https://www.oecd.org/site/schoolingfortomorrowknowledgebase/futuresthinking/trends/37811524.pdf
24. Supel, T. (2006). The fifth discipline: the art and practice of the learning organization. Doubleday Currency.
25. Thomson, A.K. (2018). Personalized learning starts to change teaching methods. *Financial Times*. URL: https://www.ft.com/content/b622f752-e4ff-11e7-a685-5634466a6915
26. Uvarov, A.Yu. (2016). An effective educational process in a changing educational environment [*Rezul'tativnyj uchebnyj process v menyayushchejsya obrazovatel'noj srede*]. In: Proceedings of the VIII All-Russian scientific and methodological conference «Modern didactics and quality of education: the ratio of individual and collective in learning». Krasnoyarsk, 24-32.
27. Uvarov, A.Yu. (2020). Digital transformation and scenarios for the development of general education [*Cifrovaya transformaciya i scenarii razvitiya obshchego obrazovaniya*]. Moscow.
28. Uvarov, A.Yu., Vodopyan, G.M. (2008). Dissemination of innovative teaching materials [*Rasprostranenie innovacionnyh uchebno-metodicheskih materialov*]. Moscow. URL: http://lib.mexmat.ru/books/166771
29. Uvarov, A.Yu., Wang, S., Kahn, C. (2019). Problems and prospects of digital transformation of education in Russia and China [*Problemy i perspektivy cifrovoj transformacii obrazovaniya v Rossii i Kitae*]. In: Proceedings of the II Russian-Chinese conference of educational researchers "Digital transformation of education and artificial intelligence". Moscow.
30. Westerman, G., Bonnet D., McAfee A. (2014). The nine elements of digital transformation. MIT Sloan Management Review. Opinion & Analysis. URL: https://sloanreview.mit.edu/article/the-nine-elements-of-digital-transformation/?social_token=d65abc6db70ba459408562abb8de32bc&utm_source=facebook&utm_medium=social&utm_campaign=sm-direct

DOI: 10.24888/2500-1957-2020-3-74-83

УДК 371.3

ЭКСТРЕМУМ ИНДЕКСА РАЗНОСТОРОННОСТИ, ИЛИ НАСТАВНИК ШКОЛЬНИКА КАК «ШТУРМАН» НАУЧНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ

Александр Васильевич Ястребов
д.п.н., профессор
alexander.yastrebov47@gmail.com
г. Ярославль

Ярославский государственный педагогический университет им. К.Д. Ушинского

Аннотация. Статья посвящена работе наставника, руководящего научным исследованием школьника. Рассматриваются два вопроса, предопределенных реалиями наставничества: об источнике исследовательских задач и о распределении функций в команде «наставник–ученик». Педагогический план статьи разворачивается на фоне плана математического. Рассматривается простой компьютерный эксперимент, который ранее привел автора к понятиям индекса разносторонности угла треугольника [1]. В настоящей статье рассматривается другая математическая задача, порожденная тем же самым экспериментом, а именно, задача об экстремуме индекса разносторонности.

Ключевые слова: исследование школьника, наставник, индекс разносторонности, экстремум.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-013-00730).

Постановка математической задачи

Начнем с простого наблюдения, которое было описано в статье [1]. Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC с основанием AC. Через его вершину B проведем прямую l, параллельную основанию, и выберем на ней точку X (рис. 1). Биссектриса угла X треугольника AXC пересечет основание AC в точке Y.

Совместим точку X с точкой B, а затем начнем передвигать точку X вдоль прямой l (скажем, «направо»), наблюдая при этом за движением точки Y. Очевидно, что в начальный момент времени точка Y будет совпадать с серединой O отрезка AC, а затем начнет *удаляться* от нее. Менее очевидно, что в какой-то момент времени удаление точки Y прекратится, и она начнет *приближаться* к точке точке O, но никогда не совпадет с ней.

Сделанное наблюдение порождает различные задачи. Одна из них состоит в том, чтобы ввести представление о числовой мере разносторонности треугольника. Это достигается путем введения двух понятий: индекс разносторонности угла треугольника и индекс разносторонности треугольника. В наших обозначениях индекс разносторонности угла X – это число $i_X := \frac{OY}{AC}$, а индекс разносторонности треугольника – это число $I := 4i_A i_X i_C$. Свойства этих индексов были подробно изучены в статье [1].

В настоящей работе решается другая естественная задача, вытекающая из сделанного наблюдения.

Задача. При каком положении точки X точка Y находится на максимальном удалении от середины отрезка AC? Чему равно это максимальное удаление?

За решение этой задачи взялся умный и амбициозный десятиклассник одной из школ г. Ярославля, который связывал свое профессиональное будущее с научной деятельностью; назовем его СК. Естественно, что наставником СК стал автор данной статьи.

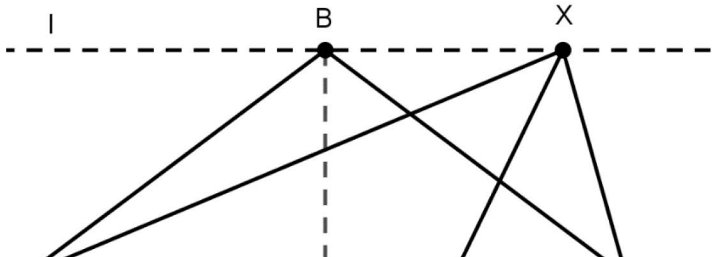

Рис. 1. Наблюдение

Нижеследующий текст описывает различные планы работы с данной задачей, математический и педагогический. Прежде всего, и это просто, будет предложено решение математической задачи. Кроме того, будет описан *процесс* решения данной задачи *школьником*. Сделать такое описание сложнее, чем просто решить задачу, потому что рассуждения школьника в процессе решения исследовательских задач несколько отличаются от рассуждений зрелого специалиста. Наконец, будет предпринята попытка описания работы наставника, целью которой является постепенное превращение школьника в математика-исследователя. Для автора это описание является весьма сложным, потому что научное руководство в принципе *неформализуемо*, опирается только на *неформализованный опыт* предшественников и граничит с искусством в высоком смысле этого слова. Определенным оправдание для автора служат удачные выступления СК на двух российских конференциях школьников.

Поиск гипотезы

Говоря о «положении точки X» и об «удалении точки Y», мы предполагали, что их можно было выразить через параметры исходного равнобедренного треугольника ABC, а именно, через его высоту $BO \coloneqq h$, через половину его основания $OC \coloneqq b$ и через его боковую сторону $BC \coloneqq p = \sqrt{h^2 + b^2}$.

Здесь наша команда столкнулась с первой принципиальной трудностью. С одной стороны, было очевидно, что положение точек X и Y зависит именно от параметров h и b, потому что других исходных данных попросту не существует. С другой стороны, было совершенно неясно, каков характер этой зависимости. Другими словами, нужно было получить хотя бы какую-то гипотезу, которую впоследствии можно было бы доказывать, опровергать, корректировать и т.п.

В этих условиях неопределенности было решено поставить *серию экспериментов* с помощью интерактивной математической среды GeoGebra. Опишем эту серию.

Пусть катеты h и b треугольника BOC независимо друг от друга принимают значения $1, 2, \dots, 10$. Для каждой пары (h, b) воспроизведем динамический чертеж, изображенный на рис. 1. Двигая точку X вдоль прямой l, постараемся «на глаз» определить то положение точки X, при котором точка Y будет находиться на максимальном удалении от точки O. При этом будем фиксировать длину отрезка BX. Результаты наших измерений можно записать в виде таблицы размера 10×10, строки которой занумерованы длинами катета h, столбцы занумерованы длинами катета b, а в клетках записаны те значения длины отрезка BX, при котором отрезок OY имеет максимальную длину. Предполагалось, что нам удастся связать содержимое таблицы с параметрами исходного треугольника.

Итак, нам предстояло выполнить объемный геометрический эксперимент, в котором использовался отнюдь не математический инструмент – глазомер. К счастью, СК воспринял объем эксперимента как большой, но посильный, а необходимость использования глазомера как нечто естественное. Впрочем, далее предстояло решить целый ряд вопросов.

1. Первый вопрос был несколько необычным: в каком порядке заполнять клетки таблицы? Простейший (и естественный) подход состоял в том, чтобы заполнить *все* клетки таблицы в произвольном порядке и только *потом* приступить к анализу полученных данных. Недостаток такого подхода заключался в том, что анализ данных откладывался надолго, а измерения приходилось выполнять «вслепую», не руководствуясь решительно ничем. Впрочем, «слепоту» экспериментов можно было с равным основанием считать их достоинством

Альтернативный подход состоял в том, чтобы использовать длинные цепочки подобных треугольников, которые встречаются среди треугольников Δ_{hb}, участвующих в наших экспериментах. Во-первых, они действительно имеются. Например, треугольник Δ_{11} с катетами (1, 1) подобен треугольникам $\Delta_{22}, \Delta_{33}, \dots, \Delta_{10,10}$. Другой пример – это цепочка $\Delta_{12} \sim \Delta_{24} \sim \Delta_{36} \sim \Delta_{48} \sim \Delta_{5,10}$. Дело сейчас не в том, чтобы перечислить все подобные цепочки, а в том, чтобы использовать утверждение статьи [1]: индексы разносторонности соответственных углов подобных треугольников равны. Для наших экспериментов это означает, что у подобных треугольников экстремальные значения длин OY должно быть кратными друг другу, а коэффициент должен быть равными коэффициенту подобия. Действительно, пусть $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ и $A_1C_1 = k \cdot AC$. Тогда имеет место цепочка эквиваленций $i_X = i_{X_1} \Leftrightarrow \frac{OY}{AC} = \frac{O_1Y_1}{A_1C_1} \Leftrightarrow \frac{OY}{AC} = \frac{O_1Y_1}{k \cdot AC} \Leftrightarrow O_1Y_1 = k \cdot OY$. Очевидно, что для отрезков типа BX выполняется аналогичное соотношение $B_1X_1 = k \cdot BX$. У экспериментатора появляется возможность заполнять те клетки таблицы, которые соответствуют подобным треугольникам, следя при этом за тем, имеет ли место кратность результатов измерений.

Недостаток такого подхода заключался в сильном желании «подогнать под ответ» результаты измерений.

В результате длительных колебаний автор предложил СК третий подход, изображенный на рис. 2: заполнять таблицу, начиная с ее «северо-западного» угла и постепенно расширяя его. При таком порядке заполне ния подобные друг другу и неподобные треугольники идут вперемешку.

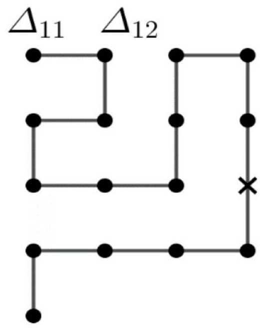

Рис. 2. Порядок экспериментов

2. Первые эксперименты были неудачными, причем настолько неудачными, что под угрозой оказалась идея в целом. Дело в том, что точка Y оставалась в своём экстремальном положение не при конкретном положении точки X, а в течение *некоторого промежутка*, который пробегала точка X. Например, для треугольника Δ_{23} с катетами 2 и 3 точка Y оставалась неподвижной при $BX \in (3.55,\ 3.8)$ (рис. 3). Таких ситуаций было много; более точно, первые 11 экспериментов не дали никакого результата.

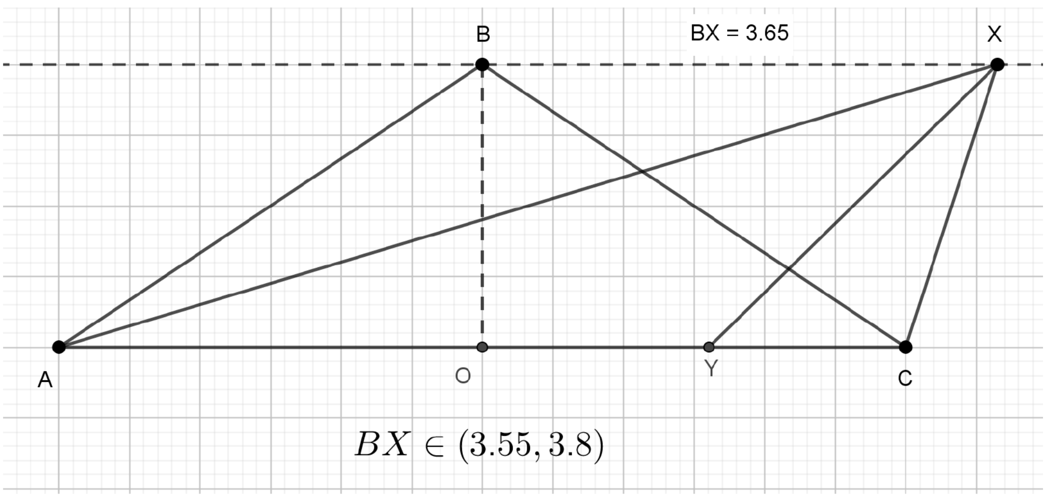

Рис. 3. Угроза неудачи

3. Первый более или менее понятный результат был получен в ходе 12-го эксперимента, который относился к треугольнику Δ_{34} с катетами 3 и 4, то есть к так называемому «египетскому» треугольнику. На рис. 2 его позиция отмечена крестиком. Наблюдение достаточно определенно показало, что $BX = 5$. Другими словами, оказалось, что *точка Y находится на максимальном удалении от середины стороны тогда, когда точка X удаляется от точки B на длину гипотенузы.*

Естественно, что после такого относительного успеха мы переключились на другие треугольники, подобные египетскому: Δ_{43}, Δ_{68}, Δ_{86}. Удача продолжалась, потому что расстояние BX оказалось равным 5 для первого треугольника и 10 для двух других.

4. Стало ясно, что было бы целесообразно исследовать какие-либо «хорошие» треугольники, встречавшиеся ранее. Одним из таких треугольников был прямоугольный треугольник, у которого $h = 1$ и $\angle C = 30°$. Измерения подтвердили нашу гипотезу и показали, что $BX = 2$, то есть длине гипотенузы.

5. Другими «хорошими» треугольниками были прямоугольные равнобедренные треугольники Δ_{ii}, где $i = 1, 2, \dots, 10$. Проблема заключалась в том, что мы не получили «точных» значений отрезков BX, а получили лишь их принадлежность к определенным интервалам. Так, для клетки $(h, b) = (1, 1)$ получили $BX = x_1 \in (1.4, 1.5)$, для клетки $(h, b) = (2, 2)$ получили $BX = x_2 \in (2.7, 2.8)$. Далее $x_3 \in (4.2, 4.3)$, $x_4 \in (5.6, 5.7)$, $x_5 \in (7, 7.1)$, $x_6 \in (8.4, 8.5)$, $x_7 \in (9.9, 10)$, $x_8 \in (11.3, 11.4)$, $x_9 \in (12.7, 12.8)$, $x_{10} \in (14.1, 14.2)$.

В этих условиях мы провели следующее двухэтапное рассуждение.

1) В качестве конкретных экспериментальных значений x_i мы взяли *середины интервалов:*

$$x_1 = 1.45,\quad x_2 = 2.75,\quad x_3 = 4.25,\quad x_4 = 5.65,\quad x_5 = 7.05,$$
$$x_6 = 8.45,\quad x_7 = 9.95,\quad x_8 = 11.35,\quad x_9 = 12.75,\quad x_{10} = 14.15.$$

2) Затем для нахождения окончательного значения $\overline{x_1}$, соответствующего клетке $(h, b) = (1, 1)$, мы провели процедуру *усреднения:*

$$\overline{x_1} = (x_1\colon 1 + x_2\colon 2 + \cdots + x_{10}\colon 10)\colon 10 \approx 1.4144345.$$

Этот результат мы сочли достаточно хорошим, потому что он мало отличался от приближенного значения $\sqrt{2}$. Более точно, $\sqrt{2} = \mathbf{1.414}2135\ldots \approx \mathbf{1.414}4345$, так что разница обнаруживается только в четвертом десятичном знаке.

Получилось, что сделанное наблюдение справедливо не только для египетских треугольников, не только для прямоугольных треугольников с углом в 30°, но и для прямоугольных равнобедренных треугольников.

Так возникла следующая гипотеза: ***расстояние OY достигает своего максимального значения в том случае, когда расстояние BX равно гипотенузе исходного треугольника.***

6. На момент формулировки гипотезы мы отчетливо понимали, что первоначальная программа эксперимента не выполнена, что не прослежены другие цепочки подобных треугольников, что, обобщенно говоря, наша гипотеза ненадежна. Тем не менее, ее правдоподобие (в смысле Д. Пойа) показалось нам достаточно убедительным, так что мы приступили к доказательству ее истинности, не завершив серии намеченных экспериментов.

Здесь уместно заметить, что гипотеза ничего не говорила о величине экстремального отрезка OY. Пришлось оставить этот вопрос на будущее.

Проверка гипотезы и основное утверждение

Сформулированная гипотеза представляет собой некое геометрическое утверждение, которое было бы естественно доказывать методом от противного. Начало доказательства могло бы выглядеть следующим образом.

Пусть на прямой l расположены *различные* точки X и X', причем $BX = BC$ (рис. 4). Пусть точки Y и Y' являются основаниями биссектрис углов AXC и $AX'C$ соответственно. Предположив, что $OY' \geq OY$, можно было бы попытаться получить противоречие.

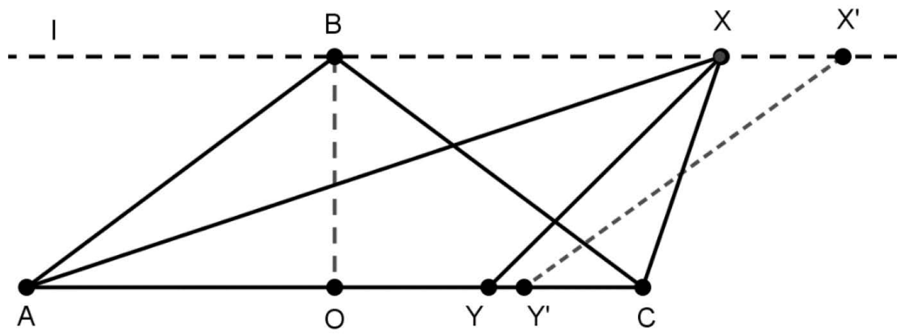

Рис. 4. Рассуждение от противного

Увы, доказательство от противного не получилось ни у автора, ни у СК, и в настоящее время нам неизвестно такое доказательство. Возможно, что оно действительно является сложным. Возможно также, что мы приложили недостаточно сил и времени для его получения. Последнее впрочем, объяснимо, т.к. требовалось завершить решение задачи в рамках учебного года. Опасаясь тупика, мы прибегли к «тяжелой артиллерии» – дифференциальному исчислению.

Трудность использования дифференциального исчисления состояла в том, что его изучение в школе должно было произойти *существенно позже* того момента, когда оно потребовалось для решения задачи, так что СК не мог реализовать свой проект в текущем учебном году. В этих условиях наставнику пришлось прочитать для СК «экспресс-курс» дифференциального исчисления в соответствии со следующей программой: «Задачи, приводящие к понятию производной. Определение производной. Производная суммы, разности, произведения, частного, композиции двух функций. Некоторые формулы из таблицы производных. Достаточные условия монотонности. Достаточное условие экстремума».

Разумеется, перед «экспресс-курсом» не ставилась цель заменить собой полномасштабное изучение дифференциального исчисления. Например, доказательства многих утверждений были заменены кинематическими и/или геометрическими иллюстрациями, свидетельствующими в их пользу, а в таблицу производных попали только те функции, которые впоследствии оказались нужными для дифференцирования. Тем не менее, СК усвоил как теоретические понятия, так и технические навыки. Главное же состояло в следующем: СК оказался настолько глубоко вовлечен в процесс получения математического результата, что был готов освоить любой необходимый объем дополнительных знаний.

Теперь мы можем приступить к проверке гипотезы.

1. Вернемся к рис. 1 и введем на нем систему координат следующим образом: начало координат поместим в точку O, ось абсцисс направим вдоль луча $[OC)$, а ось ординат направим вдоль луча $[OB)$. К прежним обозначениям ($BO \coloneqq h$, $OC \coloneqq b$ и $BC \coloneqq p = \sqrt{h^2+b^2}$) добавим новые: $BX \coloneqq x$ и $OY \coloneqq y$. Теперь точки приобретут следующие координаты:

$$O(0{,}0),\ A(-b,0),\ C(b,0),\ Y(y,0),\ B(0,h),\ X(x,h).$$

2. Рассмотрим треугольник AXC. В нем по свойству биссектрисы $\frac{AY}{YC}=\frac{AX}{XC}$. Проведя замены в соответствии с нашими обозначениями, получаем формулу $\frac{b+y}{b-y}=\frac{AX}{XC}$. Выразив отсюда y, получаем что

$$y=\frac{b\cdot(AX-XC)}{AX+XC}. \tag{1}$$

Выразим длины отрезков через координаты их концов: $AX=\sqrt{(x+b)^2+h^2}$, $CX=\sqrt{(x-b)^2+h^2}$. Подставим найденное значение в формулу (1). Получим, что

$$y=\frac{b\cdot(\sqrt{(x+b)^2+h^2}-(\sqrt{(x-b)^2+h^2})}{\sqrt{(x+b)^2+h^2}+(\sqrt{(x-b)^2+h^2}}. \tag{2}$$

Раскрыв квадраты под знаками радикалов и сгруппировав b^2 и h^2, получим что

$$y=\frac{b\cdot(\sqrt{x^2+2bx+p^2}-\sqrt{x^2-2bx+p^2})}{\sqrt{x^2+2bx+p^2}+\sqrt{x^2-2bx+p^2}}. \tag{3}$$

Формула (3) означает, что мы выразили длину отрезка OY как функцию от длины отрезка BX. Исследуем эту функцию на экстремум методами дифференциального исчисления.

3. Начнем с того, что введем две вспомогательные функции:

$$\varphi(x) = \sqrt{x^2 + 2bx + p^2}, \;\; \psi(x) = \sqrt{x^2 - 2bx + p^2}. \tag{4}$$

Наша первоначальная функция примет вид

$$y = b \cdot \frac{\varphi(x) - \psi(x)}{\varphi(x) + \psi(x)}. \tag{5}$$

Дифференцируя формулы (4), получим, что

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 2bx + p^2}} \cdot (2x + 2b) = \frac{x + b}{\varphi(x)}, \tag{6}$$

$$\psi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 2bx + p^2}} \cdot (2x - 2b) = \frac{x - b}{\psi(x)}. \tag{7}$$

Теперь выразим производную от y, то есть продифференцируем формулу (5). Пользуясь формулой для вычисления производной частного и формулами (6), (7) получим что

$$y' = b \cdot \frac{\big(\varphi'(x) - \psi'(x)\big) \cdot \big(\varphi(x) + \psi(x)\big) - \big(\varphi(x) - \psi(x)\big) \cdot \big(\varphi'(x) + \psi'(x)\big)}{\big(\varphi(x) + \psi(x)\big)^2} =$$

$$= b \cdot \frac{\left(\frac{x + b}{\varphi(x)} - \frac{x - b}{\psi(x)}\right) \cdot (\varphi(x) + \psi(x)) - (\varphi(x) - \psi(x)) \cdot \left(\frac{x + b}{\varphi(x)} + \frac{x - b}{\psi(x)}\right)}{\big(\varphi(x) + \psi(x)\big)^2}$$

Приводя выражение в числителе к общему знаменателю и раскрывая скобки, получаем, что

$$y' = b \cdot \frac{2\psi^2(x)(x + b) - 2\varphi^2(x)(x - b)}{\big(\varphi(x) + \psi(x)\big)^2 \cdot \varphi(x) \cdot \psi(x)}$$

Подставив в числитель выражения $\psi^2(x)$ и $\varphi^2(x)$, раскрыв скобки и вынося общий множитель, получим что

$$y' = b \cdot \frac{2(x - b)(x^2 + 2bx + p^2) + 2(b + x)(x^2 - 2bx + p^2)}{\big(\varphi(x) + \psi(x)\big)^2 \cdot \varphi(x) \cdot \psi(x)} =$$

$$= 2b\,\frac{x^3 - 2bx^2 + p^2x + bx^2 - 2b^2x + bp^2 - x^3 - 2bx^2 - p^2x + bx^2 + 2b^2x + bp^2}{\big(\varphi(x) + \psi(x)\big)^2 \cdot \varphi(x) \cdot \psi(x)}$$

$$= 2b \cdot \frac{2bp^2 - 2bx^2}{\big(\varphi(x) + \psi(x)\big)^2 \cdot \varphi(x) \cdot \psi(x)} = 4b^2 \cdot \frac{p^2 - x^2}{\big(\varphi(x) + \psi(x)\big)^2 \cdot \varphi(x) \cdot \psi(x)}.$$

4. Критические точки функции y находятся легко, поскольку $y' = 0 \Leftrightarrow 4b^2 \cdot \frac{p^2 - x^2}{\big(\varphi(x) + \rho(x)\big)^2 \cdot \varphi(x) \cdot \psi(x)} = 0$. Знаменатель и множитель $4b^2$ отличны от 0, более того, они положительны. Следовательно, точка x является критической тогда и только тогда, когда $p^2 - x^2 = 0$, то есть при $\left[\begin{array}{l} x = p \\ x = -p \end{array}\right.$.

5. Очевидно, что знак y' совпадает со знаком выражения $p^2 - x^2$. Отсюда следует, что

$$y' < 0 \text{ при } x \in (-\infty; -p) \cup (p; \infty),$$
$$y' > 0 \text{ при } x \in (-p; p).$$

Это означает, что в точке p достигается локальный максимум (производная меняет знак с плюса на минус), а в точке $-p$ достигается локальный минимум (производная меняет знак с минуса на плюс).

На геометрическом языке полученный результат означает, что расстояние OY достигает своего максимального значения в том случае, когда расстояние BX равно гипотенузе p исходного треугольника. ***Таким образом, наша гипотеза, правдоподобная, но ненадежная, оказалась истинной.***

Получим теперь некоторые дополнительные результаты.

6. Вычислим максимальное значение функции y. Предыдущие рассуждения показывают, что $y_{max} = y(p) = \frac{b\cdot\left(\sqrt{p^2+2bp+p^2}-\sqrt{p^2-2bp+p^2}\right)}{\sqrt{p^2+2bp+p^2}+\sqrt{p^2-2bp+p^2}}$.

Приведем подобные члены под знаками радикалов, вынесем за скобки выражение $\sqrt{2p}$ в числителе и знаменателе и сократим на него. Получим, что $y_{max} = y(p) = \frac{b\cdot(\sqrt{p+b}-\sqrt{p-b})}{\sqrt{p+b}+\sqrt{p-b}}$. Избавимся от иррациональности в знаменателе путем умножения числителя и знаменателя на выражение, сопряженное знаменателю. Получим, что $y_{max} = y(p) = \frac{b\cdot(\sqrt{p+b}-\sqrt{p-b})^2}{b+p-p+b} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{p+b}-\sqrt{p-b}\right)^2$. Возведем в квадрат выражение в скобках, приведем подобные члены и воспользуемся равенством $\sqrt{p^2-b^2} = h$. Получим, что $y_{max} = y(p) = p - \sqrt{p^2-b^2} = p - h = BC - BO$.

Теперь результаты всех проделанных рассуждений можно кратко суммировать в виде теоремы.

Теорема. Точка Y находится на максимальном удалении от середины отрезка AC при $BX = BC$. При этом $OY = BC - BO$.

Тем самым получен ответ на вопрос **Задачи,** поставленной в разделе 1.

Следствие. В принятых обозначениях максимальное значение индекса разносторонности угла X вычисляется по формуле $i_{max} = MY/2b$.

7. Теперь отрезок OY можно построить циркулем и линейкой с помощью следующего алгоритма.

а) Построим окружность ω с центром B и радиусом BC (рис. 5).

б) Окружность ω пересечет продолжение отрезка BO в точке Z.

в) Построим окружность ω_1 с центром O и радиусом OZ.

г) Окружность ω_1 пересечет AC в двух точках, которые и являются искомыми.

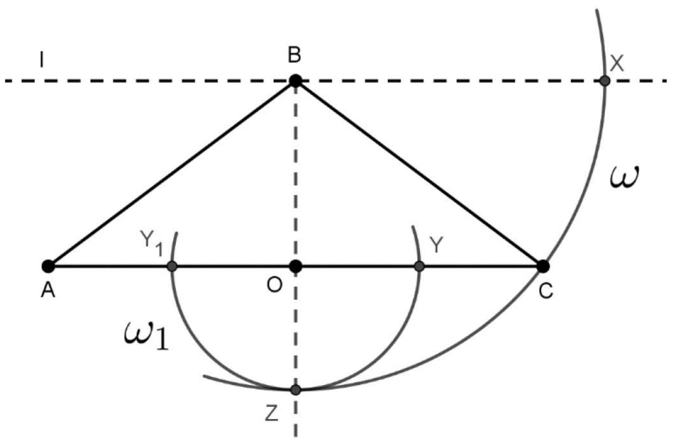

Рис. 5. Построение экстремальных точек

Педагогическая рефлексия

В последние два с небольшим десятилетия в России сложилась система научных конференций школьников, на которых результаты их личных исследований могут быть обнародованы, оценены и введены в научный оборот. Примерами таких конференций могут служить Межрегиональная конференция «Школьные Харитоновские чтения», Международная научная конференция школьников «Колмогоровские чтения», Российская научная конференция школьников «Открытие», которые функционируют в течение 20-ти, 20-ти и 23-х лет соответственно.

Длительная жизнь и привлекательность научных конференций школьников порождают целый ряд вопросов. Первый из них, об источнике исследовательских задач для школьников, обсуждался в работах автора [1–3] и в настоящей статье. Здесь мы не будем разрабатывать этот вопрос, а заметим только, что он носит «вечный» характер и для каждой конкретной педагогической ситуации должен иметь индивидуальное решение. Действительно, исследовательская задача, будучи однажды поставленной и решенной, утрачивает характер новизны и не может быть повторно предъявлена другому школьнику в неизменном виде.

Второй вопрос порожден следующей дилеммой. Если поставить перед школьником задачу, не решенную предварительно научным руководителем, то существует большой риск тотальной неудачи, когда ни школьник, ни руководитель не сумеют решить ее в разумные строки. (Именно так и случилось при попытке решить нашу задачу методом от противного.) Если же руководитель предварительно решит задачу, то непонятно, на каком основании деятельность школьника считается самостоятельным научным исследованием.

Одна из целей настоящей статьи состояла в том, чтобы предоставить читателю конкретный материал для его собственного, индивидуального разрешения сформулированной дилеммы. Именно для этого мы и описывали столь подробно все перипетии получения основного результата. Изложим содержание статьи в обобщенном виде, подчеркивая при этом справедливость двух конкурирующих и даже противоречащих друг другу утверждений: 1) результат получен школьником самостоятельно; 2) результат не мог быть получен школьником без участия наставника.

Да, именно наставник познакомил СК с журналом «Математическое образование» и со статьей [1]; в противном случае никакого исследования не состоялось бы. Однако СК самостоятельно прочел статью и полностью усвоил ее содержание. Именно наставник показал, как эксперимент порождает новую задачу, решаемую в статье [1], а также предложил поставить новую задачу. Однако СК практически самостоятельно поставил задачу, сформулированную в разделе 1. Наставник спланировал серию экспериментов, однако именно СК начал выполнять их и выполнил такой их объем, который оказался достаточным для решения задачи. Когда над нашей командой нависла угроза неудачи, наставник предпринял усилия для поддержания интереса к исследованию, однако именно СК «дотерпел» до получения первого «хорошего» результата, позволившего сформулировать правдоподобную гипотезу. Такие рассуждения можно провести в отношении всех «поворотных пунктов» того решения задачи, которое было приведено выше.

Если позволить себе фигуральное рассуждение и сравнить математическое исследование школьника с научной экспедицией, то можно сказать следующее: наставник – это штурман, указывающий направление движения, а школьник – это капитан и матрос одновременно; именно капитан и команда должны достичь цели путешествия.

В заключение процитируем выводы, которые делает СК в своей работе: «… Несколько обстоятельств оказались для меня новыми и неожиданными. Во-первых, мне никогда не приходилось проводить компьютерные эксперименты. Во-вторых, оказалось неожиданным то, что мне так повезло, и правдоподобная гипотеза превратилась в доказанную теорему. В-третьих, по ходу работы возникла необходимость изучить основы дифференциального исчисления …» Автор присоединяется к этой оценке, объективной и романтической одновременно.

Список литературы

1. Ястребов А.В. Числовая мера разносторонности треугольника // Математическое образование. 2017. № 3. С. 51-59.
2. Ястребов А. В. Неравенства Ки Фана в исследованиях школьников // Теоретические и прикладные аспекты математики, информатики и образования: материалы Международной научной конференции (Архангельск, 16-21 ноября 2014 г.). Архангельск: САФУ, 2014. С. 126-131.
3. Ястребов А. В. Школьный учебник как источник исследовательских задач // Учебный год. 2007. Вып. 1. С. 72-77.

SCALENE INDEX AND ITS EXTREMUM, OR HIGH-SCHOOL STUDENT'S MENTOR AS A "NAVIGATOR" OF A RESEARCH

A.V. Yastrebov
Dr. Sci. (Pedagogy), professor
alexander.yastrebov47@gmail.com
Yaroslavl

Yaroslavl State Pedagogical University named after K.D. Ushinski

Abstract. The present pater is devoted to the work of a mentor, who supervises a high-school student's research. Two questions are under consideration: 1) what is the origin of research mathematical problems for high-school students? 2) what is the best way to distribute functions within a team "mentor–mentee"? A pedagogical aspect of the paper has a mathematical background. We consider a computer experiment, which generated a notion "scalene index of a triangle" some years ago [1]. In the present paper we consider another problem: what is the extremal value of the scalene index?

Keywords: high-school student's research, mentor, scalene index of a triangle, extremum.

References

1. Yastrebov, A.V. (2017). Numeric Measure of a Triangle Sides' Diversification [*Chislovaya mera raznostoronnosti treugolnika*]. *Mathematical Education*, 3, 51-59.
2. Yastrebov, A.V. (2014). Ky Fan's Inequality in School-Students' Research [*Neravenstva Ki Fana v issledovaniyakh shkolnikov*]. In: Theoretical and Applied Aspects of Mathematics, Informatics, and Education: Proceedings of International Conference. Arkhangelsk, SAFU, 126-131.
3. Yastrebov, A.V. (2007). School Textbook as a Souse of Investigative Problems [*Shkolni uchebnik kak istochnik issledovatelskikh zadach*]. Academic Year, 1, 72-77.