оператором (от слова - модельный). Следует отметить, что существует M – оператор B, точечный спектр которого не имеет конечных предельных точек. В этом случае его резольвентное множество не пусто. Кроме того, существует M - оператор B, резольвентное множество которого пусто. Приведём примеры интересующих нас M - операторов.

$B=B(x, D_x)$, где B (x, D_x) является обыкновенным дифференциальным оператором на отрезке $V_x=[a, b], -\infty<a<b<+\infty$, порождаемым сильно регулярными краевыми условиями. Предполагается, что оператор $B(x, D_x)$ не имеет присоединённых функций.

Пусть $V_x=V_{x1}\times V_{x2}\times\ldots\times V_{xm}$, $V_{xk}=[0, a_k]$, $0<a_k<+\infty$, $\kappa=1,\ldots,m$. Пусть также $B(D_X)=\sum_{|a|\le r}b_aD_x^a$ -дифференциальная операция с постоянными комплексными коэффициентами $b_a=b_{a1,a2\ldots am}$; $D_x^a=D_{x_1}^{a_1}D_{x_2}^{a_2}\ldots D_{x_m}^{a_m}$; $|a|=a_1+a_2+\ldots+a_m$. Обозначим через B: $\mathcal{L}_2(V_x)\to\mathcal{L}_2(V_x)$ замыкание в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}_2(V_x)$ дифференциальной операции $B(D_x)$, первоначально заданной на гладких функциях, удовлетворяющих по каждой переменной x_κ нелокальным краевым условиям вида

$$\mu_kD_{x_k}^{l_k}u\Big|_{x_k=0}=D_{x_k}^{l_k}u\Big|_{x_k=b_k},\ l_k=0,1,\ldots,r_k-1,\qquad(1.3)$$

где $\mu_k\ne0$ и r_k – порядок $B(D_x)$ по переменной x_κ; $\kappa=1,2,\ldots,m$. Известно, что замкнутый дифференциальный оператор B является M - оператором. Если $\mu_k=\ldots=\mu_k=1$, то оператор B принято называть Π- оператором.

Пусть V_x -замыкание ограниченной гладкой гиперповерхностью $S=\partial V_x$ области V_x евклидова пространства $\mathbb{R}^m$. Пусть также $B(D_X)=\sum_{|a|\le2r}b_a(x)D_x^a$ - формально самосопряжённая эллиптическая дифференциальная операция, причём $(-1)^r\sum_{|a|\le2r}b_a(x)\xi^a>0$ для всех $x\in V_x$ и всех $\xi\in\mathbb{R}^m,\xi\ne0$. Обозначим через B: $\mathcal{L}_2(V_x)\to\mathcal{L}_2(V_x)$ замыкание в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}_2(V_x)$ дифференциальной операции $B(D_x)$ первоначально заданной на гладких функциях, удовлетворяющих условиям Дирихле

$$D_v^{k-1}u_{|_{x\in S}}=0,\ k=1,\ldots,r,$$

где ν-единичная внешняя нормаль к поверхности S.Известно, что замкнутый дифференциальный операторB обладает свойствами М - оператора, причём B является правильным оператором, то есть 0 $\in\varrho$ B. В дальнейшем этот М - оператор B будем называть М - эллиптическим дифференциальным оператором.

Примечание 1.1. Следует отметить, что выбор М - оператора B определит при заданных матрицах a и bво-первых вид системы (1.1) дифференциальных уравнений в частных производных и, во - вторых, тип краевых условий по переменной x. Поэтому, говоря о краевой задаче для линейной системы дифференциальных уравнений в частных производных, записанной в форме дифференциально-операторного уравнения (1.1), будем указывать только условия по переменной t: выбор условий по tопределяет название задачи. Например, говоря о задаче Дирихле для системы (1.1), мы имеем в виду, что краевые условия (1.2) являются условиями Дирихле; условия по x вошли в определение оператора B и явно не оговариваются. Кроме того, ради простоты обозначений переменная x (а иногда и переменная t) как аргумент вектор-функции и $\in$ H явно не указывается.

Положим $B(S) = \{B(s) : s\in S\}$.Будем считать выполненным следующее условие 1.1. на структуру спектра M - оператора B.

Условие 1.1.Точечный спектр оператора B $:H_x \to H_x$ представим, в виде: $P\sigma B = B(S)$.

Известно, что спектр σB оператора $B: H_x^m \to H_x^m$ состоит из замыкания на комплексной плоскости точечного спектра $P\sigma B$ оператора B. Множество $C\sigma B = \sigma B \setminus P\sigma B$ образует непрерывный спектр оператора B.

Заметим, что уравнение (1.1) мы рассматриваем в гильбертовом пространстве H вектор-функций $u(t)= u^1(t)e_1+ \ldots + u^m(t)e_m$,аоператор$B$ определён на скалярах $u^k(t) \in H_x$ для любого $t\in V_t$и любого $k = 1, 2,\ldots, m$.Следующие соглашения являются оправданием такой записи. Так как H_x^m можно представить в виде ортогональной суммы m копий гильбертова пространства H_x, то естественно определить расширение оператораB на H. Расширение оператора $B: H_x^m \to H_x^m$ на гильбертово пространство векторов H_x^m, как и принято, будем обозначать тем же символом B. Будем говорить, что $u = u^1e_1+ \ldots +u^me_m\in\mathfrak{D}(B)$ - области определения оператора $B: H_x^m \to H_x^m$ и $Bu = (Bu^1)e_1 + \ldots + (Bu^m)e_m$, если $u^\kappa\in\mathfrak{D}(B)$ - области определения оператора $B : H_x \to H_x$ для любого $\kappa = 1, \ldots, m$.Имеет место следующая теорема.

Теорема 1.1.Спектр σB оператора $B: H_x^m \to H_x^m$совпадает с замыканием его точечного спектра $P\sigma$B. Точечный спектр $P\sigma$B оператора B даётся формулой $P\sigma B=B(S)$. Собственному значению B(s) оператора B соответствуют т собственных векторов$\varphi_k^s = \varphi^s e_k; k=1,\ldots,m$. Система $\{\varphi_k^s$: k = $1, \ldots, m$; s$\in$S$\}$ собственных векторов оператора B является базисом Рисса в гильбертовом пространстве H_x^m.

Следует отметить, что в некоторых случаях начало доказательства будем обозначать символом □, а конец доказательства символом ■.

□ Если $\left\{\varphi^s, \psi^s : s\in S\right\}$ - биортогональная система в H_x, то система

$\left\{\varphi_k^s, \psi_k^s : k=1,\ldots,m;\ s\in S\right\}$биортогональна в H_x^m. Для любого $u = \sum_{k=1}^{m} u^k e_k \in H_x^m$

имеем $u^k = \sum_s (u^k, \psi^s)_{H_x} \varphi^s$ в H_x и, следовательно,и$u = \sum_{k,s} (u, \psi_k^s)_{H_x^m} \varphi_k^s$ причём разложение единственно. Существуюттакие константы $0 < C_1 \le C_2 < +\infty$, что для любого элемента $u^\kappa\in H_x$ имеем

$$C_1^2\sum_s\left|\left(u^k,\psi^s\right)_{H_x}\right|^2\le\left\|u^k\right\|_{H_x}^2\le C_2^2\sum_s\left|\left(u^k,\psi^s\right)_{H_x}\right|^2 \qquad (1.4)$$

Складывая неравенства (1.4) для значений k = 1, ..., m и учитывая, что $\left(u^k,\psi^s\right)_{H_x}=\left(u^k,\psi^s\right)_{H_x^m}$, получаем неравенство

$$C_1^2\sum_{k,s}\left|\left(u^k,\psi^s\right)_{H_x^m}\right|^2\le\left\|u^k\right\|_{H_x^m}^2\le C_2^2\sum_{k,s}\left|\left(u^k,\psi^s\right)_{H_x^m}\right|^2,$$

из которого следует, что B является М - оператором в H_x^m .

Обобщённое решение

Пусть $\mathfrak{D}_t$ -линейное многообразие гладких вектор-функций из H_t^m, удовлетворяющих условию (1.2), а точнее,

$$v\in\mathfrak{D}_t\text{, если }\begin{cases} v\in C^2(V_t^{\pm})\cap C\left(V_t\right) \\ L_s(D_t)v\in H_t^m \\ \Gamma_t v=0\end{cases} \qquad (1.5)$$

где $L_s(D_t)=aD_t+bB(s),\Gamma_t v=\mu_1 v(T_t)+\mu_2 v(T_2),V_t^{\pm}=V_t\setminus\{T_1,0,T_2\}$.

Пусть также $\mathfrak{D}$ -линейное многообразие, состоящее из вектор-функций $u:\square\to H_x^m$, $u=u(t)$,вида

$$u(t)=\sum_s v_s(t)\varphi^s, \qquad (1.6)$$

где $v_s(t)$из $\mathfrak{D}_t$ и суммирование проводится для конечного набора индексов $s\in S$.

Для любых $u,f\in H$ будем говорить, что $u\in\mathfrak{D}$ (L) - области определения оператора

$L:H\to H$ и Lu = f, если найдётся такая последовательность $\left\{u_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ вектор-функции $u_n\in\mathfrak{D}$, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left\|u_n-u\right\|_H=\lim\limits_{n\to\infty}\left\|L(D_t,B)u_n-f\right\|_H=0$. Оператор $L:H\to H$ называют замыканием операции $L(D_t, B) = aD_t + bB(D_x)$ - левой части системы уравнений (1.1) на вектор - функциях из $\mathfrak{D}$.

Определение 1.1.Элемент $u\in\mathfrak{D}$ (L)будем называть обобщённым решением задачи (1.1)-(1.2), если $Lu=\lambda u+f$ в H.

Таким образом, изучение свойств разрешимости задачи (1.1)-(1.2) свелось к исследованию спектральных характеристик сопоставляемого ей оператора$L:H\to H$. Приведём некоторые подходы описания его спектра и свойств системы собственных вектор-функций [24]. Пусть L_s: $H_x^m\to H_x^m$ - замыкание операции $L_s(D_t) = aD_t + bB(s)$ на функциях из $\mathfrak{D}_t$. Удобно считать, что и в этом случаеB является оператором: $Bu=B(s)u$, $B:H_x^m\to H_x^m$, то есть оператором умножения на константу $B(s)$. Отметим следующие очевидные свойства:

Для конечных линейных комбинаций $u_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\varphi^{sk}u_{sk}(t)\in\mathfrak{D}$ и $f_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\varphi^{sk}u_{sk}(t)\in H$ имеем: вектор-функция $u_n\in H$ является решением уравнения $Lu=\lambda u+f$ тогда и только тогда, когда для любого κ = 1,2, ..., n вектор-функция $u_{sk}\in H_x^m$ является решением уравнения $L_{sk}v=\lambda u+f_{sk}$.

Точечный спектр $P\sigma L$ оператора $L : H \to H$ даётся формулой: $P\sigma L = \bigcup_{s\in S} P\sigma L_s$ если $u(t)-$собственная вектор-функция оператора L_s: $H_x^m \to H_x^m$, соответствующая собственному значению λ, то $\varphi^s u(t)$ собственная вектор-функция оператора L, соответствующая собственному значению λ.

Структура собственных вектор-функций оператора L позволяет, как это проделано для скалярных функций, доказать ряд аналогичных теорем о свойствах систем собственных вектор - функций оператора L. Докажем интересующие нас свойства.

Теорема 1.2. Если для любого s∈S система (последовательность) $\{v_{k,s} : k \in K_s\}$ собственных вектор-функций оператора L_s, где K_s - некоторое (упорядоченное) множество значений индекса k, полна (образует базис) в пространстве H_x^m , то система

$$\{\varphi^2 v_{k,s} : k \in K_s ; s \in S\} \tag{1.7}$$

собственных вектор-функций оператора Lполна (образует базис) в пространстве*H*.

Докажем вначале полноту в H системы $\{u_{k,s} : k \in K_s ; s \in S\}$ собственных вектор - функций $u_{k,s} = \varphi^s u_{k,s}$ оператора L. Пусть f- произвольный элемент H. Для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такой конечный набор $\{\varphi^{si} : i = 1, 2, ..., N\}$, что

$$\left\| f - \sum_{i=1}^{N} \varphi^{si} f_{si} \right\|_H < \frac{\varepsilon}{2},$$

где $f_{s_i} \in H_x^m$. Пусть $C = \max_{1\le i\le N} \left\| \varphi^{s_i} \right\|_{H_x}$ Подберём для каждого $i = 1,\ 2, ..., N$ такой конечный набор$\{v_{k_n,s_i} : n = 1, 2, \dots, N_i\}$, чтобы

$$\left\| f_{si} - \sum_{i=1}^{N_i} f_{k_n,s_i}, v_{k_n,s_i} \right\|_{H_t^m} < \frac{\varepsilon}{2CN},$$

где $f_{k_n,s_i} \in \square$. Неравенство $\left\| f - \sum_{i=1}^{N} \sum_{n=1}^{N_i} f_{k_n,s_i} \varphi_{s_i} v_{k_n,s_i} \right\|_H \le$

$$\le \left\| f - \sum_{i=1}^{N} f_{s_i} \varphi_{s_i} \right\|_H + C \sum_{i=1}^{N} \left\| f_{s_i} - \sum_{n=1}^{N_i} f_{k_n,s_i} v_{k_n,s_i} \right\|_{H_t^m} < \varepsilon$$

даёт утверждаемую полноту.

Исследуем теперь вопрос о базисности системы (1.7) в *H*. Из равенства $H = H_t^m \otimes H_x$ следует, что для любого элемента f∈H справедливо в H представление $f = \sum_{s\in S} \varphi^s f_s$, в котором коэффициенты $f_s \in H_x^m$ определены однозначно. Так как последовательность $\{v_{k,s} : k \in K_s\}$ образует базис в пространстве H_t^m , то для каждого элемента $f_s \in H_x^m$ справедливо в H_t^m представление $f_s = \sum_{k\in K_s} f_{k,s} v_{k,s}$, где коэффициенты $f_{k,s} \in \square$ также определены однозначно. Следовательно, получаем единственное представление $f_s = \sum_{s\in S}\sum_{k\in K_s} f_{k,s}\varphi^s u_{k,s}$ произвольного элемента $f \in H$ в виде ряда по системе собственных вектор-функций оператора *L*.

Аналогично можно исследовать и другие свойства. А именно, является ли система собственных вектор-функций минимальной, бесселевой, гильбертовой, базисом Рисса и так далее. Соответствующие исследования проводились многими авторами [1-6]. Например, при исследовании граничных задач для уравнений смешанного типа Е. И. Моисеев широко использовал базисность систем синусов и косинусов для построения решения в виде биортогональных рядов по этим системам. В дальнейшем мы будем изучать граничные задачи в пространстве $H = H_t^m \otimes H_x$ при $m = 2$. Поэтому естественно возникает вопрос о базисности аналогичных систем в пространствах вектор-функций. Приведём пример ортонормированного базиса $\{e_k$: $k\in K\}$ в H_t^2, составленного из синусов и косинусов; тем самым построим базис Рисса $\{e_\kappa\varphi^s : \kappa \in K, s \in S\}$ в пространстве *H*.

Положим

$$e_k^1(t) = \sqrt{\frac{2}{T_2 - T_1}} sin\{A(k)(t-T_1)\}, e_k^2(t) = \sqrt{\frac{2}{T_2 - T_1}} cos\{A(k)(t-T_1)\},$$

$$e_k(t) = e_k^1(t)e_1 + e_k^2(t)e_2, \ ,\text{где}\ A(k) = k\frac{\pi}{T_2 - T_1}$$

Лемма 1.3 Система $\{e_\kappa(t)\varphi^s; k = 0, \kappa \in \square, s \in S\}$ заведомо не является полной в гильбертовом пространстве $H = H_t^m \otimes H_x$. Система $\{e_\kappa(t)\varphi^s; \in \square, s \in S\}$ является базисом Рисса в Н.

Докажем первое утверждение леммы 1.3. В силу рассмотрений теоремы 1.2 достаточно доказать, что система вектор-функций

$$\{ e_\kappa(t) : k = 0, \kappa \in \square \} \qquad (1.8)$$

не является полной в H_t^2. Найдём представление вектор-функции $f \in H_t^2$, $f = f(t) = f^1(t)e_1 + f^2(t)e_2$, ортогональной всем вектор-функциям системы (1.8). Из условия ортогональности для любого $\kappa = 1,2,3, \ldots$ имеем в H_t равенство:

$$f(t) - A(k)F^1(t) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m^k e_m^2(t), \text{ где } F^1(t) = \int_{T_1}^{t} f^1(\tau)d\tau,\ c_k^k = 0.$$

Откуда получаем представление для функции $F^1(t)$:

$$A(1)F^1(t) = \sum_{m=0}^{\infty}(c_m^k - c_m^{k+1})e_m^2(t).$$

Так как $c_m^k - c_m^{k+1} = c_m^{k+1} - c_m^{k+2}$ при любом $k = 0, 1, 2, \ldots$, то $c_m^{m-1} - c_m^{m+1}$ для любого m = 1, 2, 3, ... Из равенства $c_m^k = (f^2 - A(1)F^1, e_m^2)_{H_t}$ последовательно получаем:

$$c_m^{m-1} = c_m^0 - A(m-1)(F^1, e_m^2)_{H_t};$$

$$c_m^{m+1} = c_m^0 - A(m+1)(F^1, e_m^2)_{H_t};$$

$$c_m^0 = A(m)(F^1, e_m^2)_{H_t}.$$

Откуда находим $(f^1, e_m^1)_{H_t} = -c_m^0$.Следовательно, имеем разложения

$$f^1(t) = -\sum_{m=1}^{\infty} c_m^0 e_m^1(t), f^2(t) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m^0 e_m^2(t).$$

Положив в этих разложениях, например, $c_m^0 = \dfrac{1}{2^m}$ получаем искомую вектор-функцию $f\in H_t^2$, то есть вектор-функцию ортогональную всем вектор-функциям системы (1.8).

Докажем теперь вторую часть леммы, рассуждая, как и прежде, от противного. Пусть вектор-функция *f(t)*$\in H_t^2$ отлична от нуля и ортогональна в H_t^2 всем вектор-функциям системы $\{e_\kappa(t) : k \in \mathbb{Z}\}$. В силу доказанного ранее при $\kappa = -1, -2, -3, \ldots$, имеем: $0 = (f, e_k)_{H_t^2} = 2c_{|k|}^0$, то есть $f = 0$. Замечая, что система

$$\left\{ e_\kappa(t) / \sqrt{2}; k \in \mathbb{Z} \right\} \tag{1.9}$$

является ортонормированной системой в H_t^2 и, учитывая её полноту в H_t^2, получаем: система (1.9) - ортонормированный базис в H_t^2, а система $\{e_\kappa(t)\varphi^2 : k \in \mathbb{Z}; s \in S\}$ - базис Рисса в $H = H_t^m \otimes H_x$

Выделенные свойства оператора *L* приводят к необходимости исследования свойств операторов L_S. Займёмся этим. В соответствии со схемой рассмотрим в H_t^m цепочку спектральных задач:

$$L_s u(t) = \lambda u(t) + f(t), \quad s \in S. \tag{1.10}$$

Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$. Если $\lambda \notin P\sigma L_s$, то структура резольвенты $R_\lambda = R_\lambda(L_s)$ оператора L_S легко просматривается из представления $u(t) = R_\lambda f(t)$,

$$R_\lambda f(t) = \int_{T_1}^{T_2} G_s(t, \tau, \lambda) f(\tau) d\tau, \tag{1.11}$$

решения операторного уравнения (1.10). Матрицу Грина $G_s(t, \tau, \lambda)$ в данном случае удобно выписать в виде

$$G_s(t,\tau,\lambda) = \begin{cases} \Phi_s(t,\lambda) M_s^{-1}(\lambda) \mu_1 \Phi_s(T_1,\lambda) \cdot \\ \cdot \Phi_s^{-1}(\tau,\lambda) a^{-1}(\tau), \; T_1 \le \tau \le t \le T_2 \\ \Phi_s(t,\lambda) M_s^{-1}(\lambda) \mu_2 \Phi_s(T_2,\lambda) \cdot \\ \cdot \Phi_s^{-1}(\tau,\lambda) a^{-1}(\tau), \; T_1 \le t \le \tau \le T_2, \end{cases} \tag{1.12}$$

где $M_s(\lambda) = \mu_1\Phi_s(T_1,\lambda)+\mu_2\Phi_s(T_2,\lambda)$, $\Phi_5(t, \lambda)$ - фундаментальная матрица оператора L_s- λE , а E - тождественный оператор в H_t^m .

Представление (1.12) позволяет выписать функцию, нули которой являются собственными значениями оператора L_s и, следовательно, оператора L. Такой функцией, очевидно, является определитель $\Delta_2(\lambda)$ матрицы $\mu_1\Phi_s(T_1,\lambda)+\mu_2\Phi_s(T_2,\lambda)$. Положим $W_t = V_t \times V_t$.

Теорема 1.3.*Пусть* $\lambda \notin P\sigma L$ *. Тогда:*

1. $\lambda \in \varrho L$, если существуют такие а) число С> *0* и б) скалярные функции $g_s - g_s(t,\tau,\lambda)$ что для всех $s \in S$ и всех $(t,\tau) \in W_t$ матрица Грина $G_s(t,\tau,\lambda)$ оператора L_s- λE удовлетворяет неравенству

$$\|G_s(t,\tau,\lambda)u(\tau)\|_U \le \|g_s(t,\tau,\lambda)u(\tau)\|_U$$

и нормы $\|g_s\|_{\mathcal{L}^2(\overline{W}_t)}$, равномерно по s ограничены, то есть для любого $s \in S$ имеет место неравенство $\sqrt{m}\|g_s\|_{\mathcal{L}^2(\overline{W}_t)} < C$.

2. $\lambda \in C\varrho L$, если существуют такие вектор-функции $f(t) \in H_t^m$,$s \in S' \subseteq S$, что $f_s \ne 0$ и

$$\sup_{s\in S'} = \frac{\|R_{\lambda,s} f_s\|_{H_t^m}}{\|f_s\|_{H_t^m}} = +\infty. \tag{1.13}$$

□ 1. Для любой вектор-функции $f(t) \in H$ в силу теоремы 1.2 имеем представление $f_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \varphi^{sk} f_{sk}(t), f_s(t) \in H_t^m$. Аппроксимируем $f(t) \in H$ частичной суммой $f_n(t) \in H$ её разложения в ряд по биортогональной системе $\{\varphi_m^s, \psi_m^s\}$:

$$f_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \varphi^{sk} f_{sk}(t), f_{sk}(t) \in H_t^m,$$

и определим входящую в определение обобщённого решения изучаемой задачи последовательность $\{u_n(t)\}$ виде: $u_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \varphi^{sk} u_{sk}(t), u_{sk}(t) = R_{\lambda,sk}(t).$. Из свойств нормы, матрицы Грина и неравенства Коши - Буняковского и условий теоремы получаем необходимую нам оценку: $\|u_{sk}\|_{H_t^m} \le C\|f_{sk}\|_{H_t^m}$. Действительно,

$$\|u_{s_k}(t)\|_U^2 = \sum_{n=1}^{m} \left| \int_{V_t} \sum_{i=1}^{m} G_{s_k}^{n,i}(t,\tau,\lambda) f_{s_k}^i(\tau) d\tau \right|^2 \le$$

$$\le \left(\int_{V_t} \sum_{n=1}^{m} \left| \sum_{i=1}^{m} G_{s_k}^{n,i}(t,\tau,\lambda) f_{s_k}^i(\tau) \right| d\tau \right)^2 \le m \int_{V_t} \|G_{s_k}(t,\tau,\lambda) f_{s_k}(\tau)\|_U d\tau \le$$

$$\le m \int_{V_t} |g(t,\tau,\lambda)|^2 d\tau \int_{V_t} \|f_{s_k}(\tau)\|_U^2 d\tau =$$

$$= m\int_{V_t} |g(t,\tau,\lambda)|^2\, d\tau \left\| \left\| f_{s_k}(t) \right\|_U \right\|_{H_t}^2 .$$

Осталось воспользоваться равенством $\left\| u_{s_k} \right\|_{H_t^m} = \left\| \left\| u_{s_k}(t) \right\|_U \right\|_{H_t}$.

Далее в силу теоремы 1.1. имеем двойное неравенство

$$C_1^2 \sum_{k=1}^{n} \left\| u_{s_k} \right\|_{H_t^m}^2 \le \left\| u_n \right\|_H^2 \le C_2^2 \sum_{k=1}^{n} \left\| u_{s_k} \right\|_{H_t^m}^2 .$$

Учитывая доказанное, получаем неравенство

$$\left\| u_n \right\|_H \le c \left\| f_n \right\|_H , c = C\frac{C_2}{C_1}, \tag{1.14}$$

из которого следует единственность решения уравнения $Lu_n = \lambda u_n + f_n$, фундаментальность последовательности $\{u_n\}$ в H и существование решения уравнения $Lu_n = \lambda u_n + f$.Если положить $u = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$, то переходя к пределу при $n \to \infty$ в неравенстве (1.14) получаем

$$\left\| u_n \right\|_H = \left\| \left(L - \lambda \right)^{-1} f \right\|_H \le c \left\| f \right\|_{H'}$$

то есть $\lambda \in \varrho L$.

2. Будем пользоваться обозначениями и результатами первой части теоремы 1.3. В частности было доказано, что оператор $(L-\lambda)^{-1}$ существует и задан на множестве, всюду плотном в H. Далее имеем:

$$\frac{\left\| (L - \lambda)^{-1} \varphi^s f_s \right\|_H}{\left\| \varphi^s f_s \right\|_H} \ge \frac{C_1}{C_2} \frac{\left\| (L_s - \lambda)^{-1} f_s \right\|_{H_t^m}}{\left\| f_s \right\|_{H_t^m}} .$$

Откуда в силу условия (1.13) теоремы 1.3. получаем $\left\| (L - \lambda)^{-1} \right\| = +\infty,$ то есть $\lambda \in C\varrho L$. ■

Обозначим через $\hat{L}_s$ сужение оператора L на подпространство $H_t^m \otimes \varphi_s$ пространства H. Тогда $\hat{L}_s = L_s \otimes 1.$ Учитывая важность оператора L_s, в дальнейшем будем называть его проекцией оператора L на пространство H_t^m относительно φ^s, или просто s – проекцией оператора L.

Задача Коши для квазигиперболических систем первого и второго типа

Пусть t∈V_t≡ [T, 0], то есть T_1 = T< 0, T_2 = 0; H_t=$\mathcal{L}_2(V_t)$; H_x=$\mathcal{L}_2(V_t)$;$H = H_t \otimes H_x^2$. В гильбертовом пространстве $H = L_2(V)$ вектор-функций $u = u^1 e_1 + u^2 e_2$ переменных t, x рассмотрим системы уравнений, записанных в форме дифференциально-операторных уравнений

$$aD_t u + bBu = f , \text{при } a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \tag{2.1}$$

$$aD_t u + bBu = f , \text{при } a = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \tag{2.2}$$

К операторным уравнениям (2.1) и (2.2) присоединим граничные условия Коши по t вида:

$$u^1_{|t=T} = u^2_{|t=T} = 0 \qquad (2.3)$$

Определение 2.1.Элемент $u \in \mathfrak{D}$ (L)будем называть обобщённым решением задачи (2.1)-(2.3) (либо (2.2)-(2.3)), если $Lu = \lambda u + f$ в H.

Обозначим через $L: H \to H$ дифференциальный оператор, сопоставляемый изучаемой задаче (2.1)-(2.3) (либо задаче (2.2)-(2.3)) в силу определения 2.1. Имеет место следующая теорема.

Теорема 2.1. Опишем спектральные свойства задачи (2.1)-(2.3) (задачи (2.2)-(2.3)):

1. Если оператор B обладает сильным B - свойством, то резольвентное множество оператора L заполняет комплексную плоскость.

2. Если оператор B не обладает сильным B - свойством, то непрерывный спектр оператора L заполняет комплексную плоскость.

□ Пусть λ - произвольное комплексное число. Рассмотрим дифференциальный оператор $L: H \to H$, сопоставляемый задаче (2.2)-(2.3) в силу определения 2.1. Обозначим s - проекцию оператора L через L_s. Выпишем матрицу Грина оператора $L_s - \lambda$:

$$G_s(t,\tau,\lambda) = \begin{cases} A(t,\tau,\lambda), \text{если } T \le \tau \le t \le 0; \\ 0, \text{если } T \le t \le \tau \le 0. \end{cases}$$

Здесь$A(t,\tau,\lambda) =$

$$= \begin{pmatrix} \cos\left(\sqrt{b^2}(t-\tau)\right) - \dfrac{\lambda \sin\left(\sqrt{b^2}(t-\tau)\right)}{\sqrt{b^2}} & -\dfrac{B\sin\left(\sqrt{b^2}(t-\tau)\right)}{\sqrt{b^2}} \\ -\dfrac{B\sin\left(\sqrt{b^2}(t-\tau)\right)}{\sqrt{b^2}} & \cos\left(\sqrt{b^2}(t-\tau)\right) + \dfrac{\lambda \sin\left(\sqrt{b^2}(t-\tau)\right)}{\sqrt{b^2}} \end{pmatrix},$$

0 – нулевая матрица;$b^2 = -B^2 - \lambda^2, B = B(s)$.

Для любого индекса $s \epsilon S$ и для любого числа $\lambda \in C$ знаменатель матрицыГрина оператора $L_s - \lambda$ отличен от нуля, то есть $\Delta_s(\lambda) \neq 0$.Поэтому точечный спектр оператора L есть пустое множество, то есть $P\varrho L \neq \varnothing$.

Оператор $(L_s - \lambda)^{-1}$ определён на конечных линейных комбинациях $\sum_{m,n,s} t^m \varphi^s_n$элементов H. Системы $\{t^m: m = 0,1,2 \dots\}$ и $\{\varphi^s_n: n = 1,2; s \in S\}$ полны в пространствах H_t и H^2_x соответственно. Следовательно, система элементов$\{x^m\varphi^s_n : m = 0,1,2,\dots; n = 1,2; s \in S\}$ полна в H. Доказательство этого проводится как в работе [5]. Таким образом, остаточный спектр оператора L - пустое множество: $R\varrho L = \varnothing$.

Если$\sup_s|\mathrm{Re}B(s)| < \infty$, то для элементов$G^{i,j}_s(t,\tau,\lambda)$матрицы Грина $G_s(t,\tau,\lambda)$имеем$\sup_s\left|G^{i,j}_s\right|_{\mathcal{L}_2(W_t)} < \infty$. Воспользовавшись работой [5], получаем включение $\lambda \in \varrho L$.

Пусть последовательность $\{s_n\}^\infty_{n=1}$такова, что $\lim_{n\to\infty}\mathrm{Re}B(s_n) = \infty$.

Положим $u_n = u_n(t) = (L_{s_n} - \lambda)^{-1}e_2$. Тогда

$$u^1_n = u^1_n(t) = -\frac{B(s_n)}{B^2(s_n) + \lambda^2}\left(\cos\sqrt{-b^2(s_n)}(t-T) - 1\right).$$

Так как $\lim_{n\to\infty}\|u^1_n\|_{H_t} = \infty$, то $\lim_{n\to\infty}\|u_n\|_{H_t{}^2} = \infty$.Далее имеем

$$\|(L-\lambda)^{-1}\| \geq \frac{\left\|(L-\lambda)^{-1}\varphi_2^{s_n}\right\|_H}{\left\|\varphi_2^{s_n}\right\|_H} \geq -\frac{C_1}{TC_2}\|u_n\|_{H_t{}^2}$$

В силу сделанного ранее допущения получаем включение $\lambda \in C\varrho L$. Осталось заметить, что λ - произвольное комплексное число.

Обозначим теперь через $L: H \to H$ дифференциальный оператор, сопоставляемый задаче (2.1)-(2.3) в силу определения 2.1. Доказательство выписанной структуры спектра этого оператора проводится также, как и в случае оператора, порождённого задачей (2.2)-(2.3). Оно базируется на представлении матрицы Грина оператора$L_s - \lambda$:

$$G_s(t,\tau,\lambda) = e^{\lambda(t-\tau)}\begin{cases}\begin{pmatrix} ch(B(t-\tau)) & -sh(B(t-\tau)) \\ -sh(B(t-\tau)) & ch(B(t-\tau))\end{pmatrix}, \text{если } T \leq \tau \leq t; \\ 0, \text{если } t \leq \tau \leq 0.\end{cases}$$

Здесь$B = B(s)$, L_s является s-проекцией оператора L, порождённого задачей (1)-(3). ■

Задача Коши для квазиэллиптических системы первого и второго типа

Пусть $t \in V_t \equiv [0,T]$, то есть $T_1 = 0, T_2 = T > 0$; $H_t = \mathcal{L}_2(V_t); H_x = \mathcal{L}_2(V_x)$; $H = H_t \otimes H_x^2$. В гильбертовом пространстве вектор-функцийHрассмотрим системы уравнений, записанных в форме дифференциально-операторных уравнений

$$aD_t u + bBu = f, \text{при } a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}; \tag{2.4}$$

$$aD_t u + bBu = f, \text{при } a = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}; \tag{2.5}$$

Начальные условия имеют теперь следующий вид:

$$u^1_{|t=0} = u^2_{|t=0} = 0 \tag{2.6}$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2.2. Опишем спектральные свойства задачи (2.4)-(2.6) (задачи (2.5)-(2.6)):

1.Если оператор iB обладает сильным B - свойством, то резольвентное множество оператора L заполняет комплексную плоскость.

2. Если оператор iB не обладает сильным B - свойством, то непрерывный спектр оператора L заполняет комплексную плоскость.

□ Изучим вначале структуру спектра дифференциального оператора $L: H \to H$, порождённого задачей (2.4)-(2.6). Пусть λ - произвольное комплексное число. Матрица Грина оператора $L_s - \lambda$ имеет вид:

$$G_s(t,\tau,\lambda) = e^{\lambda(t-\tau)}\begin{cases}\begin{pmatrix} \cos(B(t-\tau)) & \sin(B(t-\tau)) \\ -\sin(B(t-\tau)) & \cos(B(t-\tau))\end{pmatrix}, 0 \leq \tau \leq t; \\ 0, t \leq \tau \leq T.\end{cases}$$

Здесь $B = B(s)$, L_s является s - проекцией оператора L. Так как$\Delta_s(\lambda) \neq 0$, то $P\varrho L = \emptyset$. Следовательно, оператор $(L_s - \lambda)^{-1}$ существует. Как и ранее устанавливаем, что оператор $(L_s - \lambda)^{-1}$ определён на множестве элементов, всюду плотном в H. Таким образом, остаточный спектр оператора L- пустое множество в силу произвольности числа λ, то есть $R\varrho L = \emptyset$.

Пусть последовательность $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$такова, что $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}B(s_n) = \infty$.

Положим $u_n = u_n(t) = (L_{s_n} - \lambda)^{-1}e^{\lambda t}e_1$. Тогда

$$u_n^1 = u_n^1(t) = e^{\lambda t}\frac{\sin(Bt)}{B}.$$

Так как $\lim_{n\to\infty}\|u_n^1\|_{H_t} = \infty$, то $\lim_{n\to\infty}\|u_n\|_{H_t} = \infty$. Далее имеем

$$\|(L-\lambda)^{-1}\| \geq \frac{\left\|(L-\lambda)^{-1}e^{\lambda t}\varphi_1^{s_n}\right\|_H}{\left\|e^{\lambda t}\varphi_1^{s_n}\right\|_H} \geq -\frac{C_1}{C_2}\frac{\|u_n\|_{H_t}{}^2}{\|e^{\lambda t}\|_{H_t}}.$$

В силу сделанного ранее допущения получаем включение $\lambda \in C\varrho L$.

Если $\sup_s|\mathrm{Im}B(s_n)| < \infty$, то для элементов $G_s{}^{i,j}(t,\tau,\lambda)$ матрицы Грина $G_s(t,\tau,\lambda)$ имеем $\sup_s\left\|G_s{}^{i,j}\right\|_{\mathcal{L}_2(W_t)} < \infty$. Воспользовавшись теоремой 1.3, получаем включение $\lambda \in \varrho L$. Так как λ - произвольное комплексное число, то первая часть теоремы доказана полностью.

Обозначим теперь через $L: H \to H$ дифференциальный оператор, сопоставляемый задаче (2.5)-(2.6) в силу определения 2.1. Доказательство оставшегося проводится как и выше; матрица Грина оператора $L_s - \lambda$ представима в виде:

$$G_s(t,\tau,\lambda) = \begin{cases} A(t,\tau,\lambda), \text{если } 0 \leq \tau \leq t \leq T; \\ 0, \text{если } 0 \leq t \leq \tau \leq T. \end{cases}$$

Здесь

$$A(t,\tau,\lambda) = \begin{pmatrix} \cos\big(b(t-\tau)\big) - \dfrac{\lambda\sin\big(b(t-\tau)\big)}{b} & \dfrac{\sin\big(b(t-\tau)\big)}{b} \\ -\dfrac{\sin\big(b(t-\tau)\big)}{b} & \cos\big(b(t-\tau)\big) + \dfrac{\lambda\sin\big(b(t-\tau)\big)}{b} \end{pmatrix},$$

0-нулевая матрица; $b = \sqrt{B^2-\lambda^2}$, $B = B(s)$, L_s является s - проекцией оператора L. ■

Примеры

Приведем примеры, которые попадают в поле классических систем дифференциальных уравнений в частных производных.

Пример 2.1. Для систем (2.1) и (2.2), в которых оператор B, порождённый операцией $B(D_x) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{|\alpha|=2k-1} b_\alpha {D_x}^\alpha$, $b_\alpha \in R$,является оператором, задача Коши корректна, точнее $-\varrho L = \mathbb{C}$. С другой стороны, для M - эллиптического дифференциального оператора B задача Коши для систем (2.1) и (2.2) не корректна: $C\varrho L = \mathbb{C}$; в этом случае корректна задача Дирихле.

Пример 2.2. Для систем (2.4) и (2.5), в которых оператор B, порождённый операцией $B(D_x) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{|\alpha|=2k-1} b_\alpha {D_x}^\alpha$, $b_\alpha \in R$, является П - оператором, задача Коши не корректна, точнее - $C\varrho L = \mathbb{C}$. С другой стороны, для M - эллиптического дифференциального оператора B задача Коши для систем (2.4) и (2.5) корректна и более того: $\varrho L = \mathbb{C}$.

Список литературы

1. Il'in, V. A., & Kuleshov, A. A. (2012). On some properties of generalized solutions of the wave equation in the classes L p and W p 1 for p ≥ 1. *Differential Equations*. V. 48(11). Pp. 1470-1476. DOI:10.1134/s0012266112110043
2. Makin, A. S. (2016). On the absence of the basis property for the root function system of the Sturm–Liouville operator with degenerate boundary conditions. *Doklady Mathematics*. V. 93(2).Pp. 220-222. DOI:10.1134/s1064562416020290
3. Mikhailov, V. P. (2012). Existence of boundary values of solutions of elliptic equations in a strip. *Sbornik: Mathematics*. V. 203(1). Pp. 60-74. DOI:10.1070/sm2012v203n01abeh004213

4. Moiseev, E. I., Korzyuk, V. I., & Kozlovskaya, I. S. (2014). Classical solution of a problem with an integral condition for the one-dimensional wave equation. *Differential Equations*. V.50(10). Pp. 1364-1377. DOI:10.1134/s0012266114100103
5. Kornienko, D. V. (2006). On a spectral problem for two hyperbolic systems. *Differential Equations*. V. 42(1). Pp. 101-111. DOI:10.1134/s0012266106010083
6. Soldatov, A.P. (2016). On the spectral radius of functional operators. *Math. Notes*. V. 100:1. Pp. 132-138. DOI: 10.1134/S0001434616070129

SPECTRAL PROPERTIES OF A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR LINEAR SYSTEMS OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

D.V. Kornienko
Candidate of physical and mathematical Sciences
dmkornienko@mail.ru
Yelets

Bunin Yelets State University

Abstract. The article is devoted to the actual problems of the theory of systems of linear partial differential equations, namely the study of the spectrum and basic properties of systems of eigenvector functions of the operator comparable to the boundary value problem. The paper deals with the Cauchy problem for two classes of systems of linear partial differential equations. The study of the solvability properties of these problems was reduced to the study of the spectral characteristics of the operator compared to it, thanks to the introduction of a generalized solution. The research was based on methods that are called functional, and the solvability properties are described in terms of the spectral theory of linear operators. Such methods were developed and widely used in their research K. Friedrichs, L. HErmander, S. L. Sobolev, A. A. desin, V. A. Ilyin, V. K. Romanko, E. I. Moiseev, A. p. Soldatov. It is well known that the most frequently studied questions in the theory of boundary value problems for differential equations are those related to the solvability of boundary value problems and the differential properties of solutions to such problems. The study of spectral problems for differential equations is more difficult. The theory of spectral problems for ordinary differential equations and for partial differential equations of elliptic type is developed quite fully. For differential equations of other types and for equations that do not belong to the classical types, the theory of spectral problems is in its infancy. From this point of view, this article is very relevant.

Keywords: Boundary Problems, Spectrum of an Operator, Spectral Properties, Systems of Partial Differential Equations, Riesz Basis, Cauchy Conditions, Basis.

References

1. Il'in, V. A., & Kuleshov, A. A. (2012). On some properties of generalized solutions of the wave equation in the classes L p and W p 1 for p ≥ 1. *Differential Equations*. V. 48(11). Pp. 1470-1476. DOI:10.1134/s0012266112110043
2. Makin, A. S. (2016). On the absence of the basis property for the root function system of the Sturm–Liouville operator with degenerate boundary conditions. *Doklady Mathematics*. V. 93(2).Pp. 220-222. DOI:10.1134/s1064562416020290
3. Mikhailov, V. P. (2012). Existence of boundary values of solutions of elliptic equations in a strip. *Sbornik: Mathematics*. V. 203(1). Pp. 60-74.

DOI:10.1070/sm2012v203n01abeh004213
4. Moiseev, E. I., Korzyuk, V. I., & Kozlovskaya, I. S. (2014). Classical solution of a problem with an integral condition for the one-dimensional wave equation. *Differential Equations*. V.50(10). Pp. 1364-1377. DOI:10.1134/s0012266114100103
5. Kornienko, D. V. (2006). On a spectral problem for two hyperbolic systems. *Differential Equations*. V. 42(1). Pp. 101-111. DOI:10.1134/s0012266106010083
6. Soldatov, A.P. (2016). On the spectral radius of functional operators. *Math. Notes*. V. 100:1. Pp. 132-138. DOI: 10.1134/S0001434616070129

УДК 519.711.2

ПРИМЕНЕНИЕ КОГНИТИВНОГО ПОДХОДА К ИССЛЕДОВАНИЮ СИСТЕМ С НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ

Елена Викторовна Игонина
к.ф.-м.н., доцент
elenaigonina7@mail.ru
г. Елец

Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина

Аннотация. В статье рассмотрено применение когнитивного подхода для исследования управляемых динамических системс неполной информацией. Введены основные определения: когнитивное моделирование, когнитивная модель (карта), базисные факторы, взвешенный граф. Перечислены основные типы когнитивных карт, определены разновидностии этапы построения обобщенной нечеткой когнитивной карты. Обозначены некоторыенаправления дальнейшего развития когнитивного подхода для моделирования системс неполной информацией. Рассмотрено применение компьютерных систем для создания обобщенных нечетких когнитивных моделейс учетом их особенностей. Дано краткое описание прикладного пакета FuzzyLogicToolbox компьютерной среды Matlab, используемого для моделирования изучаемых систем в настоящей работе. Приведено поэтапное построение когнитивной модели в пакете FuzzyLogicToolbox управляемой маятниковой системы на основе знаний экспертово поведении объекта управления. С помощью прикладного пакета для каждой переменной определены (с учетом их терм-характеристик) значения функций принадлежности, которые варьируются в пределах отрезка [0; 1] – процедура введения нечеткости (фазификация); выбран треугольный тип функций принадлежности; использован логический вывод Мамдани; для преобразования нечеткого набора выводов в четкое число (процедура дефаззификации) использован центроидный метод. Компьютерная система тестирования позволила получить конкретные числовые значения, как для входящих переменных, так и для переменной выхода. Показано, что рассмотренный в настоящей работе когнитивный подход к исследованию системс неполной информацией позволяет реализовать эффективное управление без использования и знания точной математической модели процесса.

Ключевые слова: управляемые системы, системы с неполной информацией, когнитивное моделирование, нечеткое моделирование.

В последнее время в России и за рубежом наметилась тенденция активного применения когнитивного подхода для исследования и моделирования сложных управляемых систем, в частности, систем с неполной информацией (СНИ). СНИ встречаются в случаях, когда объект управления (или процесс) достаточно сложен для получения его точного математического описания ввиду многообразия задействованных физических