УДК 372.851

РАЗВИТИЕ ПОНЯТИЯ ЧИСЛА В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

Анна Валентиновна Пантелеймонова
к.п.н., доцент
avp@mgou.ru
г. Москва
Марина Александровна Белова
старший преподаватель
ma.belova@mgou.ru
г. Москва

Московский государственный областной университет

Аннотация. В статье рассмотрены теоретические и методические основы развития понятия числа в курсе школьном математики. В современной методике обучения математике накоплен большой опыт изучения числа, разработаны различные подходы и методы как к введению чисел, так и к последовательности изучения отдельных вопросов. Несмотря на то, что это один из наиболее проработанных разделов методики обучения математики, остаются проблемы с усвоением учащимися некоторых понятий и идей.
Статья подготовлена по материалам доклада, представленного 12сентября 2019 года на заседании Всероссийского научно-методического семинара «Передовые идеи в преподавании математики в России и за рубежом» в Московском государственном областном университете.

Ключевые слова: понятие числа, натуральные числа, целые числа, рациональные числа, действительные числа.

Понятие числа является одним из фундаментальных понятий школьного курса математики. Оно активно используется при изучении теоретических основ и прикладных методов в школьном курсе информатики. В современной методике обучения математике накоплен большой опыт изучения числа, разработаны различные соответствующие подходы и методы. Перед учителем стоит вопрос, как из большого калейдоскопа идей, обоснований и трактовок понятия числа в курсе математики сложить единую картину.

В современном школьном курсе математики (арифметика, алгебра и начала анализа) выделяют следующие содержательные линии:

- числовая (натуральные, рациональные и действительные числа, степень с действительным показателем, логарифмы чисел, тригонометрические числовые выражения);
- функциональная (прямая и обратная пропорциональность, квадратичная, показательная логарифмическая, степенная и тригонометрические функции, исследование функции с помощью производной, преобразования функций);
- преобразования (выражений целых, рациональных, содержащих степени, логарифмы, тригонометрические функции);
- уравнения и неравенства (линейные и квадратные, рациональные, показательные, логарифмические, иррациональные, тригонометрические уравнения и неравенства);
- стохастическая (элементы комбинаторики, вероятности, статистики).

Развитие указанных линий в процессе обучения тесно взаимосвязано. Числовая линия и линия преобразований развиваются с некоторым опережением по времени по отношению к другим. Формирование понятия числа, умений выполнять действия над числами являются основополагающими при изучении функций уравнений и неравенств и анализе данных. В школьном курсе математики изучаются только числовые функции, уравнения и неравенства решают на множестве заданных чисел, а анализ данных проводят с учетом природы самих данных. Изучение чисел и действий над ними проходит через весь курс математики с первого по одиннадцатый класс. Поэтому, на наш взгляд, линию числа мы заслуженно указали первой.

Изучение понятия числа начинается с натуральных чисел (1-4 класс), затем переходят к дробным и отрицательным числам, рассматривают множество рациональных (5-6 класс) и действительных чисел (7-9 класс). Комплексные числа изучают в классах с углубленным или профильным обучением математике (9-11 класс).

Натуральные числа и нуль изучают в курсе математики начальной школы. Понятие натурального числа и нуля вводится на наглядно интуитивном уровне. Натуральное число рассматривается как неизменное свойство равных множеств. На основе большого числа примеров, иллюстраций и предметных множеств показывают, что число это определенная характеристика или свойство равномощных множеств. Используется так же подход к понятию числа как результата измерения величины: результат измерения отрезка выбранной единицей измерения (мерой).

Обучение построено концентрически. В первом классе рассматривают числа первого десятка и действия сложения и вычитания в пределах десяти, затем переходят к концентру 20 и вводят таблицу сложения и вычитания в пределах двадцати, понятия единиц и десятков в записи числа. Во втором классе изучают числа в пределах концентра 100, расширяют умения учащихся выполнять изученные арифметические действия, вводят таблицу умножения и рассматривают табличные случаи деления. Параллельно учащихся знакомят в каждом концентре с законами сложения и умножения. В концентре 1000 (3 класс) рассматривают разрядные единицы в записи числа, знакомятся с письменным сложением вычитанием и умножением, ведется подготовка к изучению алгоритма письменного деления. В четвертом классе изучают многозначные числа. Здесь формируется понятие десятичной записи числа и алгоритмы письменного выполнения арифметических действий.

В начальной школе осуществляют пропедевтику изучения дробных чисел. Учащихся знакомят с понятием доли и учат выполнять простейшие действия с долями. В некоторых учебниках (И.И. Аргинская) вводится понятие отрицательного целого числа.

В курсе математики 5-6 класса обобщается и систематизируется понятие натурального числа, вводятся дробные числа и отрицательные числа.

В 5 классе проводится систематизация и расширение сведений о натуральном числе, полученных в начальной школе: чтение и запись больших многозначных чисел, сравнение и округление их, изображение чисел на координатной прямой, алгоритмы письменных вычислений.

Учащиеся знакомятся со свойством натурального ряда чисел: каждому натуральному числу может быть поставлена в соответствие единственная точка числовой прямой. Обратное положение не верно, т.е. не каждой точке числовой прямой может быть поставлено в соответствие натуральной число. В дальнейшем при расширении понятия числа это положение покажет необходимость введения новых чисел. Изучение такого свойства натуральных чисел как бесконечность способствует формированию мировоззрения учащихся.

При изучении законов арифметических действий рассматривают их запись с использованием буквенной символики и выполнением действий с нулем и единицей. В 5 классе вводят новое понятие степень числа – это первое знакомство со степенями [1]. Изучение свойств арифметических действий должно продемонстрировать возможность их применения для преобразования числовых выражений. Новым на этом этапе является введение обобщенных свойств, которые сформулированы в виде правил преобразования суммы и произведения.

В содержание темы «Делимость чисел» традиционно входят вопросы: делители и кратные, простые и составные числа, делимость суммы и произведения, признаки делимости, деление с остатком. Изучение разложения числа на множители, наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного позволяет в дальнейшем облегчить работу по преобразованию обыкновенных дробей.

Далее в 5 и 6 классе изучают обыкновенные и десятичные дроби. Исторически появление дробных чисел предшествовало появлению отрицательных. В практической жизни и деятельности учащиеся значительно раньше встречаются с дробными числами, чем с отрицательными. Этот факт учитывается при разработке программ и планов изучения чисел в 5-6 классах.

Известны следующие варианты последовательности изучения дробных чисел: 1) сначала изучают обыкновенные дроби, а затем десятичные; 2) сначала изучают десятичные дроби, а затем обыкновенные; 3) знакомятся с понятием дроби, изучают десятичные дроби, а затем обыкновенные.

Первый вариант имел место в советской школе до середины 70-х годов. Второй вариант – в некоторых учебниках арифметики в дореволюционной России. Последний вариант действовал после 70-х годов. В настоящее время в школьных в различных программах реализованы все указанные варианты.

Рассмотрим аргументы «за и против» каждого варианта.

Первый вариант позволяет достаточно просто ввести понятие дроби, изучить свойства дробей и правила выполнения арифметических действий, а затем перейти к изучению частного случая – десятичных дробей (обыкновенных дробей со знаменателем, который является степенью десяти). Недостатком той последовательности изучения считают оторванность натуральных чисел от десятичных дробей по времени изучения, следовательно, большие затраты времени на повторение алгоритмов арифметических действий над натуральными числами и изучение правил действий над десятичными дробями. Но при этом плюсом является, например, простое объяснение количества знаков после запятой у произведения или у частного.

Второй вариант позволяет затратить минимум усилий на изучение техники выполнения арифметических действий, так как алгоритмы действий с десятичными дробями имеют много общего с алгоритмами действий над натуральными числами. Но при этом школьники будут считать, что обыкновенные дроби имеют совершенно другую природу, по сравнению с десятичными дробями, правила выполнения арифметических действий значительно отличаются от правил действий над десятичными дробями. При введении понятия десятичной дроби возникают трудности с представлением у учащихся десятичной или сотой части числа, в то время как вторую или третью часть числа представить гораздо проще. Обучение решению задач на нахождение дроби от числа и числа от дроби начинать при изучении десятичных дробей достаточно сложно, если не опираться на понятие обыкновенной дроби.

В пользу третьего варианта можно выдвинуть следующее:

- запись десятичных дробей является естественным и простейшим продолжением нумерации целых чисел, нумерации «вправо», что обеспечивает доступность для их введения [2];

- десятичные дроби имеют гораздо большую практическую значимость и применение, чем обыкновенные, ибо они органически связаны с метрической системой мер;

- техника операций над десятичными дробями проще, чем над обыкновенными;

- проще обоснование правил сложения и вычитания десятичных дробей, которое может быть дано по аналогии с соответствующими действиями над целыми положительными числами.

Введение отрицательных чисел является следующим шагом расширения числовых множеств. В методической и учебной литературе существует несколько вариантов последовательности расширения:

1) от натуральных чисел к неотрицательным рациональным числам, и далее – к множеству всех рациональных чисел. Этот путь расширения соответствует истории развития понятия числа;

2) от натуральных чисел до неотрицательных рациональных чисел, затем от множества натуральных чисел до множества целых чисел, и далее – до множества рациональных чисел.

Первое расширение здесь соответствует истории возникновения понятия рационального числа, а второе – логике расширения числовых множеств из потребностей математики, а также необходимости обозначения результата вычитания и деления. Расширение обосновывается теоретическими (потребности самой математики – выполнение вычитания в случае, когда уменьшаемое меньше вычитаемого) и практическими (необходимость подсчета прибыли и убытков, использования шкалы температур и др.) причинами. Введение отрицательных чисел не вызывает особых трудностей, так как учащиеся часто встречаются с подобными величинами в жизни. Трудности возникают при изучении действий с отрицательными и положительными числами. Следует отметить, что обоснование действий с отрицательными числами долгое время в науке отсутсвовало. Поэтому особое внимание уделяется освоению правил выполнения действий с отрицательными и положительными числами.

Если следовать второму варианту введения отрицательных чисел, то образуются своеобразные концентры в изучении правил арифметических действий: сначала с отрицательными и положительными целыми числами (первый проход), а затем с отрицательными и положительными дробными числами (второй проход), что обеспечивает более прочное усвоение этих правил, формирование устойчивого навыка применения правил знаков.

Второй вариант введения отрицательных чисел имеет и недостаток – нарушение логики расширения. Так, исходя и необходимости выполнять действия вычитания и деления, рассматривают следующие пути: $N_0 \subset Z \subset R$ или $N \subset R_+ \subset R$. Указанный выше второй вариант изложения материала рассматривает сначала расширение $N \subset R_+$, а затем $N \subset R_+ \subset R$. В этом случае дважды рассматриваются действия с дробями, сначала с положительными, а затем с положительными и отрицательными, и дважды рассматриваются правила знаков при выполнении арифметических действий. Очевидный плюс – прочное усвоение изучаемых вопросов, поскольку этот вариант соответствует возрастным особенностям обучения школьников, с другой стороны, минус – потеря логики изложения вопроса расширения числовых множеств.

Одной из важнейших тем курса математики 6 класса являются приближенные вычисления. На основе правил округления натуральных чисел рассматриваются правила округления рациональных чисел. Вводятся понятия абсолютной и относительной погрешности и правила выполнения арифметических действий с приближенными числами.

В курсе алгебры 7-9 классов продолжается изучение понятия числа. В содержание обучения включены следующие вопросы: алгебраические выражения над множеством рациональных чисел; степень с целым показателем, квадратный корень, обобщение представлений о рациональных числах, иррациональные числа, множество действительных чисел, арифметические операции над действительными числами и их свойства, изучение алгебраических выражений проводится с использованием понятия числа и действий над числами.

Степень числа – это арифметическое действие третьей ступени. Изучение понятий уравнения и неравенства, а так же правил, применяемых при их решении, ведется на основе повторения числовых равенств и неравенств, а также их свойств.

В курсе алгебры существенную роль играет построение системы действительных чисел, в которой важное место отводится приближенным вычислениям. Изучение начинается с введения понятия иррационального числа. При этом чаще всего используют задачу о нахождении длины диагонали квадрата со стороной равной 1.

По теореме Пифагора длина диагонали равна $\sqrt{2}$. Далее показывают методом от противного, что $\sqrt{2}$ не является рациональным числом. Предположим, что $\sqrt{2}$ является рациональным числом, т.е. может быть записан в виде обыкновенной несократимой дроби $\sqrt{2} = m/n$. Тогда $2 = m^2/n^2$, $m^2 = 2n^2$. правая часть последнего равенства делится на 2, значит и левая часть равенства делится на 2, т.е. m – четное число, которое представимо в виде $m = 2k$, где $k \in N$. Таким образом, $(2k)^2 = 2n^2$ или $2k^2 = n^2$. Это означает, что n – четное число, т.е. дробь m/n сократима, а это противоречит условию.

Параллельно с этим вводится понятие иррационального числа при решении уравнения $x_2 - 2 = 0$. И так же показывается, что x не может быть рациональным числом. Для отыскания числа, квадрат которого был бы близок к числу 2, подбирают последовательно цифры – сначала целые, потом десятые, сотые тысячные и т.д. Процесс подбора будет бесконечным, поэтому важно найти приближение с заданной погрешностью.

Далее показывают, что существует множество иррациональных чисел, т. е. чисел, которые представляют собой бесконечные непериодические десятичные дроби. Множество рациональных и иррациональных чисел образуют множество действительных чисел. Для наглядности применяют сопоставление действительных чисел и точек координатной прямой.

Выше изложенное, позволяет заключить, что существует несколько теорий действительного числа (Дедекинда, Вейерштрасса, Кантора). Исторически идеи данных концепций взаимно обогащали друг друга. В школьном курсе математики изложение действительных чисел наиболее близко к теории Вейерштрасса, которая продолжает линию изучения нумерации и измерения величин. Однако как сравнение, так и арифметические действия над действительными числами рассматриваются в большинстве случаев с использованием приближенных вычислений.

Свойства действительных чисел изучаются в неявном виде. Так понятие об упорядоченности множества действительных чисел формируется в процессе изучения сравнения чисел. При изучении взаимно однозначного соответствия множества действительных чисел и множества точек числовой прямой школьников знакомят с понятием непрерывности действительных чисел. О бесконечности множества действительных чисел специально нигде не упоминается. С понятиями полноты и замкнутости множества действительных чисел учащиеся знакомятся в процессе выполнения арифметических действий над рациональными и иррациональными числами. Понятие мощность множества действительных чисел в школьном курсе не рассматривается.

В курсе алгебры и начал анализа в 10-11 классах расширяются знания и умения учащихся по линии числа. Вводятся понятия степени с рациональным и действительным показателем, логарифма числа, синуса, косинуса, тангенса и котангенса. При упрощении значений выражений и вычислении значений функции развиваются умения учащихся выполнять приближенные вычисления.

Изучение комплексных чисел является завершающим этапом расширения понятия числа в школьном курсе математики. До недавнего времени эта тема давалась только в классах с углубленным изучением математики. В ряде современных учебников комплексные числа входят если не в основной, то хотя бы в дополнительный материал для изучения [3].

При введении понятия комплексного числа рассматривают причины их возникновения. В частности, в процессе решения кубических уравнений возникла необходимость извлечения корня из отрицательного числа. Можно так же рассмотреть причины возникновения отрицательных, дробных и иррациональных чисел исходя из потребностей самой математики для обозначения новых чисел (выполнения действий вычитания, деления и извлечения корня из неотрицательного числа), и продолжить этот ряд примеров до извлечения корня из отрицательного числа. Для общеобразовательных целей можно ограничиться изучением арифметической записи комплексного числа его геометрической интерпретации и арифметических действий. В классах с углубленным изучением математики рассматривают тригонометрическую и показательную форму комплексного числа.

Методика преподавания понятия числа имеет большую историю, за которую сформировались различные подходы, как к введению чисел, так и к последовательности изучения отдельных вопросов числовой содержательно-методической линии. Учет проиллюстрированных существующих методических и содержательных особенностей при обучении студентов-педагогов реализации числовой линии в школьном курсе математики, выбор оптимальной методической схемы обучения отдельным множествами чисел, мотивационные аспекты введения новых чисел способствуют формированию профессиональных, общепропрофессиональных и общекультурных компетенций, позволяют увидеть возможности применения получаемых знаний в реальной педагогической деятельности.

Список литературы

1. Андронов И.К. Арифметика натуральных и рациональных чисел. М.: Учпедгиз, 1969.
2. Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика: Учеб. пособие для студентов пед. институтов по физ.-мат.спец./А.Я. Блох, В.В. Гусер, Г.В. Дорофеев и др. Сост. В.И. Мишин. М.: Просвещение, 1987.
3. Шабунин М.И., Прокофьев А.А. Математика. Алгебра. Начала математического анализа. Профильный уровень. Учебник для 10 класса. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2007.
4. Шабунин М.И., Прокофьев А.А., Олейник Т.А., Соколова Т.В. Математика. Алгебра. Начала математического анализа. Профильный уровень. Задачник для 10-11 классов. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2009.

DEVELOPMENT OF THE CONCEPT OF NUMBER IN THE SCHOOL MATHEMATIC COURSE

A.I. Panteleymonova
Ph.D. (Pedagogy), associate professor
avp@mgou.ru
Moscow
M.A. Belova
associate professor
ma.belova@mgou.ru
Moscow

Moscow State Regional University

Abstract. The article discusses the theoretical and methodological foundations of the development of the concept of number in the course of school mathematics. The modern methodology of teaching mathematics has accumulated a lot of experience in studying numbers; various approaches and methods have been developed to both introduce numbers and the sequence of studying individual issues. Despite the fact that this is one of the most elaborated sections of the methodology of teaching mathematics, there remain problems with the assimilation of certain concepts and ideas by students.

The article was prepared on the basis of a report submitted on September 12, 2019 at a meeting of the All-Russian Scientific and Methodological Seminar “Advanced Ideas in the

Teaching of Mathematics in Russia and Abroad" at Moscow State Regional University.

Keywords: the concept of numbers, natural numbers, integers, rational numbers, real numbers.

References

1. Andronov, I.K. (1969). Arithmetic of natural and rational numbers [*Arifmetika natural'nyh i racional'nyh chisel*]. Moscow : Uchpedgiz.
2. Bloch, A.Ya., Guser, V.V., Dorofeev, G.V. et al. (1987). Methods of teaching mathematics in high school [*Metodika prepodavaniya matematiki v srednej shkole*]. Moscow: Education.
3. Shabunin, M.I., Prokofiev, A.A. (2007). Maths. Algebra. The beginning of mathematical analysis. Profile level. Textbook for grade 10 [*Matematika. Algebra. Nachala matematicheskogo analiza. Profil'nyj uroven'. Uchebnik dlya 10 klassa*]. Moscow: Binom. Knowledge Laboratory.
4. Shabunin, M.I., Prokofiev, A.A., Oleinik, T.A., Sokolova, T.V. (2009). Maths. Algebra. The beginning of mathematical analysis. Profile level. Book of problems for grades 10-11. [*Matematika. Algebra. Nachala matematicheskogo analiza. Profil'nyj uroven'. Zadachnik dlya 10-11 klassov*]. Moscow: Binom. Knowledge Laboratory.

УДК 372.851+374

ФОРМИРОВАНИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩИХСЯ В ОБЛАСТИ ПРИЛОЖЕНИЙ МАТЕМАТИКИ ВО ВНЕУРОЧНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Оксана Викторовна Тарасова
д.п.н., профессор
tarasova_orel@mail.ru
г. Орел
Юлия Владимировна Чернобровкина
аспирант
nikeli2009@yandex.ru
г. Орел

Орловский Государственный университет имени И.С. Тургенева

Аннотация. В статье идет речь о значимости исследовательской компетенции, реализации возможности ее формирования во внеурочной деятельности по математике, в процессе использования проектных задач. В статье приведены конкретные задачи, направленные на формирование исследовательской компетенции у обучающихся.

Ключевые слова: исследовательская деятельность, проектная задача, исследовательская компетенция, ФГОС ООО, ФГОС СОО.

В законе «Об образовании РФ» и государственной программе РФ «Развитие образования», в действующих ФГОС основного общего образования и среднего общего образования особое внимание уделяется формированию исследовательской компетенции в процессе обучения.

Исследовательская компетенция предполагает наличие у учащихся способности формулировать проблему, ставить и решать исследовательские задачи; осуществлять