4. Ry`zhik, V.I. A computer. A paradigm shift? [*Komp`iuter. Smena paradigmy`?*] ifets.ieee.org/russian/depository/v13_i3/html/4r.htm/.
5. Pavlova, M.A. (2013). Learning Math Using GeoGebra Features [*Obuchenie matematike s ispol`zovaniem vozmozhnostei` GeoGebra*] / M.A. Pavlova, M.V. Shabanova, O.L. Bezumova, E.N. Erilova, S.N. Kotova, S.V. Larin, R.P. Ovchinnikova, N.N. Patronova, A.E. Tomilova, O.N. Troitckaia, L.V. Forkunova, T.S. Shirikova (Collective monograph). Moscow: Publishing House Perot.
6. Podaeva, N.G. (2012). Sociocultural concept of mathematical education [*Sotciokul`turnaia kontceptciia matematicheskogo obrazovaniia*]. Yelets: EGU.
7. Podaeva, N.G., Podaev, M.V. (2014). Updating the content of school mathematical education: a sociocultural approach [*Obnovlenie soderzhaniia shkol`nogo matematicheskogo obrazovaniia: sotciokul`turny`i` podhod*] SPb .: Publishing house "Lan".
8. Podaeva, N.G., Podaev, M.V. (2016). Technology of socioculturally oriented geometry training in a comprehensive school [*Tekhnologiia sotciokul`turno-orientirovannogo obucheniia geometrii v obshcheobrazovatel`noi` shkole*] Yelets: EGU.

УДК 372.851

ОСНОВНЫЕ СПОСОБЫ И ПРИЕМЫ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ФОРМУЛ ПЛОЩАДЕЙ И ОБЪЕМОВ

Елена Сергеевна Лаврухина
студент
l-alena98@yandex.ru
г. Брянск
Ирина Евгеньевна Малова
д.п.н., профессор
mira44@yandex.ru
г. Брянск

Брянский государственный университет им. акад. И.Г. Петровского

Аннотация. Важной частью процесса обучения учащихся математике является изучение ими курса геометрии. Значительную часть данного курса составляют теоремы, которые необходимо уметь доказывать. Включение учащихся в процесс доказательства теорем способствует их лучшему пониманию, запоминанию самой формулировки или необходимой формулы, этапов доказательства, а также активизирует мыслительную активность и развивает логику. Большой блок теорем в геометрии занимают теоремы, связанные с формулами площадей плоских фигур и объемов тел, изучение которых занимает не один год обучения. Каждая новая формула площади или объема требует обоснования, поэтому перед учителем и учащимися встает важный вопрос: «Как доказываются те или иные формулы?». Т.е. необходимо определить, с помощью какого способа или приема можно доказать конкретную формулу, какова общая схема этого способа доказательства, для каких других фигур этот способ можно использовать и как. Таким образом, тема исследования «Основные способы и приемы доказательства формул площадей и объемов» актуальна. В данной статье выделены основные способы и приемы, с помощью которых в школьных учебниках обычно выводятся формулы площадей и объемов различных фигур. Отражена сущность каждого из способов и специфические построения, характерные для них. Выделена последовательность шагов, позволяющая использовать данные способы для различных фигур. При рассмотрении отдельных способов выделены фигуры, для вывода формулы площади (объема) которых эти способы используются.

Перечислены наиболее удобные варианты преобразований фигур, характерные для данных приемов.

Ключевые слова: способы доказательства, формулы площадей, формулы объемов, методика обучения геометрии, методика изучения теорем.

Введение

Одной из содержательных линий, изучаемых в школьном курсе математики, является измерение геометрических величин [4]. Важное внимание уделяется изучению площадей плоских фигур и объемов тел, поскольку знание соответствующих формул и приемов их доказательств необходимо учащимся для успешного решения большого блока заданий, связанных с данными величинами.

Процесс изучения площадей и объемов в средней школе начинается с 5 класса и затем продолжается в курсе планиметрии и стереометрии. Введение соответствующих теорем и формул сопровождается их доказательством, поэтому учителю и учащимся важно знать основные способы доказательства теорем и обоснования необходимых формул.

Методология

При написании статьи были использованы такие методы, как:

- анализ учебников по геометрии трех УМК (Атанасян Л.С. [1; 3], Мерзляк А.Г. [5; 6], Потоскуев Е.В. [2]);
- анализ всех доказательств теорем о площадях фигур и объемах тел;
- обобщение способов доказательства различных теорем.

Результаты

Анализ доказательств, представленных в различных УМК, позволил не только определить, с помощью каких способов доказывается та или иная теорема, но и систематизировать доказательства вокруг выделенных способов. Таким образом, были выделены следующие приемы и способы доказательства:

1. Метод полной индукции;
2. Достраивание (дополнение) до изученной фигуры;
3. Разбиение (разрезание) на фигуры, изученные ранее;
4. Перестраивание фигуры в равносоставленную;
5. Использование предельного перехода;
6. Использование принципа Кавальери;
7. Использование определенного интеграла.

К одной и той же фигуре могут быть применены разные способы. Выбор способа доказательства зависит от порядка изучения данных фигур и от программы, принятой в каждом учебнике. Последние два способа используются только при доказательстве формул объема.

Рассмотрим перечисленные способы более подробно с учетом различных фигур, при выводе формул площади или объема которых они используются.

Метод полной индукции

Сущность данного метода заключается в рассмотрении всех частных случаев и доказательстве справедливости утверждения для каждого из них. Выделим формулы, которые обосновываются в различных УМК для нескольких случаев.

1. Площадь квадрата: а) сторона выражена дробью $\frac{1}{n}$, где n – целое число; б) сторона выражена конечной десятичной дробью, содержащей n знаков после запятой; в) сторона выражена бесконечной десятичной дробью.

2. Площадь треугольника (для формулы $S = \frac{1}{2}ab \cdot \sin\alpha$): а) угол треугольника острый; б) угол тупой; в) угол прямой.
3. Объем прямоугольного параллелепипеда: а) измерения – конечные десятичные дроби, содержащие n знаков после запятой; б) хотя бы одно из измерений – бесконечная десятичные дробь.
4. Объем прямой призмы, наклонной призмы, пирамиды: а) треугольная; б) произвольная.

При рассмотрении каждого из случаев применяется один из способов доказательства, перечисленных ранее, причем способ доказательства одного случая может отличаться от способа доказательства другого случая для этой же фигуры.

Достраивание до изученной фигуры, разбиение фигуры на изученные ранее фигуры, перестраивание фигуры в равносоставленную

Данные приемы доказательства удобно использовать, когда есть возможность «свести» фигуру к другой, для которой уже изучена формула площади (объема). Для определения такой известной фигуры часто помогает вопрос: «Для какой фигуры мы уже знаем формулу площади (объема)?». Ответив на этот вопрос, учащиеся переходят к выбору более удобного приема доказательства, позволяющего из нужной фигуры получить известную. Например, необходимо вывести формулу площади треугольника. Учащиеся уже знают формулы вычисления площадей квадрата, прямоугольника и параллелограмма. Анализируя возможные дополнительные построения, можно прийти к выводу, что треугольник проще всего достроить до параллелограмма.

Таким образом, выбор приема доказательства зависит от того, для каких фигур уже известны соответствующие формулы. Такие приемы требуют выполнения дополнительных построений (например, диагональ, высота, продление стороны). В процессе доказательства указанные приемы используются вместе с применением свойств площадей и объемов (инвариантность, аддитивность).

Для обоснования теорем через приемы достраивания или разбиения можно выделить общую схему доказательства:

1. Достроить фигуру до изученной (разбить фигуру на изученные);
2. Найти площадь (объем) новой фигуры по известной формуле;
3. Выразить площадь (объем) новой фигуры (искомой фигуры) через площади (объемы) фигур, из которых она состоит;
4. Найти площадь (объем) искомой фигуры.

Как было сказано выше, одна и та же формула может быть доказана различными способами. Так, например, формула площади прямоугольника в различных учебниках доказывается с помощью следующих приемов:

1. Достраивание прямоугольника со сторонами a и b до квадрата со стороной $a + b$ [3];
2. Разбиение прямоугольника, стороны которого a и b выражены рациональными числами $a = \frac{p}{n}$, $b = \frac{q}{n}$, где p, q и n – натуральные числа, на равные квадраты со сторонами $\frac{1}{n}$ [5].

Для доказательства формул площадей остальных плоских фигур в учебниках Л.С. Атанасяна [3] и А.Г. Мерзляка [5] используются приемы:

– параллелограмм перестраивается в прямоугольник;
– треугольник достраивается до параллелограмма;
– трапеция разбивается на два треугольника диагональю;
– ромб разбивается на треугольники диагоналями.

Для объемных фигур также возможно применение выделенных приемов несмотря на то, что данные формулы могут доказываться и с помощью других способов. Приведем некоторые примеры таких преобразований:

- прямая треугольная призма, в основании которой прямоугольный треугольник, достраивается до прямоугольного параллелепипеда;
- треугольная пирамида достраивается до треугольной призмы;
- произвольная пирамида разбивается на треугольные;
- усеченная пирамида и усеченный конус достраиваются соответственно до пирамиды и конуса.

Таким образом, учащиеся должны знать формулу площади (объема) фигуры, которую они получают из исходной фигуры путем различных преобразований.

Использование предельного перехода

Обычно предельный переход используют для таких фигур, как окружность, сфера, цилиндр, поскольку данные фигуры нельзя целиком заполнить многоугольниками (многогранниками), т.е. в них останутся «пустые области».

Перечислим формулы, которые доказываются на основе данного способа:

- площадь квадрата, длина стороны которого представляет собой бесконечную десятичную дробь;
- длина окружности;
- площадь круга;
- объем прямоугольного параллелепипеда, у которого хотя бы одно из измерений – бесконечная десятичные дробь;
- объем цилиндра;
- площадь сферы.

При выводе каждой из формул в первую очередь необходимо выбрать фигуры, площади (объемы) которых необходимо сравнить. Например, для вывода формулы площади круга рассматривают вписанный правильный n-угольник, в который в свою очередь вписана еще одна окружность. Для площадей (объемов) рассматриваемой группы фигур составляется двойное неравенство.

Следующий шаг доказательства является специфическим для данного способа. Характерная фраза для данного шага: «Будем неограниченно увеличивать число n [3]». Таким образом, необходимо представить, как изменятся рассматриваемые фигуры в этой ситуации. Так, например, в правильном многоугольнике увеличивается число сторон, и он все более становится похожим на окружность, а значит, его площадь приближается к площади круга. Последний шаг доказательства – переход к пределу при устремлении n к бесконечности, который позволяет найти искомую величину.

Таким образом, для использования данного способа доказательства учащиеся должны иметь представление о предельном переходе.

Использование принципа Кавальери

Данный метод доказательства основан на применении принципа, сформулированного итальянским математиком Б. Кавальери. Согласно данному принципу, отношение объемов тел, заключенных между параллельными плоскостями, равно отношению площадей их сечений [2].

Таким образом, для того, чтобы найти объем тела, нужно:

1. Выбрать параллельные плоскости;
2. Рассмотреть два тела, пересеченных данными параллельными плоскостями;
3. Найти отношение площадей сечений;
4. Сделать вывод об отношении объемов тел, опираясь на принцип Кавальери, и найти из этого отношения нужный объем.

В качестве одной из параллельных плоскостей удобно выбрать плоскость, содержащую нижние основания рассматриваемых фигур, т.е. плоскость, на которой они «стоят».

С помощью принципа Кавальери доказываются формулы объема таких фигур, как прямоугольный параллелепипед, наклонная призма, произвольная пирамида, цилиндр, конус, шар. Поскольку для использования данного принципа необходимо рассмотреть две фигуры, то важная задача состоит в выборе второй фигуры. Главное условие для выбора этой фигуры заключается в том, что ее объем должен быть известен, т.е. известна формула, по которой этот объем можно найти. Как правило, сравниваемые фигуры должны иметь одинаковую высоту.

Перечислим фигуры, которые при использовании принципа Кавальери могут «играть роль вторых фигур» для фигур, объем которых необходимо найти. Впервые принцип Кавальери используется при обосновании формулы объема прямоугольного параллелепипеда [2; 3]. Доказательство проходит 2 этапа: 1) сравниваются прямоугольный параллелепипед, у которого ребра оснований равны a и b, а боковое ребро равно 1 и единичный куб; 2) сравниваются параллелепипед, у которого ребра оснований равны 1 и a, и параллелепипед с измерениями a, b, c (их высота одинаковая). В каждом случае сравнение площадей сечений позволяет сделать вывод об объемах этих тел.

Доказательство формул объема других фигур ограничивается одним случаем, при этом необходимо каждую из них сравнить со следующими фигурами:

– наклонную призму и цилиндр – с прямоугольным параллелепипедом;
– произвольную пирамиду – с правильной четырехугольной пирамидой (если ее объем получен ранее при разбиении куба диагоналями на 6 равных таких пирамид);
– конус – с пирамидой;
– половина шара – с цилиндром, из которого вырезан конус [3]; либо шар – с цилиндром, из которого удалены конусы с теми же основаниями и вершиной, лежащей в центре цилиндра [2].

Поскольку для применения принципа Кавальери необходимо находить площади сечений, образованных при пересечении тел параллельными плоскостями, то можно сделать вывод о том, что учащиеся должны хорошо знать формулы площадей плоских фигур. При этом для нахождения площадей сечений в случаях с пирамидой и конусом можно воспользоваться свойством параллельных сечений.

Использование определенного интеграла

Определенный интеграл позволяет вывести формулы объема тел, которые можно заключить между параллельными плоскостями. Как правило, данный способ используется для вывода формул объема таких фигур, как наклонная треугольная призма, треугольная пирамида, конус, шар. Для того, чтобы применять этот способ доказательства, учащиеся должны обладать определенными знаниями по этой теме из курса математического анализа.

Можно выделить следующую схему вывода формул объема через определенный интеграл:

1. Ввести систему координат (ось Ox);
2. Провести сечение тела плоскостью, перпендикулярной оси Ox;
3. Найти (выразить) площадь сечения;
4. Применить основную формулу для вычисления объемов.

Формула для вычисления объемов выглядит следующим образом:

$$V = \int_a^b S(x)dx$$

В данной формуле $S(x)$ – площадь сечения, перпендикулярного оси Ox, a a и b – точки пересечения оси Ox с поверхностью тела, причем эти точки лежат в параллельных плоскостях, ограничивающих данное тело сверху и снизу (или справа и слева). Иными словами, можно сказать, что длина отрезка $[a; b]$ равна высоте, поскольку ось Ох, содержащую a и b, часто располагают перпендикулярно основанию тела.

Приведем примеры того, как обычно располагают ось Ох относительно различных фигур. При выводе формул объема наклонной треугольной призмы, треугольной пирамиды и конуса ось Ох обычно выбирают перпендикулярно основаниям данных тел, причем в случаях с пирамидой и конусом ее удобно провести из вершины. Таким образом, сечения плоскостью, перпендикулярной оси Ох, в каждом из случаев будут параллельны основаниям. При выводе формулы объема шара ось Ох обычно проводят через центр.

Выводы

Таким образом, мы рассмотрели ключевые способы и приемы доказательства формул площадей и объемов. Знание основ данных способов и специфических для каждого способа построений, а также правильное применение необходимого способа будет способствовать пониманию процесса вывода соответствующих формул. Важно обобщать способы доказательства, выделяя общие шаги, по которым может доказываться определенная группа теорем. Полезно также выделять все формулы, которые могут обосновываться на основе каждого из способов. Отдельные приемы могут также использоваться при решении задач на нахождение площади или объема какой-либо фигуры.

Проведенное исследование будет полезно учителю, так как содержит полезные рекомендации, которые можно использовать при организации уроков по теме «Площади и объемы», а также учащимся для обогащения их знаний и опыта доказательства теорем.

Список литературы

1. Геометрия 10-11 классы: учеб. для общеобразовательных учреждений: базовый и профил. уровни / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. М.: Просвещение, 2007.
2. Геометрия 11 классы: учеб. для классов с углуб. и профильным изучением математики общеобразовательных учреждений / Е.В. Потоскуев, Л.И. Звавич. М.: Дрофа, 2009.
3. Геометрия 7-9 классы: учеб. для общеобразовательных организаций / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. М.: Просвещение, 2018.
4. Малова И.Е. Теория и методика обучения математике в средней школе: учеб. пособие для студентов вузов. М.: Гуманитар. изд. центр ВЛАДОС, 2009.
5. Мерзляк А.Г. Геометрия: 8 класс: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир. М.: Вентана-Граф, 2013.
6. Мерзляк А.Г. Геометрия: 9 класс: учебник для учащихся общеобразовательных организаций / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир. М.: Вентана-Граф, 2014.

BASIC METHODS FOR PROOF FORMULAS OF AREAS AND VOLUMES

E.S. Lavrukhina
student
l-alena98@yandex.ru
Bryansk
I.E. Malova
Dr. Sci. (Pedagogy), professor
mira44@yandex.ru
Bryansk

Petrovsky Bryansk State University

Abstract. The studying of geometry is an important part of the math learning process. Theorems are a significant part of this course, and they must be proven. When pupils take part in theorem proving, it contributes to their better understanding, remembering the wording or the investigated formula, stages of proof, and also activates mental activity and develops logic. Many theorems in geometry are theorems that are related to the area formulas of plane figures and volumes, and their learning takes more than one academic year. Each new area or volume formula requires proof, so the important question is: «How are these formulas proved?». It is necessary to determine what method can be used to prove a specific formula, what is the general scheme of this method of proof and what figures correspond to this method and why. So the theme of the research «Basic methods for proof formulas of areas and volumes» is relevant. This article contains the basic methods by which formulas of areas and volumes of various figures are usually proved. The essence of each of the methods and their specific characteristic constructions are reflected there. The sequence of stages of proof is revealed. It allows you to use these methods for various figures. Considering particular methods, the figures for which these methods are used for volume formula output are highlighted. The most convenient options for transforming the figure that are characteristic of these methods are listed.

Keywords: methods of proof, formulas of areas, formulas of volumes, methods of teaching geometry, methods of studying theorems.

References

1. Atanasyan, L.S, Butuzov, V.F., Kadomtsev, S.B. et al (2007). Geometry 10-11: textbook for general education institutions: basic and profile levels [*Geometriya, 10-11: ucheb. dlya obsheobrazovat. uchrezhdenij: bazovyj i profil. urovni*]. Moscow: Prosveshenie.
2. Atanasyan, L.S, Butuzov, V.F., Kadomtsev, S.B. et al (2018). Geometry 7-9: textbook for general education organizations [*Geometriya. 7-9 klassy: ucheb. dlya obsheobrazovat. organizacij*]. Moscow: Prosveshenie.
3. Malova, I.E. (2009). Theory and methodology of teaching mathematics in high school: textbook. manual for university students [*Teoriya i metodika obucheniya matematike v srednej shkole: ucheb. posobie dlya studentov vuzov*]. Moscow: Gumanitar. izd. centr VLADOS.
4. Merzlyak, A.G. (2013). Geometry 8: a textbook for students of educational institutions [*Geometriya: 8 klass: uchebnik dlya uchashihsya obsheobrazovatelnyh uchrezhdenij*]. Moscow: Ventana-Graf.

5. Merzlyak, A.G. (2014). Geometry 9: a textbook for students of educational organizations [*Geometriya: 8 klass: uchebnik dlya uchashihsya obsheobrazovatelnyh organizacij*]. Moscow: Ventana-Graf.
6. Potoskuev, E.V., Zvavich, L.I. (2009). Geometry 11: textbook for classes with deep and specialized mathematics education institutions [*Geometriya. 11 kl.: ucheb. dlya klassov s uglub. i profilnym izucheniem matematiki obsheobrazovat. uchrezhdenij*]. Moscow: Drofa.

УДК 378.147

РЕАЛИЗАЦИЯ ПРИНЦИПА ИНТЕГРАЦИИ ПРИ СТРУКТУРИРОВАНИИ СОДЕРЖАНИЯ ОБУЧЕНИЯ СПЕЦИАЛЬНЫМ РАЗДЕЛАМ МАТЕМАТИКИ СТУДЕНТОВ ТЕХНИЧЕСКИХ НАПРАВЛЕНИЙ

Лилия Сергеевна Петрова
к.п.н., доцент
petrov.306@mail.ru
г. Омск

Омский государственный университет путей сообщения

Аннотация. В статье обоснована актуализация потребности интегрированного обучения специальным разделам математики (уравнениям математической физики, теории функций комплексного переменного, операционному исчислению) студентов технических направлений. Описано выделение принципа интеграции как дидактического принципа обучения специальным разделам математики студентов технических направлений, обеспечивающего обоснованное структурирование содержания обучения на основе междисциплинарной интеграции с профессиональными и математическими дисциплинами на двух уровнях. Рассматривается реализация преемственности в обучении специальным разделам математики при освоении математических дисциплин на уровнях бакалавриата и магистратуры за счет детализации содержания обучения с определением инвариантных и вариативных составляющих. Обосновывается дополнение содержания обучения учебным профессионально-направленным материалом на основе синтеза содержания математических и профессиональных дисциплин посредством математического моделирования, с включением профессионально-ориентированных задач. Отражена оптимальность использования интегрированных систем автоматизации математических вычислений, на примере пакета MathCAD, при реализации аналитических и численных методов решения задач с применением встроенных функций и с непосредственным программированием алгоритмов.

Ключевые слова: принцип интеграции, содержание обучения, междисциплинарные связи, преемственность обучения, уровневый подход.

В условиях уровневой системы высшего образования актуализируется потребность интегрированного обучения, предполагающего существенное развитие межпредметных связей и переход от согласованного преподавания смежных дисциплин к глубокому их взаимодействию. Наиболее эффективно отразить междисциплинарные связи и естественнонаучный метод исследования, который используется на стыке различных наук, позволяет интегрированное обучение.