zadach upravleniya slabostrukturirovannymisi stemami (situaciyami)]. *Managing large systems: proceedings*. V. 16. Pp. 26–39.
3. Borisov,V.V., Fedulov,A.S. (2018). Fuzzy cognitive analysis and modeling of weakly formalized problems [*Nechetkij kognitivnyj analizi modelirovanie slaboformalizuemyh problem*].*Proceedings of the XIX International scientific conference dedicated to the 100th anniversary of the faculty of physics and mathematics of Smolensk state University "Systems of computer mathematics and their applications»*.V. 19. Pp. 113–117.
4. Lucenko, E.V., Serga, G.V. (2016). Information theory and cognitive technologies in modeling of complex multiparameter dynamic technical systems [*Teoriya informacii i kognitivnye tekhnologii v modelirovanii slozhnyh mnogoparametricheskih dinamicheskih tekhnicheskih system*]. *The scientific journal of the Kuban state agrarian University*. V. 121(07). Pp.68–115.
5. Malineckij, G.G. (2010). Cognitive challenge and information technology [*Kognitivnyj vyzov i informacionnye tekhnologii*].*The Preprint IPM im. M. V. Keldysh*.V. 46. 28 p.
6. Kulinich, A.A. (2013). Computer systems for modeling Cognitive maps: approaches and methods [*Komp'yuternye sistemy modelirovaniya Kognitivnyh kart: podhody i metody*].*Management problem*. V.3. Pp.2–16.
7. Zadeh, L. (1965). Fuzzy Sets [Fuzzy Sets].*Information and Control*. V. 8(3). Pp.338–353.
8. Kosko, B. (1986). [*Fuzzy Cognitive Maps*]. *International Journal of Man-Machine Studies*. V. 24. Pp. 65–75.
9. Fedulov, A. S., Borisov, V. V.(2016).Models of system dynamics based on fuzzy relational cognitive maps [*Modeli sistemnoj dinamiki na osnove nechetkih relyacionnyh kognitivnyh kart*].*Control, communication and security systems.*V. 1. Pp.66–80.
10. Masina, O.N., Druzhinina, O.V. (2011). Modeling and stability analysis of some classes of control systems. [*Modelirovanie i analiz ustojchivosti nekotoryh klassov sistem upravleniya*].Moscow. 164 p.
11. Mihalev,A.I., Novikova,E.Yu. (2006). Fuzzy-cognitive approach to the problem of FE SI smelting process control [*Nechetko-kognitivnyj podhod v zadache upravleniya processov vyplavki FESI*].*ASAU***.**V.9(29). P. 133–139.
12. Shtovba, S.D. (2007).Design of fuzzy systems by means of MATLAB [*Proektirovanienechetkihsystemsredstvami MATLAB*]. *Moscow.*
13. Rotshtejn,A.P., Katel'nikov,D.I. (1998). Identification of nonlinear objects by fuzzy knowledge bases [*Identifikaciyanelinejnyhob"ektovnechetkimibazamiznanij*]. Cybernetics and systems analysis. V.5. Pp. 53–61.
14. Igonina, E.V. (2014). Stability study and computer simulation of the pendulum control system [*Issledovanieustojchivostiikomp'yuternoemodelirovaniemayatnikovojsistemyupravleniya*]. Materials of the I school-seminar of young scientists "Fundamental problems of system security". Bunin Yelets State University. Pp. 93–99..

УДК 517.9, 519.6

ПОСТРОЕНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ МОДЕЛЕЙ ДИНАМИКИ ВЗАИМОСВЯЗАННЫХ СООБЩЕСТВ

Тарова Екатерина Дмитриевна
katerina.tarova@yandex.ru
г. Елец
Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина

Аннотация. Работа посвящена исследованию устойчивости многомерных математических моделей популяционной динамики. Рассмотрены вопросы синтеза и анализа многомерных моделей динамики численности взаимосвязанных сообществ.

Построена обобщенная многомерная динамическая модель с учетом различных типов взаимодействий фазовых переменных. Предложены условия устойчивости на основе принципа редукции задачи об устойчивости решений дифференциальных включений к задаче об устойчивости решений других типов уравнений. Указанный принцип предполагает переход от векторных обыкновенных дифференциальных уравнений к векторному дифференциальному включению и нечёткому дифференциальному уравнению, с учётом изменения параметров того или иного типа в исследуемых моделях. Для трехмерной модели, являющейся частным случаем многомерной модели, проведена оценка модельных параметров и построены фазовые портреты. Найдены стационарные состояния, проведены серии компьютерных экспериментов и исследована устойчивость указанной модели с помощью инструментального программного обеспечения, символьных вычислений и численных методов. Рассмотренный подход может найти применение в задачах исследования нелинейных моделей с различными типами взаимодействия.

Ключевые слова: динамическая модель, популяционная динамика, символьные вычисления, устойчивость, фазовый портрет, принцип редукции.

При построении динамических моделей высокой размерности в ходе аналитического исследования могут возникать существенные трудности. Компьютерное моделирование позволяет не только получить результаты численных экспериментов в рамках анализа стационарных состояний, поиска траекторий решений и оценки модельных параметров, но и выявить эффекты, обусловленные структурой модели. В настоящее время актуальными являются задачи построения динамических моделей высокой размерности и выявление качественных эффектов в результате аналитического и численного исследования таких моделей. Вопросы качественного исследования различных моделей популяционной динамикирассматривались в [1–9] и в других работах.В [3, 7]проведено исследование устойчивости классических и обобщенных моделей Лотки–Вольтерра с помощью метода функций Ляпунова. В [6] описан системный подход к исследованию устойчивости математических моделей, позволяющий с единой точки зрения рассматривать свойства устойчивости решений дифференциальных включений, нечетких и стохастических дифференциальных уравнений.

В настоящей статье проведено компьютерное моделирование трехмерной модели динамики численности взаимосвязанных сообществ с учетом конкуренции. Построены фазовые портреты системы. На основе проведения серии компьютерных экспериментов проанализирована динамика популяций при различных начальных условиях.Кроме того, проведена линеаризация системы в окрестности стационарных состояний и исследована устойчивость по первому приближению. Построена многомерная модель динамики численности взаимосвязанных сообществ и получены условия устойчивости на основе принципа редукции.

Рассмотрим нелинейную модель динамики численности взаимосвязанных сообществ, учитывающую конкуренцию жертв, описываемую системой обыкновенных дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1(\alpha_1 - \beta_1 x_1 - \kappa x_2 - \gamma_1 x_3), \\ \dot{x}_2 &= x_2(\alpha_2 - \kappa x_1 - \beta_2 x_2 - \gamma_2 x_3), \\ \dot{x}_3 &= x_3(-c + d_1 x_1 + d_2 x_2), \end{aligned} \qquad (1)$$

где x_1, x_2 – плотность популяций жертв, x_3 – плотность популяции хищника, $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \kappa$, $\gamma_1, \gamma_2, d_1, d_2, c$ – положительные параметры.

В результате решения соответствующих алгебраических уравнений для модели (1) получены семь стационарных состояний:

$$P_1(0,0,0),\ P_2\left(\frac{\alpha_1}{\beta_1},0,0\right),\ P_3\left(0,\frac{\alpha_2}{\beta_2},0\right),\ P_4\left(\frac{\varepsilon_5}{\varepsilon_3},\frac{\varepsilon_4}{\varepsilon_3},0\right),\ P_5\left(\frac{c}{d_1},0,\frac{d_1\alpha_1-c\beta_1}{d_1\gamma_1}\right),\ P_6\left(0,\frac{c}{d_2},\frac{d_2\alpha_2-c\beta_2}{d_2\gamma_2}\right),$$

$$P_7\left(\frac{d_2\varepsilon_6+c\varepsilon_1}{d_1\varepsilon_1+d_2\varepsilon_2},\frac{c\varepsilon_2-d_1\varepsilon_6}{d_1\varepsilon_1+d_2\varepsilon_2},\frac{d_1\varepsilon_5+d_2\varepsilon_4-c\varepsilon_3}{d_1\varepsilon_1+d_2\varepsilon_2}\right),$$

где

$\kappa\gamma_2-\beta_2\gamma_1=\varepsilon_1,\ \kappa\gamma_1-\beta_1\gamma_2=\varepsilon_2,\ \kappa^2-\beta_1\beta_2=\varepsilon_3,\ \kappa\alpha_1-\alpha_2\beta_1=\varepsilon_4,\kappa\alpha_2-\alpha_1\beta_2=\varepsilon_5,\alpha_2\gamma_1-\alpha_1\gamma_2=\varepsilon_6$.

Найдены условия существования неотрицательных стационарных состояний:

$$\alpha_1>0,\ \alpha_2>0,\ \beta_1>0,\ 0<\beta_2<\frac{\alpha_2^2\beta_1}{\alpha_1^2},\ 0<\kappa<\frac{\alpha_1\beta_2}{\alpha_2},\ \gamma_1>0,\ 0<\gamma_2<\frac{\alpha_2\gamma_1}{\alpha_1},\ c>0,$$

$$d_1\geq\frac{c\beta_1}{\alpha_1},\ \frac{c\beta_2}{\alpha_2}\leq d_2\leq\frac{c\kappa\gamma_2-c\beta_2\gamma_1}{\alpha_1\gamma_2-\alpha_2\gamma_1}.$$

Для численного эксперимента были выбраны следующие наборы параметров: начальные значения $x_1(0)=1,\ x_2(0)=2,\ x_3(0)=0.5$, значения параметров $\alpha_1=3,\ \alpha_2=2.7,\ \beta_1=0.9,$ $\beta_2=0.8,\ \kappa=0.5,\ \gamma_1=1.5,\ \gamma_2=1.4,\ c=2,\ d_1=1.7,\ d_2=1.2$.

На рис. 1 представлены траектории решений модели (1) при указанных начальных значениях и значениях параметров на временном интервале [0,10].

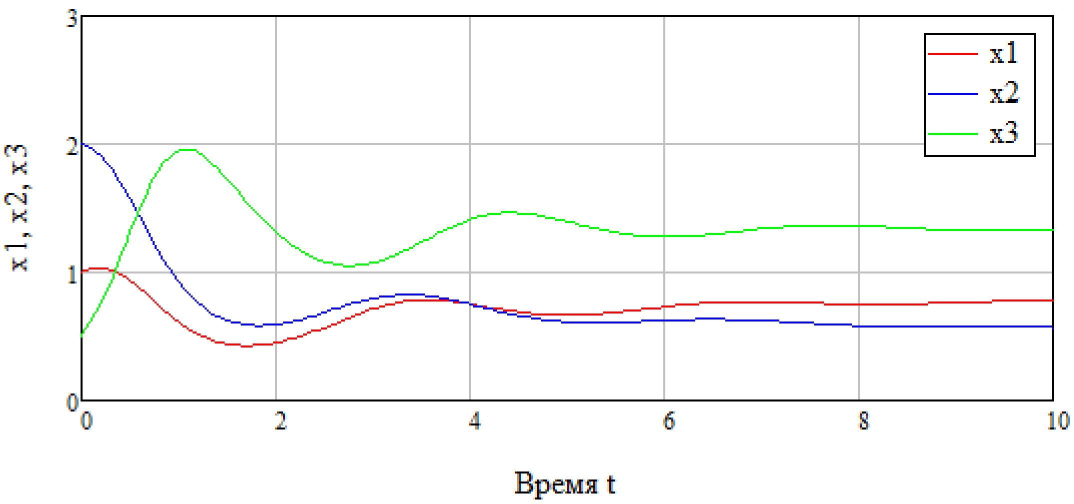
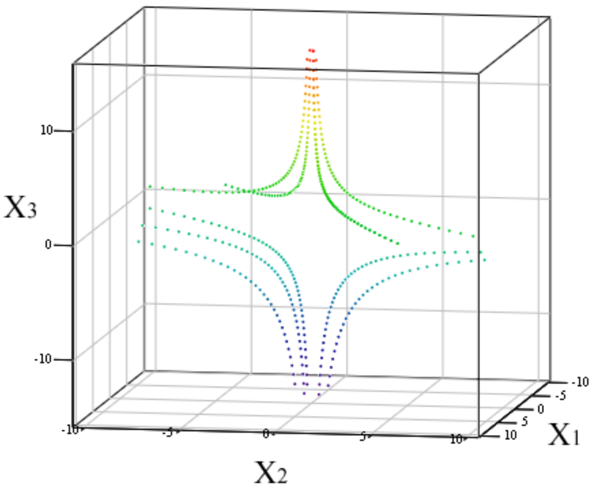


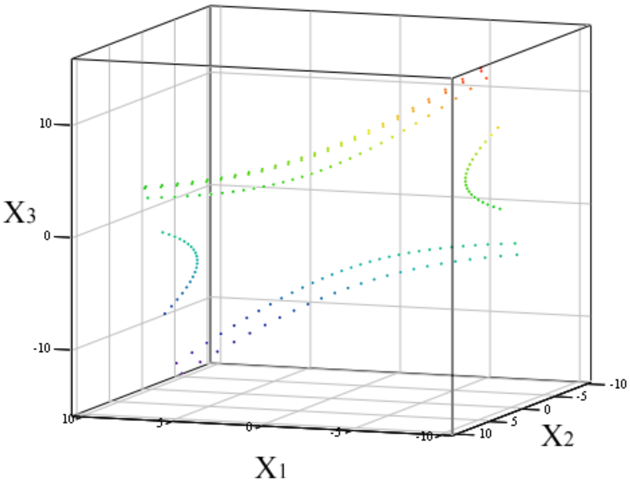
Рис. 1. График траекторий решений модели (1) при начальном условии

$$x_1,x_2,x_3=1,\ 2,\ 0.5$$

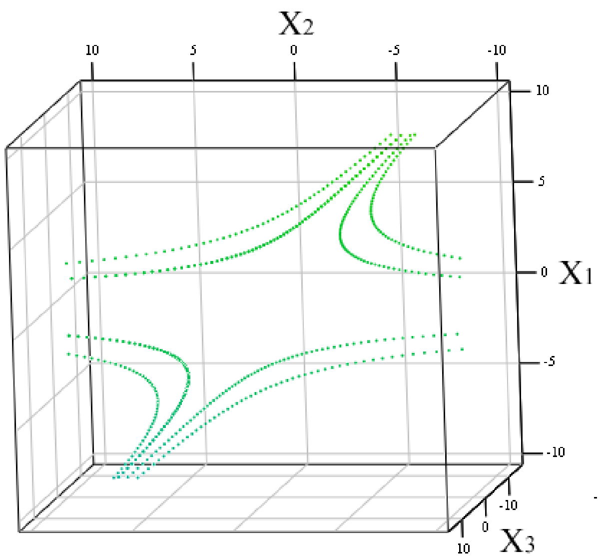
Кроме того, проведена линеаризация системы (1) в окрестности стационарных состояний и исследована устойчивость по первому приближению. Трехмерные фазовые портретымодели (1) в окрестностях стационарных состояний P_1 – P_7 представлены соответственно на рис. 2, а) – ж).



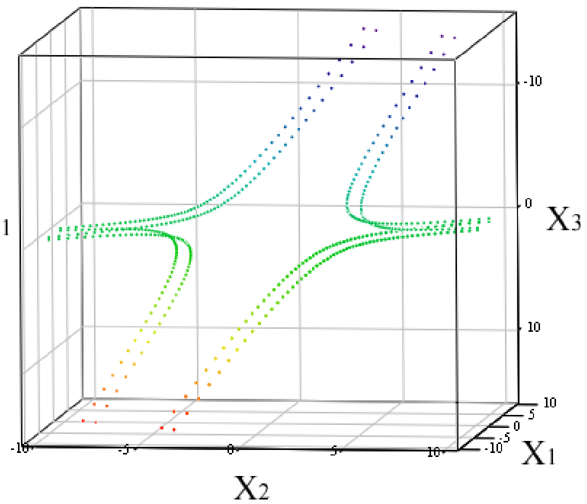
а) P_1



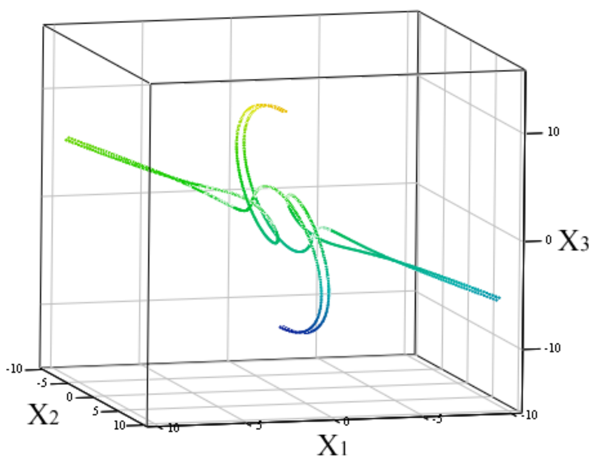
б) P_2



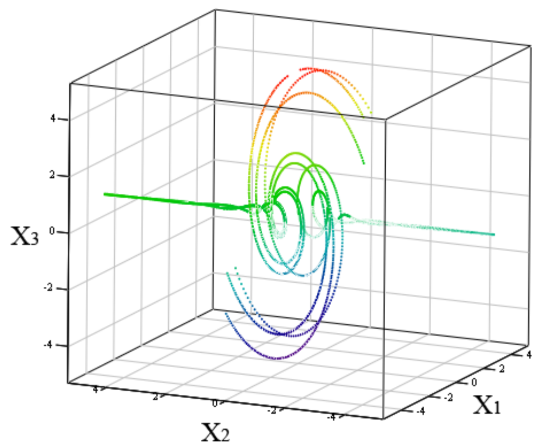
в) P_3



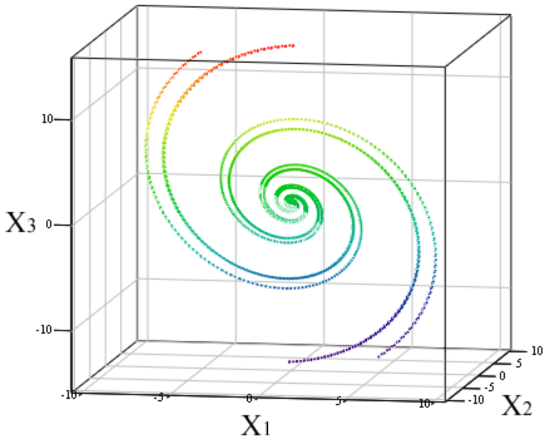
г) P_4



д) P_5



е) P_6



ж) P_7

Рис. 2. Фазовые портреты в окрестностях стационарных

состояний $P_1 - P_7$ модели (1)

Фазовые портреты, соответствующие стационарным состояниям P_1, P_2, P_3, P_4, являются седлом. Точки P_5, P_6– седло-фокусы, точка P_7 – асимптотически устойчивый узло-фокус.

На основании результатов исследования можно заключить, что неотрицательные стационарные состояния $P_i, i = 1,\ldots,6$ при заданных начальных условиях являются неустойчивыми, а положительное состояние равновесия P_7 – асимптотически устойчивым по первому приближению. Таким образом, показано, что устойчивость модели имеет место при наличии всех трех популяций, а отсутствие одного из видов приводит к неустойчивости.

От трехмерной математической модели (1) выполним переход к построениюобобщенной многомерной модели вида:

$$\dot{x}_i = x_i(\alpha_i - \sum_{j=1}^{n} p_{ij}x_j - \gamma_i y),\ \ i = 1,\ldots,n,$$
$$\dot{y} = y(-c + \sum_{j=1}^{n} d_j x_j), \tag{2}$$

где $n \in N$, N – множество натуральных чисел. Модель (1) является частным случаем модели (2) в предположении, что коэффициенты межвидовой конкуренции в популяциях жертв совпадают ($p_{12} = p_{21} = \kappa$).Модель (2) может быть использована при описании динамики численности видового сообщества, которое обеспечено разнообразием взаимодействующих видов нижнего трофического уровня.

Модель (2) представим в векторной форме:

$$dx / dt = f(x), \tag{3}$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $f(x) = (f_1, f_2, \ldots, f_n) = (x_1(\alpha_1 - p_{11}x_1 - \ldots - p_{1q}x_q - \gamma_1 x_n), \ldots, x_q(\alpha_q -$ $- p_{q1}x_1 - \ldots - p_{qq}x_q - \gamma_q x_n), y_n(-c + d_{11}x_1 + \ldots + d_{1q}x_q))$, $q = n-1$, $x \in R_+^n$, $R_+ = [0, \infty)$, $f : R_+^n \to R_+^n$, R_+^n – n-кратное декартово произведение множества R_+ на себя.

Коэффициенты $\alpha_q, p_{iq}, \gamma_q, d_{iq}$ модели (3) могут, с учетом экологического смысла, принимать различные значения из соответствующих интервалов

$[\alpha_{q_1}, \alpha_{q_2}], [p_{i_1q}, p_{i_2q}], [\gamma_{q_1}, \gamma_{q_2}], [d_{i_1q}, d_{i_2q}]$. Для модели (3) построим конечномерное дифференциальное включение следующего вида:

$$\dot{x}_1 \in x_1(\alpha_1 - p_{11}x_1 - \ldots - p_{1q}x_q - \gamma_1 x_q), \ldots, \dot{x}_q \in x_q(\alpha_q - p_{q1}x_1 - \ldots - p_{qq}x_q - \gamma_q x_q),$$
$$\dot{x}_n \in x_n(-c + d_{11}x_1 + \ldots + d_{1q}x_q)). \tag{4}$$

Перепишем модель (4) в векторной форме:

$$dx / dt \in F(x), \tag{5}$$

где $F(x) = \{f(x) \big| \alpha_q \in A_q, p_{iq} \in P_{iq}, \gamma_q \in G_q, d_{iq} \in D_{iq}\}$, $A_q ::= [\alpha_{q_1}, \alpha_{q_2}], P_{iq} ::= [p_{i_1q}, p_{i_2q}], G_q ::=$ $= [\gamma_{q_1}, \gamma_{q_2}], D_{iq} ::= [d_{i_1q}, d_{i_2q}], F: R_+^n \to 2^{R_+^n}$. Введенные множества A_q, P_{iq}, G_q, D_{iq} определяют множества значений соответствующих параметров $\alpha_q, p_{iq}, \gamma_q, d_{iq}$.

Подмножества

$$\{A_q\}_\alpha = \{\alpha_q \big| \mu_{A_q}(\alpha_q) \ge \alpha\}, \{P_{iq}\}_\alpha = \{p_{iq} \big| \mu_{P_{iq}}(p_{iq}) \ge \alpha\}, \{G_q\}_\alpha = \{\gamma_q \big| \mu_{G_q}(\gamma_q) \ge \alpha\},$$
$$\{D_{iq}\}_\alpha = \{d_{iq} \big| \mu_{D_{iq}}(d_{iq}) \ge \alpha\} \tag{6}$$

представляют собой более узкие множества, которые были получены при учете дополнительного условия $\alpha \in (0,1]$, влияющего на взаимодействие компонент, а следовательно, и на устойчивость модели (3).

С учетом подмножеств (6), векторное уравнение (3) можно заменить на нечеткое конечномерное дифференциальное уравнение вида:

$$dX / dt = F(\mathrm{X}), \tag{7}$$

где $F: Z_+^n \to P(R_+^n), P(R_+^n)$ – совокупность всех нечетких подмножеств из R_+^n.

Соответствующее уравнению (7) дифференциальное включение имеет вид: $d\phi / dt \in F_\alpha(\phi)$, где $\alpha \in (0,1]$, $F_\alpha(\phi) = \left\{f(\phi(t)) \big| \alpha_q \in \{A_q\}_\alpha, p_{iq} \in \{P_{iq}\}_\alpha, \gamma_q \in \{G_q\}_\alpha, d_{iq} \in \{D_{iq}\}\right\}$.

На основе принципа сведения задачи об устойчивости дифференциального включения к задаче об устойчивости нечеткого дифференциального уравнения и с учетом (2)–(5) получены следующие условия устойчивости дифференциального включения (5) и нечеткого уравнения (7): 1) если для замкнутого множества $M \subset R_+^n$ существует функция Ляпунова V относительно дифференциального включения(5), для которой верно неравенство $D_+V(x) \le 0$ $\forall x \in B(M, r)$, где $D_+V(x) = \sup DV(x)$ – верхняяпроизводная функции Ляпунова, а множество $B(M, r)$ – r-окрестность множества M, то множество M устойчиво относительно этого включения; 2) если верно неравенство $D_+V(x) \le -w(e(x, M))\ \forall x \in B(M, r)$, где функция $w: B(M, r) \to R$ непрерывна и положительна вне M, то множество M асимптотически устойчиво относительно включения (5); 3) если для замкнутого нечеткого множества $M \subset P(R_+^n)$ существует функция Ляпунова V относительно уравнения (7), для которой при $\alpha \in (0,1]$ верно неравенство $D_+V_\alpha(x) \le 0\ \forall x \in B(M_\alpha, r)$, то множество$M$α-устойчиво относительно этого уравнения; 4) если выполняется условие $D_+V_\alpha(x) \le -w_\alpha(e(x, M_\alpha))\ \forall x \in B(M_\alpha, r)$, где функция $w_\alpha : (0, r) \to R$ непрерывна и положительна, то множество M α-асимптотически устойчиво относительно уравнения (7).

Полученные результаты могут быть использованы для дальнейшего развития методов построения и анализа устойчивости математических моделей популяционной динамики, в частности, в направлении развития результатов [6, 8].

Список литературы

1. Demidova A.V., Druzhinina O.V., Jacimovic M, Masina O.N., Mijajlovic N. Synthesis and analysis of multidimensional mathematical models of population dynamics // Proceedings of the Selected Papers of the 10th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems ICUMT (Moscow, Russia, November 5–9, 2018). New York: IEEE Xplore Digital Library. IEEE Catalog Number CFP 1863G-USB. P. 361–366.
2. Lotka A. Elements of physical ecology. Baltimora: Williams and Wilkins, 1925.
3. Базыкин А.Д. Нелинейная динамика взаимодействующих популяций. Москва–Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2003.
4. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. М.: Наука, 1976.
5. Александров А.Ю., Платонов А.В., Старков В.Н., Степенко Н.А. Математическое моделирование и исследование устойчивости биологических сообществ. СПб.: «Лань», 2017.
6. ДружининаО.В., МасинаО.Н. Методы исследования устойчивости и управляемости нечетких и стохастических динамических систем. М.: ВЦ РАН, 2009.
7. ПыхЮ.А. Равновесиеиустойчивостьвмоделяхпопуляционнойдинамики. М.: Наука, 1983.
8. Тарова Е.Д.Качественное исследование четырехмерной модели популяционной динамики с помощью первого метода Ляпунова // Нелинейный мир. 2018. № 3. С. 17–24.
9. Свирежев Ю.М., Логофет Д.О. Устойчивость биологических сообществ. М.: Наука, 1978.

RESEARCH OF THE STABILITY OF MULTIDIMENSIONAL MATHEMATICAL MODELS OF POPULATION DYNAMICS

E.D. Tarova
katerina.tarova@yandex.ru
Elets

Bunin Yelets State University

Abstract. The work is devoted to the research of the stability of multidimensional mathematical models of population dynamics. The problems of synthesis and analysis of multidimensional models of the dynamics of the number of interconnected communities are considered. A generalized multidimensional dynamic model is constructed taking into account various types of interactions of phase variables. Stability conditions are proposed based on the reduction principle of the problem of the stability of solutions of differential inclusions to the problem of the stability of solutions of other types of equations. This principle implies a transition from vector ordinary differential equations to vector differential inclusion and a fuzzy differential equation, taking into account changes in the parameters of a particular type in the models under study. For a three-dimensional model, which is a special case of a multidimensional model, model parameters have been estimated and phase portraits have been constructed. Stationary states were found, a series of computer experiments were carried out, and the stability of this model was investigated using tool software, symbolic calculations and numerical methods. The considered approach may find application in the study of nonlinear models with different types of interaction.

Keywords: dynamic model, population dynamics, symbolic calculations, stability, phase portrait, principle of reduction.

References

1. Demidova A.V., Druzhinina O.V., Jacimovic M, Masina O.N., Mijajlovic N. (2018). Synthesis and analysis of multidimensional mathematical models of population dynamics.*Proceedings of the Selected Papers of the 10th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems ICUMT* (Moscow, Russia, November 5–9, 2018). New York: IEEE Xplore Digital Library. IEEE Catalog Number CFP 1863G-USB. Pp. 361–366.
2. Lotka A. (1925).Elements of physical ecology. Baltimora: Williams and Wilkins.
3. Bazykin A.D. (2003). Nonlinear dynamics of interacting populations [*Nelinejnaya dinamika vzaimodejstvuyushchih populyacij*]. Moscow - Izhevsk: Institute of Computer Research.
4. Vol'terra V. (1976). The mathematical theory of the struggle for existence [*Matematicheskaya teoriya bor'by za sushchestvovanie*]. Moscow: Science.
5. AlexandrovA.Yu., PlatonovA.V., StarkovV.N., StepenkoN.A. (2017). Mathematical modeling and research of the stability of biological communities [*Matematicheskoe modelirovanie i issledovanie ustojchivosti biologicheskih soobshchestv*]. St. Petersburg: «Doe».
6. Druzhinina O.V., Masina O.N. (2009). Research methods for the stability and controllability of fuzzy and stochastic dynamical systems [*Metody issledovaniya ustojchivosti i upravlyaemosti nechetkih i stohasticheskih dinamicheskih sistem*]. Moscow: CC RAS.
7. Pykh Yu.A. (1983). Equilibrium and stability in models of population dynamics [*Ravnovesie i ustojchivost' v modelyah populyacionnoj dinamiki*]. Moscow: Science.
8. Tarova E.D. (2018). A qualitative study of a four-dimensional model of population dynamics using the first Lyapunov parameter [*Kachestvennoe issledovanie chetyrekhmernoj modeli populyacionnoj dinamiki s pomoshch'yu pervogo metoda Lyapunova*] // Nonlinear World. V. 3. Pp. 17-24.
9. SvirezhevYu.M., LogofetD.O. (1978). Sustainability of biological communities [*Ustojchivost' biologicheskih soobshchestv*]. Moscow: Science.

УДК 004.432

О РАЗРАБОТКЕ СЕРВЕР-ПРИЛОЖЕНИЯ СИСТЕМЫ ЭЛЕКТРОННОЙ КОММУНИКАЦИИ

Дмитрий Игоревич Максимов
старший преподаватель
timonpm@mail.ru
г. Елец

Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина

Аннотация. Современные информационные технологии открывают большие возможности для коммуникации людей. Среди них можно выделить электронную почту, чаты, блоги, социальные сети, месенджеры. Важным звеном данных технологий являются сервер-приложения, обеспечивающие хранение, обработку данных и взаимодействие пользователей. В статье рассматриваются принципы разработки таких приложений. Рассматриваемое приложение может применяться для реализации систем электронной коммуникации пользователей. В качестве языка программирования использован язык PHP.

Ключевые слова: программирование, сервер-приложение, технология клиент-сервер, электронная коммуникация, PHP.

При проектировании системы электронной коммуникации необходимо выделить основные составляющие и выявить взаимосвязи между ними (рис. 1).