ПРИКЛАДНЫЕ АСПЕКТЫ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

DOI: 10.24888/2500-1957-2020-3-84-89

УДК 519.651

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ НАХОЖДЕНИЯ ГАРМОНИЧЕСКОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Юрий Александрович Гайдов
к.ф.-м.н.
gja822@yandex.ru
г. Новосибирск

Новосибирский государственный педагогический университет

Аннотация. В статье рассматривается задача аппроксимации кусочно-непрерывной функции простейшей тригонометрической функцией (тригонометрическим полиномом первого порядка). Такого рода приближения широко используются, например, в задачах сжатия данных, при исследовании функций. Отличие от традиционного подхода заключается в нахождении наилучшей частоты, а не выборе из обратных кратным интервалу приближения периодов. Наилучшее приближение в статье рассматривается в смысле квадратичной интегральной метрики L2. Показано, что задача сводится к отысканию минимума функции одной переменной – частоты, с помощью найденных выражений критических значений амплитуды и сдвига фазы. Явно приведен вид этой функции частоты (зависящей от входной информации посредством интегралов типа косинус- и синус-преобразования Фурье). Для дискретной входной информации предложено кусочно-линейная интерполяция исходной функции. Для такого случая проведено численное исследование функции частоты на примере отрезка звукового файла. Указаны возможные проблемы дальнейшего исследования этой задачи. Автор полагает, что статья также может быть полезна студентам математических направлений в качестве демонстрации комплексного подхода с привлечением знаний из разных разделов математики и информатики.

Ключевые слова: квадратичная аппроксимация, гармоническая функция, тригонометрическое приближение, наилучшая частота, кусочно-линейная функция.

Хорошо известно, что информация о спектральных характеристиках функции часто оказывается весьма полезной. В частности, она широко используется при сжатии данных. Например, в форматах сжатия звуковой информации Mpeg Layer–3 [5] и многих других применяется так называемое быстрое преобразование Фурье [1], дающее информацию о спектре сигнала. Также, часто возникает необходимость нахождения характеристик периодических и близких к ним функций. Скажем, периода траекторий циклических решений неких моделей, описываемых динамическими системами [2]. В классическом разложении в ряд Фурье [3], как известно, предполагается известным период функции, в применениях быстрого дискретного преобразования Фурье реальный период, чаще всего, не ищется, однако, в результате получаются некоторые близкие к нему значения.

В предлагаемой работе ставится задача наилучшего в квадратичном смысле приближения функции с помощью простейшей гармонической функции. А именно, нахождения таких параметров A, ω и α, именуемых в дальнейшем амплитудой, частотой и сдвигом фазы соответственно, которые минимизируют интеграл

$$\int_0^T (f(t) - A\cos(\omega t + \alpha))^2 dt \to \min_{\substack{A \geq 0 \\ \alpha \in [0, 2\pi) \\ \omega \geq 0}}. \tag{1}$$

Раскрывая квадрат разности, заметим, что первое слагаемое $\int_0^T f^2(t)dt$ не зависит от параметров минимизации, а третье слагаемое, не содержащее $f(t)$, можно записать, вычислив интеграл. Оставшиеся после раскрытия скобок левой части (1) слагаемые назовем целевой функцией и обозначим

$$\Phi \coloneqq -2A\int_0^T f(t)\cos(\omega t + \alpha)\,dt + \frac{A^2}{4\omega}(\sin 2(\omega T + \alpha) - \sin 2\alpha) + \frac{A^2 T}{2}. \tag{2}$$

Традиционно начнем решение оптимизационной задачи с отыскания стационарных точек, в которых градиент целевой функции зануляется $\nabla\Phi = \mathbf{0}$ по веденным нами параметрам.

Нахождение амплитуды. Наиболее простой нам кажется частная производная по параметру A:

$$\partial_A \Phi = -2\int_0^T f(t)\cos(\omega t + \alpha)\,dt + \frac{A}{2\omega}(\sin 2(\omega T + \alpha) - \sin 2\alpha) + AT.$$

Сначала *рассмотрим случай* $\omega \neq 0$. Из условия $\partial_A \Phi = 0$ выразим критический параметр A_*:

$$A_* = \frac{4\omega \int_0^T f(t)\cos(\omega t + \alpha)\,dt}{(\sin 2(\omega T + \alpha) - \sin 2\alpha) + 2\omega T}. \tag{3}$$

Проверим корректность этой формулы. Преобразуем выражение, стоящее в знаменателе дроби (3):

$$\begin{aligned}(\sin 2(\omega T + \alpha) - \sin 2\alpha) + 2\omega T &= \sin 2\omega T\cos 2\alpha + \sin 2\alpha\,(\cos 2\omega T - 1) + 2\omega T \\ &= 2\sin\omega T\cos\omega T\cos 2\alpha - 2\sin 2\alpha\sin^2\omega T + 2\omega T.\end{aligned}$$

Покажем, что

$$\omega T > \sin\omega T\cos(\omega T + 2\alpha). \tag{4}$$

При $\sin\omega T = 0$ последнее неравенство очевидно. Выпишем цепочку неравенств, доказывающих (4) в остальных рассматриваемых нами случаях: $\omega T = |\omega T| > |\sin\omega T| \geq |\sin\omega T| \cdot |\cos(\omega T + 2\alpha)| \geq \sin\omega T\cos(\omega T + 2\alpha)$. Тем самым корректность формулы (3) при $\omega \neq 0$ показана.

В случае $\omega = 0$ оптимизационная задача (1) вырождается в приближение функции константой $\int_0^T (f(t) - B)^2 dt \to \min\limits_{B \in \mathbb{R}}$. Последняя же задача решается совсем просто:

$$B = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt. \tag{5}$$

Посему можем держать в уме этот вариант, проверяя в конце, не окажется ли константа лучшим приближением, чем то что получено в основном случае.

Продолжим изучать основной случай $\omega \neq 0$. Исключим из функционала Φ параметр A, подставив в (2) критическое значение (3). После упрощения получим:

$$\widetilde{\Phi} := -\frac{4\omega\left(\int_0^T f(t)\cos(\omega t+\alpha)\,dt\right)^2}{\sin 2(\omega T+\alpha)-\sin 2\alpha+2\omega T}. \tag{6}$$

Нахождение сдвига фазы. Найдем частную производную $\widetilde{\Phi}$ по α. После преобразования имеем:

$$\begin{aligned}\partial_\alpha\widetilde{\Phi} = &\frac{8\omega\left(\int_0^T f(t)\cos(\omega t+\alpha)\,dt\right)}{(\sin 2(\omega T+\alpha)-\sin 2\alpha+2\omega T)^2}\\ &\cdot\left[(\sin 2(\omega T+\alpha)-\sin 2\alpha+2\omega T)\int_0^T f(t)\sin(\omega t+\alpha)\,dt\right.\\ &\left.+(\cos 2(\omega T+\alpha)-\cos 2\alpha)\int_0^T f(t)\cos(\omega t+\alpha)\,dt\right].\end{aligned}$$

Знаменатель первого сомножителя, как мы увидели выше, не равен нулю при $\omega \neq 0$. Если же интеграл в числителе первого сомножителя выражения равен нулю, то нетрудно заметить, что тогда и функция $\widetilde{\Phi} = 0$, что в силу (4) является ее максимальным значением и не подходит для решения задачи минимизации. Поэтому рассмотрим задачу равенства нулю выражения, стоящего в квадратных скобках. Для краткости сделаем обозначения: $x = \cos\alpha$, $y = \sin\alpha$,

$$a_1 = \int_0^T f(t)\cos\omega t\,dt,\ b_1 = \int_0^T f(t)\sin\omega t\,dt. \tag{7}$$

(Можно заметить, что a_1 и b_1 являются косинус- и синус-преобразованиями Фурье функции $f(t)$ с носителем на отрезке $[0,T]$ точностью до множителя.) Тогда, раскрывая синусы и косинусы сумм выражения в квадратных скобках для $\partial_\alpha\widetilde{\Phi}$, получим уравнение:

$$ax + by + cx(x^2-y^2) + dy(x^2-y^2) + ex\cdot 2xy + gy\cdot 2xy = 0,$$

где a, b, c, d, e, g – коэффициенты, зависящие от ωT, a_1, b_1 и не содержащие x и y. Группируя члены с коэффициентами c, g и пользуясь основным тригонометрическим тождеством $x^2+y^2=1$, затем аналогично, группируя члены с коэффициентами d, e, получим в итоге линейное относительно x и y однородное тригонометрическое уравнение:

$$Cx - Dy = 0,$$

где коэффициенты равны:

$$\begin{aligned}C &= a_1\cdot(\cos 2\omega T-1)+b_1\cdot(\sin 2\omega T+2\omega T),\\ D &= a_1\cdot(\sin 2\omega T-2\omega T)-b_1\cdot(\cos 2\omega T-1).\end{aligned} \tag{8}$$

Можно показать, что оба коэффициента оказываются равными нулю одновременно лишь при $a_1 = b_1 = 0$, а, следовательно, $\widetilde{\Phi} = 0$, то есть при максимальном значении целевой функции, что нас не интересует. Если же хотя бы один из коэффициентов C или D не равен нулю, то, возвращаясь к переменной α, имеем:

$$\cos\alpha = \pm\frac{D}{\sqrt{C^2+D^2}}, \sin\alpha = \pm\frac{C}{\sqrt{C^2+D^2}}. \tag{9}$$

Знак в данных формулах следует выбирать тот, при котором параметр A_*, определяемый из равенства (3), окажется положительным, согласно его определению. То есть должно выполняться неравенство, следующее из числителя (3): $a_1\cos\alpha - b_1\sin\alpha > 0$, эквивалентное неравенству $\pm(a_1 D - b_1 C) > 0$, где знак совпадает со знаком в формулах (9). Значение целевой функции при этом не зависит от выбора знака в (9).

Нахождение частоты. Подстановкой найденных значений синуса и косинуса сдвига фазы, целевая функция $\widetilde{\Phi}$ из (6) становится функцией единственной переменной ω (здесь мы также числитель и знаменатель домножаем на $C^2 + D^2$):

$$\widetilde{\widetilde{\Phi}} := -\frac{4\omega(a_1 D - b_1 C)^2}{(D^2 - C^2)\sin 2\omega T + 2DC(\cos 2\omega T - 1) + 2\omega T(C^2 + D^2)}, \qquad (10)$$

где $a_1 = a_1(\omega)$, $b_1 = b_1(\omega)$, $D = D(\omega)$, $C = C(\omega)$ – определенные выше в (7) и (8) функции.

Минимум функции $\widetilde{\widetilde{\Phi}}$ предлагается искать численно. Для случая звуковых файлов предварительно аппроксимировав непрерывную функцию звукового давления по дискретной информации из LPCM файла (например, кусочно-линейно, или, применяя сплайн более высокого порядка [4]). Можем отметить, что входная информация $f(t)$ входит в функцию (10) только посредством интегралов a_1 и b_1.

Используя обозначения (7), (9) и (10), запишем критическое значение A_* из (3):

$$A_* = \frac{\pm 4\omega(a_1 D - b_1 C)\sqrt{C^2 + D^2}}{(D^2 - C^2)\sin 2\omega T + 2DC(\cos 2\omega T - 1) + 2\omega T(C^2 + D^2)} = \frac{\mp\sqrt{C^2 + D^2}}{(a_1 D - b_1 C)}\widetilde{\widetilde{\Phi}}.$$

В заключение приведем пример графика функции $\widetilde{\widetilde{\Phi}}$ (в логарифмическом по частоте масштабе), полученной из части звукового файла (органный аккорд) с применением кусочно-линейной интерполяции дискретной функции $f(t)$.

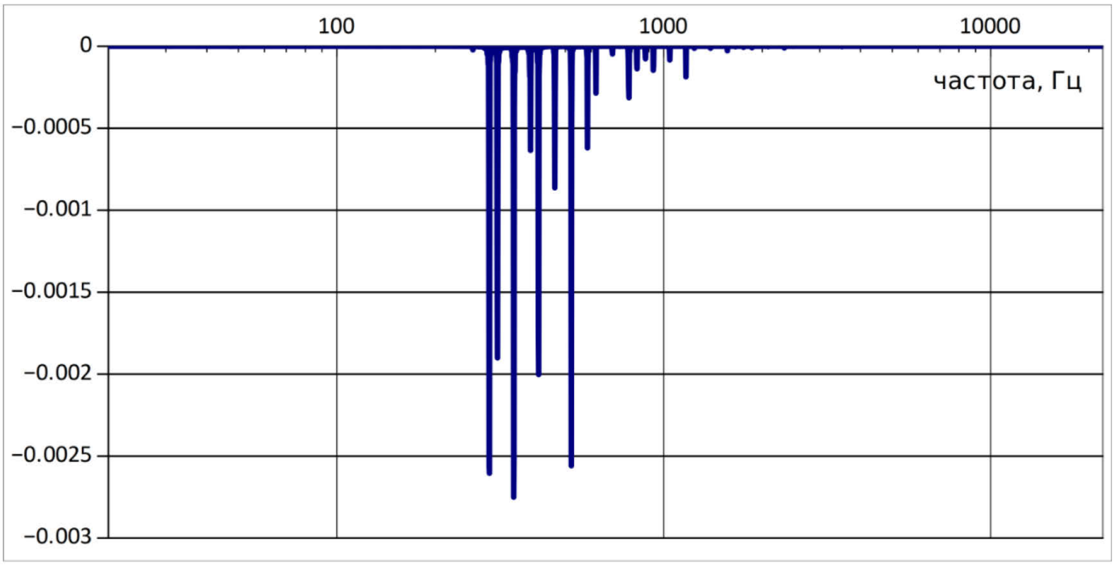

Рис. 1. Пример функции $\widetilde{\widetilde{\Phi}}$

Из вида графика функции можно понять некоторую сложность поиска ее минимума. Если же детально посмотреть на окрестность минимума (Рис. 2), то дополнительно можно заметить и характерные для функции $\widetilde{\widetilde{\Phi}}(\omega)$ осцилляции, объясняемые членами вида $\cos 2\omega T$ и $\sin 2\omega T$ при относительно больших значениях T.

Для построения графиков и тестирования применялся метод последовательного перебора ω с логарифмически равномерным шагом с 3072 отсчетами и дальнейшим уточнением найденного минимального из взятых на сетке значений методом Ньютона (используя поиск нуля производной функции $\widetilde{\widetilde{\Phi}}$, благодаря кусочно-полиномиальной интерполяции саму функцию $\widetilde{\widetilde{\Phi}}$ и ее производные находим аналитически).

Рис. 2. Увеличенная часть графика рис. 1 на интервале от 320 до 370 Гц

Автор считает, что результаты могут быть полезны для исследования периодических процессов, аппроксимации простейшими тригонометрическими функциями, для сжатия информации. Функция $\tilde{\tilde{\Phi}}$ требует дополнительного изучения, также остаются вопросы обоснованности применения сплайнов более высокого порядка и гладкости в данном вопросе.

Список литературы

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Наука, 1987.
2. Гайдов Ю.А., Голубятников В.П., Голубятников И.В. О циклах в нелинейных динамических системах специального вида // Ломоносовские чтения на Алтае: Сборник научных статей международной школы-семинара: в 4 частях. Под редакцией Родионова Е.Д., Барнаул: Алт. гос. пед. академия, 2012. С. 272-278.
3. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981.
4. Роженко А.И. Вариационные сплайны. Алгоритмы построения. Новосибирск: НГУ, 2009.
5. Brandenburg, Karlheinz, Bosi, Marina. MP3 and AAC Explained // Proc. Audio Engineering Society Conference: 17th International Conference: High-Quality Audio Coding. 1999. URL: http://www.aes.org/e-lib/browse.cfm?elib=8079 (дата обращения: 14.07.2020)

ON ONE METHOD OF HARMINIC APPROXIMATION

Yu.A. Gaidov
Kand. Sci. (Mathematics)
gja822@yandex.ru
Novosibirsk

Novosibirsk State Pedagogical University

Abstract. The article concerns the problem of an approximation of a piecewise-linear function with the simplest trigonometric function (trigonometric polynomial of the first order). Such approximations are widely used in data compression or in function analysis, for example. The difference from traditional approach is in finding the best-suited frequency, and not only choosing from inverse multiples of the length of approximation interval. The best approximation in this article is considered in the sense of integral quadratic L2 norm. It is shown that the problem can be reduced to the problem of searching the minimum of a function of one real variable. The latter variable is named frequency, and expressions for the critical values of amplitude and phase are found. The explicit form of the function which minimum gives the best frequency is found. Dependency of this function of the input data occurs by the means of integrals of an input function of the type of cosine- and sine-Fourier transform of an input data. For discrete input data, it is assumed to use piecewise-linear approximation. For such case numerical investigation was performed. A chunk of audio file was chosen as the input data. Probable further issues of the problem are pointed out on the basis of obtained results. Author considers this article as a useful example for math students of complex approach to mathematical problem solving involving not only different mathematical disciplines but also computer science applications.

Keywords: quadratic approximation, harmonic function, trigonometric approximation, best frequency, piecewise-linear function.

References

1. Bakhvalov, N.S., Zhidkov, N.P., Kobelkov, G.V. (1987). Numerical methods [*Chislennye metody*]. Moscow.
2. Brandenburg, K., Bosi, M. (1999). MP3 and AAC Explained. Proc. Audio Engineering Society Conference: 17th International Conference: High-Quality Audio Coding. URL: http://www.aes.org/e-lib/browse.cfm?elib=8079 (accessed 14.07.2020).
3. Gaidov, Yu.A., Golubyatnikov, V.P., Golubyatnikov, I.V. (2012). On Cycles in Nonlinear Dynamical Systems of Special Type [*O tsiklakh v nelineynykh dinamicheskikh sistemakh spetsial'nogo vida*]. In: Proceedings Lomonosov Readings on Altai. Barnaul, Altai, 272-278.
4. Kolmogorov, A.N., Fomin, S.V. (1999). Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis [*Elementy teorii funkcij i funkcional'nogo analiza*]. Moscow.
5. Rozhenko, A.I. (2009). Variational Splines. Algorythms of Construction [*Variatsionnye splayny. Algoritmy postroeniya*] Novosibirsk.