ПРИКЛАДНЫЕ АСПЕКТЫ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

УДК 517.956.6

ЗАДАЧА ТРИКОМИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРО-ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННО-СОСТАВНОГО ТИПА

Александр Николаевич Зарубин
заведующий кафедрой математического анализа и дифференциальных уравнений,
д. ф.-м. н., профессор
matdiff@yandex.ru
г. Орел
Елена Викторовна Чаплыгина
доцент кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений, к. ф.-м. н., доцент
lena260881@yandex.ru
г. Орел

Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева

Аннотация. Исследуется задача Трикоми для сингулярного интегро-функционально-дифференциального уравнения с оператором Лаврентьева-Бицадзе. Доказаны теоремы существования и единственности решения.

Ключевые слова: уравнение смешанно-составного типа, функциональные отклонения, сингулярное интегральное уравнение.

Рассмотрим интегро-функциональное уравнение смешанно-составного типа

$$\sum_{k=0}^{1} a_k(x)\mathcal{S}(\alpha_1^k(x), LU) + \sum_{k=1}^{2} b_k(x)\mathcal{S}\big(\alpha_2^k(x), LU\big) = 0, \tag{1}$$

где

$$\mathcal{S}\big(\alpha_j^k(x), Lu\big) = \int\limits_{\alpha_j^k(x_0)}^{\alpha_j^k(x_1)} \frac{LU(t,y)dt}{\alpha_j^k(x) - t}, \tag{2}$$

$$L \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} + (\mathrm{sgn} y)\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \tag{3}$$

оператор Лаврентьева-Бицадзе [1]; $a_k(x)(k=0,1)$, $b_k(x)$ $(k=1,2)$ – непрерывные достаточно гладкие функции; $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ – сохраняющие ориентацию взаимно-обратные диффеоморфизмы класса C^2, удовлетворяющие условиям

$$\alpha_{3-j}\left(\alpha_j(x)\right) = x\ (j=1,2);\ \alpha_1(x) < x,\ \ \alpha_1'(x) > 1\ (\alpha_1'(x) < 1) \text{ и}$$
$$\alpha_2(x) > x,\ \alpha_2'(x) < 1\ (\alpha_2'(x) > 1);\ x_n = \alpha_1(x_{n+1}),\ \ x_{n+1} = \alpha_2(x_n);\ \alpha_1(x_1) = x_0 = 0;$$

$$\alpha_2(x_0) > 0\,;\ \alpha_j^m(x) \equiv \underbrace{\alpha_j\left(\alpha_j\left(\dots\left(\alpha_j(x)\right)\dots\right)\right)}_{m\ \text{раз}}, \text{если } m > 0;$$

$$\alpha_j^m(x) \equiv \underbrace{\alpha_{3-j}\left(\alpha_{3-j}\left(\dots\left(\alpha_{3-j}(x)\right)\dots\right)\right)}_{-m\ \text{раз}}, \text{если } m < 0;\ \alpha_j^0(x) = x (j = 1,2),$$

в смешанной области $D = D^+ \cup D^- \cup I$ с линией изменения типа $I = \{(x,y): x_0 < x < x_3,\ y = 0\}$; $D^+ = D_0^+ \cup D_1^+ \cup D_2^+ \cup \mathcal{J}$ и $D^- = D_0^- \cup D_1^- \cup D_2^-$ - эллиптическая и гиперболическая части области D, причём

$$D_k^+ = \{(x,y): x_k < x < x_{k+1}, 0 < y < h\}\ \left(k = \overline{-1,4}\right);$$
$$D_k^- = \{(x,y): -y < \alpha_1^k(x) < y + x_1, -x_1/2 < y < 0\}\ \left(k = \overline{-1,4}\right);$$
$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2, \text{где } \mathcal{J}_k = \{(x,y): x = x_k, 0 < y < h\}\ (k = 1,2);$$
$$I = \bigcup_{k=0}^{2} I_k,\ I_k = \{(x,y): x_k < x < x_{k+1}, y = 0\}\ \left(k = \overline{-1,4}\right).$$

Тип функциональных отклонений очевиден из представлений

$$U\left(\alpha_1^k(x), y\right) = U\left(x - \left(x - \alpha_1^k(x)\right), y\right) = U\left(x - \tau_1^k(x), y\right),$$
$$U\left(\alpha_2^k(x), y\right) = U\left(x + \left(\alpha_2^k(x) - x\right), y\right) = U\left(x + \tau_2^k(x), y\right),$$

где $\tau_1^k(x) = x - \alpha_1^k(x) > 0, \tau_2^k(x) = \alpha_2^k(x) - x > 0\ (k = 1,2)$.

Пусть $D_k = D_k^+ \cup D_k^- \cup I_k\ \left(k = \overline{-1,4}\right)$.

Задача Т. Найти в области D решение $U(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D \backslash \mathcal{J}) \cap C^2\left(D \backslash (\mathcal{J} \cup I)\right)$ уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$U(x,h) = \varphi(x), x_0 \le x \le x_3, \tag{4}$$

$$U(x_0,y) = U(x_3,y) = 0, 0 \le y \le h, \tag{5}$$

$$U\left(x, -\alpha_1^k(x)\right) = \psi_k(x), x_k \le x \le \alpha_2^k(x_1/2)\ (k = 0,1,2), \tag{6}$$

$$U(x,y) = r(x,y), (x,y) \in \overline{D_{-1}}\,, \tag{7}$$

$$U(x,y) = q(x,y), (x,y) \in \overline{D_3 \cup D_4}, \tag{8}$$

условиям сопряжения

$$U(x,0-) = U(x,0+) = \omega(x), x_0 \le x \le x_3, \tag{9}$$

$$U_y(x,0-) = U_y(x,0+) = \nu(x), x_0 < x < x_3, x \ne x_1, x_2, \tag{10}$$

условиям согласования

$$\psi_0(x_0) = \varphi(x_0) = \varphi(x_3) = r(x_0,y) = q(x_3,y) = 0, \tag{11}$$

где $a_k(x)\ (k = 0,1), b_k(x)\ (k = 1,2), \varphi(x), \psi_k(x)\ (k = 0,1,2), \alpha_1(x), \alpha_2(x)$ — заданные непрерывные достаточно гладкие функции.

Положив

$$V(x,y) = LU(x,y), \tag{12}$$

приведём уравнение (1), с учетом (2), (3) к системе

$$\begin{cases}\sum_{k=0}^{1} a_k(x)\mathcal{S}(\alpha_1^k(x),V)+\sum_{k=1}^{2} b_k(x)\mathcal{S}\big(\alpha_2^k(x),V\big)=0,(x,y)\in D; & (13)\\ LU(x,y)=V(x,y),(x,y)\in D. & (14)\end{cases}$$

Задача T для уравнения (1) в области D распадается на задачу T_1 для уравнения (13) в области D и задачу T_2 для уравнения (14) в области D.

Задача T_1. Найти в области D решение $V(x,y)$ уравнения (13) из класса $C(\overline{D})\cap C^2(D\backslash\mathcal{J})$, удовлетворяющее условиям (согласно (7), (8))

$$V(x,y)=Lr(x,y),(x,y)\in\overline{D_{-1}}, \tag{15}$$

$$V(x,y)=Lq(x,y),(x,y)\in\overline{D_3\cup D_4}, \tag{16}$$

где $r(x,y)$, $q(x,y)$ – заданные достаточно гладкие функции.

Задача T_2. Найти в области D решение $U(x,y)\in C(\overline{D})\cap C^1(D\backslash\mathcal{J})\cap C^2(D\backslash(\mathcal{J}\cup I))$ уравнения (14), удовлетворяющее условиям (4)-(6), (9)-(11), где $\varphi(x)$, $\psi_k(x)$ $(k=0,1,2)$ – заданные достаточно гладкие функции.

Однозначная разрешимость задачи T_1.

Теорема 1. Если $a_k(x)(k=0,1)$, $b_k(x)(k=1,2)$, $r(x,y)$, $q(x,y)$ – дважды непрерывно дифференцируемые функции, $\det R(x)=|R(x)|\neq 0$, то существует единственное решение $V(x,y)$ задачи T_1.

Доказательство.

В терминах функций

$$\begin{cases}\mathcal{S}_j\big(\alpha_l^k(x),V_j\big)=\mathcal{S}\big(\alpha_l^k(x),V\big),x_j<x<x_{j+1}\,\big(j=\overline{-1,4};l=1,2;k=\overline{0,2}\,\big), & (17)\\ V_j(x,y)=V(x,y),x_j<x<x_{j+1},(x,y)\in D_j\big(j=\overline{-1,4}\big), & (18)\end{cases}$$

уравнение (13), с учетом (2), (15), (16), можно записать в форме матричного уравнения

$$R(x)\overline{\mathcal{S}}(x,V)=\overline{F}(x,y),(x,y)\in D_0, \tag{19}$$

где

$$\overline{\mathcal{S}}(x,V)=(\mathcal{S}_0(x,V_0),\mathcal{S}_1(\alpha_2(x),V_1),\mathcal{S}_2(\alpha_2^2(x),V_2))^T, \tag{20}$$

$$R(x)=(\overline{R}_0(x),\overline{R}_1(x),\overline{R}_2(x))^T, \tag{21}$$

$$\overline{F}(x,y)=(F_0(x,y),F_1(x,y),F_2(x,y))^T, \tag{22}$$

причём компоненты матрицы $R(x)$ из (21) и вектора $\overline{F}(x,y)$ из (22) имеют вид

$$\begin{aligned}&\overline{R}_0(x)=\big(a_0(x),b_1(x),b_2(x)\big),\\ &\overline{R}_1(x)=\big(a_1(\alpha_2(x)),a_0(\alpha_2(x)),b_1(\alpha_2(x))\big),\\ &\overline{R}_2(x)=\big(0,a_1(\alpha_2^2(x)),a_0(\alpha_2^2(x))\big),\end{aligned} \tag{23}$$

и

$$\begin{aligned}&F_0(x,y)=-a_1(x)\mathcal{S}_{-1}(\alpha_1(x),Lr),\\ &F_1(x,y)=-b_2\big(\alpha_2(x)\big)\mathcal{S}_3\big((\alpha_2^3(x)),Lq\big),\\ &F_2(x,y)=-b_1\big(\alpha_2^2(x)\big)\mathcal{S}_3\big((\alpha_2^3(x)),Lq\big)-b_2\big(\alpha_2^2(x)\big)\mathcal{S}_4\big((\alpha_2^4(x),Lq\big).\end{aligned} \tag{24}$$

Если определитель $|R(x)| \neq 0,\ x_0 \leq x \leq x_1$, то единственное решение уравнения (19) имеет вид

$$\overline{S}(x,V) = R^{-1}(x)\overline{F}(x,y), (x,y) \in D_0, \tag{25}$$

где обратная матрица

$$R^{-1}(x) = (\overline{R_0}^{-1}(x), \overline{R_1}^{-1}(x), \overline{R_2}^{-1}(x))^T, \tag{26}$$

имеет компоненты

$$\overline{R_0}^{-1}(x)|R(x)| = (a_0\big(\alpha_2(x)\big)a_0\big(\alpha_2^2(x)\big) - a_1\big(\alpha_2^2(x)\big)b_1\big(\alpha_2(x)\big), -b_1(x)a_0\big(\alpha_2^2(x)\big) +$$
$$+b_2(x)a_1\big(\alpha_2^2(x)\big),\ b_1(x)b_1\big(\alpha_2(x)\big) - b_2(x)a_0\big(\alpha_2(x)\big)),$$
$$\overline{R_1}^{-1}(x)|R(x)| = \Big(-a_1\big(\alpha_2(x)\big)a_0\big(\alpha_2^2(x)\big), a_0(x)a_0\big(\alpha_2^2(x)\big), -a_0(x)b_1\big(\alpha_2(x)\big)$$
$$+ b_2(x)a_1\big(\alpha_2(x)\big)\Big),$$
$$\overline{R_2}^{-1}(x)|R(x)| = (a_1\big(\alpha_2(x)\big)a_1\big(\alpha_2^2(x)\big), -a_0(x)a_1\big(\alpha_2^2(x)\big), a_0(x)a_0\big(\alpha_2(x)\big) - a_1\big(\alpha_2(x)\big)b_1(x)),$$
$$|R(x)| = \det R(x).$$

Решение (25) можно записать, согласно (17), (18), (20), (22), (26), в покомпонентной форме

$$\mathcal{S}_k\big(\alpha_2^k(x), V_k\big) = N_k(x,y) \equiv \overline{R_k}^{-1}(x)\overline{F}(x,y), (x,y) \in D_0\ (k = 0,1,2)$$

или

$$\mathcal{S}_k(x, V_k) = N_k\big(\alpha_1^k(x), y\big), (x,y) D_k\ (k = 0,1,2), \tag{27}$$

где $\overline{R_k}^{-1}(x) (k = 0,1,2) -$ компоненты (строки) матрицы $R^{-1}(x)$ из (26), а вектор $\overline{F}(x,y)$ имеет вид (22), (24).

Согласно (2), (12), для определения $V_k(x,y)$ из (27) приходим к сингулярному интегральному уравнению первого рода

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{V_k(t,y)dt}{x-t} = N_k\big(\alpha_1^k(x), y\big), (x,y) \in D_k\ (k = 0,1,2),$$

которое имеет [2, с.194] единственное ограниченное на концах решение

$$V_k(x,y) = -\sqrt{(x-x_k)(x_{k+1}-x)} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{N_k\big(\alpha_1^k(t), y\big)}{\sqrt{(t-x_k)(x_{k+1}-t)}} \frac{dt}{x-t}, (x,y) \in D_k\ (k = 0,1,2),$$

при условии

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{N_k\big(\alpha_1^k(t), y\big)dt}{\sqrt{(t-x_k)(x_{k+1}-t)}} = 0.$$

Теорема доказана.

Однозначная разрешимость задачи T$_2$.

Теорема 2. Если $\varphi(x) \in C[x_0, x_3] \cap C^2[x_0, x_3]$, $V(x,y) = \{V_k(x,y) \in C(\overline{D}_k) \cap C^2(D_k),\ k = 0,1,2\}$, то существует единственное решение $U(x,y)$ задачи T$_2$ для уравнения (14) в области D, то есть решение задачи T для уравнения (1) в области D.

Доказательство.

В терминах функций

$$U_k^{\pm}(x,y) = U(x,y), (x,y) \in D_k^{\pm} (k = 0,1,2),$$
$$V_k^{\pm}(x,y) = V(x,y), (x,y) \in D_k^{\pm} (k = 0,1,2),$$

уравнение (14) и условия (4)-(6) можно записать в виде

$$L\overline{U} \equiv \overline{U_{xx}} + sgny\overline{U_{yy}} = \overline{V}(x,y), (x,y) \in D_{0}^{\pm}, \tag{28}$$

$$\overline{U}(x,h) = \overline{\varphi}(x) = \left(\varphi(x), \varphi\big(\alpha_2(x)\big), \varphi\big(\alpha_2^2(x)\big)\right)^T, \tag{29}$$

$$\overline{U}(x_0,y) = \overline{U}(x_1,y) = 0, \tag{30}$$

$$\overline{U}(x,-x) = \overline{\psi}(x) = \left(\psi_0(x), \psi_1\big(\alpha_2(x)\big), \psi_2\big(\alpha_2^2(x)\big)\right)^T, \tag{31}$$

где

$$\overline{U} = \left(U_0^{\pm}(x,y), U_1^{\pm}(\alpha_2(x),y), U_2^{\pm}(\alpha_2^2(x),y)\right)^T,$$
$$\overline{V} = \left(V_0^{\pm}(x,y), V_1^{\pm}(\alpha_2(x),y), V_2^{\pm}(\alpha_2^2(x),y)\right)^T.$$

Задача Трикоми (28)-(31) для неоднородного уравнения Лаврентьева-Бицадзе решена аналогично [3].

Теорема доказана.

Список литературы

1. Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа. М.: АН СССР. 1959.
2. Полянин А.Д., Манжиров А.В.Справочник по интегральным уравнениям. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2003.
3. Зарубин А.Н. Задача Трикоми для нелинейного уравнения смешанного типа с функциональным запаздыванием и опережением // Дифференциальные уравнения. 2017. Т.53. №8. С. 1064-1073.

TRICOMI PROBLEM FOR SINGULAR INTEGRO-FUNCTIONAL DIFFERENTIAL EQUATION OF MIXED-COMPOUND TYPE

A.N. Zarubin
Dr. Sci. (Phys.-Math.), professor
matdiff@yandex.ru
Orel
E.V. Chaplygina
Cand. Sci. (Phys.-Math.), associate professor
lena260581@yandex.ru
Orel

Orel State University named after I.S. Turgenev

Abstract. The Tricomi problem for a singular integro-functional differential equation with the Lavrentiev-Bitsadze operator is investigated. Existence and uniqueness theorems of the solution are proved.

Keywords: mixed-compound equation, functional deviations, singular integral equation.

References

1. Bitsadze, A.V. (1959) Equations of mixed type [*Uravneniya smeshannogo tipa*]. Moscow: USSR Academy of Sciences.

2. Polyanin, A. D., Manzhirov, A.V. (2003) Handbook of integral equations [*Spravochnik po integralnim uravneniyam*]. Moscow: FIZMATLIT.
3. Zarubin, A. N. (2017). The Tricomi Problem for a nonlinear mixed-type equation with functional delay and advance [*Zadacha Tricomi dlya nelineinogo uravneniya smeshannogo tipa s funkcionalnim zapazdivaniem i operejeniem*] *Differential equations.*Vol. 53(8). Pp.1064-1073.

УДК 004.5

РАЗРАБОТКА МОБИЛЬНОГО СЕРВИСА ДЛЯ ПЕРСОНИФИКАЦИИ ПИТАНИЯ СПОРТСМЕНОВ НА ОСНОВЕ УЧЕТА ИХ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ПОТРЕБНОСТЕЙ

Юлия Игоревна Иванова
студентка
ivanova788@mail.ru
г. Москва
Михаил Леонидович Рысин
к.п.н., доцент
m.l.rysin@mgutm.ru
г. Москва

Московский государственный университет технологий и управления им. К.Г. Разумовского (ПКУ)

Аннотация. Статья посвящена описанию практических приёмов проектирования и программной реализации компонентов мобильного сервиса, предназначенного для персонификации питания спортсменов и людей, ведущих активный образ жизни. Приведены особенности использования инструментальных средств разработки программных модулей, реализующих алгоритмы учета индивидуальных потребностей в питании пользователей мобильного сервиса.

Ключевые слова: мобильное приложение, архитектура «клиент-сервер», IDEF0, ER-модель, инфологическая модель, Android, пользовательский интерфейс, программирование, SQL, Java, PHP.

Питание является фактором поддержания тела человека в здоровом и нормально функционирующем состоянии. В настоящее время в научном мире актуальна тема персонификации питания. Существует большая зависимость рациона человека от пола, возраста, массы тела, вида и уровня физической активности, личных и культурологических предпочтений, непереносимости и/или пищевой аллергии и т. д.[4]. Имеет практический смысл объединить в группы людей, у которых особенности организма, активность и потребности различаются не критично. Например, можно выделить такую группу как спортсмены. Зачастую перед спортсменами и людьми, ведущими активный образ жизни, стоят проблемы, решение которых напрямую зависит от оптимальности рациона питания (например, набор массы, сброс веса или поддержание организма в конкретных рамках).

Таким образом, имеется возможность объединить таких людей в группу и составить некоторое количество рационов для группы, но при этом остается проблемой необходимость автоматизации учета потребностей и формирования рациона питания для каждого участника. Кроме того, человек питается несколько раз в день, поэтому весь сервис подбора рациона должен быть доступен потребителю в любой момент времени.

Сегодня огромную роль в жизни большинства людей играют мобильные девайсы – телефоны, смартфоны, планшеты. Посредством смартфонов происходит интенсивное общение в виде живых коммуникаций (аудио- и видеозвонки), письменных диалогов, а также