DOI: 10.24888/2500-1957-2020-3-90-101

УДК 517.956.6

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛОКАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

Александр Николаевич Зарубин
д.ф.-м.н., профессор
matdiff@yandex.ru
г. Орел
Елена Викторовна Чаплыгина
к.ф.-м.н., доцент
lena260581@yandex.ru
г. Орел

Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева

Аннотация. Исследуется начально-краевая задача Трикоми для нелокального уравнения смешанного типа Лаврентьева-Бицадзе. Задача однозначно разрешима.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, дифференциально-разностное уравнение, сосредоточенное запаздывание и опережение.

Введение

Дифференциально-разностные уравнения смешанного типа [3] служат математическими моделям для многих прикладных задач теории многослойных оболочек и пластин [6], теории плазмы [7], исследованиях колебаний кристаллической решетки [5] и др.

Предлагаемая работа посвящена изучению задачи Трикоми для нелокального уравнения Лаврентьева-Бицадзе с сосредоточенными некарлемановскими запаздываниями и опережениями по пространственной и временной переменным вида

$$((sgn\, y)u_{yy}(x,y) + \sum_{k=-1}^{1}\sum_{n=-1}^{1} a_{n+1,k+1} H((-1)^{\frac{k-1}{2}} k(y + \frac{(k-1)h}{2})) \cdot \\ \cdot u_{xx}(x - n\tau, y + kh) = 0 \tag{1}$$

в области $D = D^+ \cup D^- \cup I^0$, где $D^+ = \{(x,y): 0 < x < 2\tau, 0 < y < 2h\} = \cup_{k=0}^{1}(\cup_{j=0}^{1} D_{kj}^+)$ и $D^- = \cup_{k=0}^{1} D_{ko}^- = \cup_{k=0}^{1}\left(\cup_{j=0}^{1} D_{ko}^{\gamma_{jo}}\right) -$ эллиптическая и гиперболическая части области D, причем $D_{kj}^+ = \{(x,y): k\tau < x < (k+1)\tau, jh < y < (j+1)h\}(k = -\overline{1,2}; j=0,1,2); 0 < \tau, h$; $a_{n+1,k+1} \equiv const$; $H(\xi)$ −функция Хевисайда;

$$D_{ko}^{\gamma_{jo}} = \left\{(x,y): -y\gamma_{jo} + k\tau < x < \ y\gamma_{jo} + (k+1)\tau; -\frac{\tau}{2\gamma_{jo}} < y < 0\right\}$$

$(k = -\overline{1,2}; j = 0,1)$; γ_{jk}^2 −собственные значения матрицы коэффициентов $a_{n+1,k+1}$ уравнения (1).

Пусть $D_k = D_{ko}^- \cup_{j=0}^{1} D_{kj}^+ \cup_{l=0}^{1} I_k^l\ (k = -\overline{1,2})$; $I^l = \cup_{k=0}^{1} I_k^l$,
$I_k^l = \{(x,y): k\tau < x < (k+1)\tau, y = lh\}(l = 0,1)$; $J = \{(x,y): x = \tau, 0 < y < 2h\}$.

Тогда $D = \cup_{k=0}^{1} D_k \cup J$.

Постановка задачи. Редукция

Дифференциально-разностное уравнение смешанного типа (1) запишем в виде

$$(sgn\, y)u_{yy}(x,y)+$$
$$+\sum_{k=-1}^{1} H\left((-1)^{\frac{k-1}{2}}k\left(y+\frac{(k-1)h}{2}\right)\right)[a_{0(k+1)}u_{xx}(x+\tau,y+kh)+ \tag{2}$$
$$+a_{1(k+1)}u_{xx}(x,y+kh)+a_{2(k+1)}u_{xx}(x-\tau,y+kh)]=0,(x,y)\epsilon D.$$

Задача T. Найти в области $D = D_0 \cup D_1 \cup J$ решение

$$u(x,y)\epsilon C(\overline{D}) \cap C^2(D/(J\bigcup_{l=0}^{1} I^l))$$

уравнения (2), удовлетворяющее условиям

$$u(x,y)=r(x,y),(x,y)\epsilon\overline{D}_{-1}; \tag{3}$$

$$u(x,y)=\rho(x,y),(x,y)\in\overline{D}_2; \tag{4}$$

$$u(x,y)=\delta(x,y),(x,y)\in\overline{\bigcup_{k=0}^{1} D_{k2}^{+}}; \tag{5}$$

$$u\left(x,\frac{k\tau-x}{\gamma_{jo}}\right)=\Psi_{kj}(x),k\tau\le x\le\frac{(2k+1)\tau}{2};(j,k=0,1); \tag{6}$$

условиям сопряжения

$$u(x,0-)=u(x,0+)=\omega(x),0\le x\le 2\tau; \tag{7}$$

$$u_y(x,0-)=u_y(x,0+)=\nu(x),0<x<2\tau,x\ne\tau; \tag{8}$$

причем

$$\Psi_{oj}(0)=r(0,0);r(0,2h)=\delta(0,2h);\rho(2\tau,2h)=\delta(2\tau,2h); \tag{9}$$

$$r(0,y)=\rho(2\tau,y),0\le y\le 2h;\gamma_{jk}^2=a_{11}+(-1)^j a_{01}+H(y)(-1)^k(a_{10}+(-1)^j a_{00})$$

$(j,k=0,1)$ – собственные значения матрицы коэффициентов уравнения (2), где $r(x,y)$, $\rho(x,y),\delta(x,y),\Psi_{kj}(x)$ – заданные непрерывные достаточно гладкие функции; $\omega(x),\nu(x)$ – функции, подлежащие определению в процессе решения задачи.

Теорема 1. Если $r(x,y)\in C(\overline{D}_{-1})\bigcap C^4(D_{-1});\rho(x,y)\in C(\overline{D}_2)\cap C^4(D_2)$;

$$\delta(x,y)\in C(\overline{\bigcup_{k=0}^{1} D_{k2)}^{+}}\cap C^4\left(\bigcup_{k=0}^{1} D_{k2}^{+}\right);\Psi_{kj}(x)\in C\left[k\tau,\frac{(2k+1)\tau}{2}\right]\bigcap C^2\left(k\tau,\frac{(2k+1)\tau}{2}\right)$$
$$(k,j=0,1);a_{oj}=a_{2j};a_{1j}>a_{0j}>0(j=0,1,2);$$
$$a_{jo}=a_{j2};a_{11}+(-1)^j a_{01}>a_{10}+(-1)^j a_{00}>0$$
$$(j=0,1);r(0,y)=\rho(2\tau,y),0\le y\le 2h;r(0,0)=\Psi_{oj}(0);r(0,2h)=\delta(0,2h);$$

$\rho(2\tau,2h)=\delta(2\tau,2h)$, то существует единственное решение задачи T.

Доказательство.

Произведем редукцию опережающе-запаздывающего уравнения смешанного типа (2), сначала к системе двух уравнений смешанного типа без отклонений по переменной x , а затем к системе четырех уравнений смешанного типа без отклонений и по аргументу y .

В терминах функций

$$u_k(x,y) = u(x,y), (x,y) \in D_k (k = -\overline{1,2}) \tag{10}$$

запишем уравнение (2): в области D_0 , учтя (3), в виде

$$\begin{gathered}(sgn\, y) u_{0yy}(x,y) + \\ + \sum_{k=-1}^{1} H((-1)^{\frac{k-1}{2}} k \left(y + \frac{(k-1)h}{2}\right) [a_{0(k+1)} u_{1xx}(x+\tau, y+kh) + \\ + a_{1(k+1)} u_{0xx}(x, y+kh) + a_{2(k+1)} r_{xx}(x-\tau, y+kh)] = 0, (x,y) \in D_0;\end{gathered} \tag{11}$$

а в области D_1, переведя её заменой x на $x+\tau$ в D_0, учтя (4), в форме

$$\begin{gathered}(sgn\, y) u_{1yy}(x+\tau,y) + \sum_{k=-1}^{1} H\left((-1)^{\frac{k-1}{2}} k \left(y + (k-1)\frac{h}{2}\right)\right) \cdot \\ \cdot [a_{0(k+1)} \rho_{xx}(x+2\tau, y+kh) + a_{1(k+1)} u_{1xx}(x+\tau, y+kh) + \\ + a_{2(k+1)} u_{2(k+1)} u_{oxx}(x, y+kh)] = 0, (x,y) \in D_0;\end{gathered} \tag{12}$$

Пусть $a_{2(k+1)} = a_{0(k+1)} (k = -\overline{1,1})$. Складывая и вычитая (11), (12), получим два отдельных уравнения смешанного типа без отклонений по переменной x:

$$\begin{gathered}(sgn\, y)[u_0(x,y) + (-1)^j u_1(x+\tau,y)]_{yy} + \\ + \sum_{k=-1}^{1} H((-1)^{\frac{k-1}{2}} k \left(y + \frac{(k-1)h}{2}\right))(a_{1(k+1)} + (-1)^j a_{0(k+1)}) \cdot \\ \cdot [u_0(x, y+kh) + (-1)^j u_1(x+\tau, y+kh)]_{xx} = \\ = -\sum_{k=-1}^{1} H((-1)^{\frac{k-1}{2}} k \left(y + \frac{(k-1)h}{2}\right)) a_{0(k+1)} \\ [r(x-\tau, y+kh) + (-1)^j \rho(x+2\tau, y+kh)]_{xx},\ (x,y) \in D_0 (j = 0,1).\end{gathered} \tag{13}$$

Уравнение (13) в области D_{00}^- является гиперболическим без отклонения аргументов

$$\begin{gathered}-[u_{00}(x,y) + (-1)^j u_{10}(x+\tau,y)]_{yy} + \\ + \left(a_{11} + (-1)^j a_{01}\right)[u_{00}(x,y) + (-1)^j u_{10}(x+\tau,y)]_{xx} = \\ = -a_{01}[r(x-\tau,y) + (-1)^j \rho(x+2\tau,y)]_{xx}, \\ (x,y) \in D_{00}^- \subset D_0 (j = 0,1).\end{gathered} \tag{14}$$

Здесь, также как в (10),

$$u_{kj}(x,y) = u_k(x,y) = u(x,y), (x,y) \in D_{kj} (k,j = 0,1). \tag{15}$$

В терминах функций (15) запишем уравнение (13): в области D_{00}^+ в виде

$$\begin{gathered}[u_{00}(x,y) + (-1)^j u_{10}(x+\tau,y)]_{yy} + (a_{11} + (-1)^j a_{01})[u_{00}(x,y) + (-1)^j u_{10}(x+\tau,y)]_{xx} + \\ + H(y)\left(a_{12} + (-1)^j a_{02}\right)[u_{01}(x,y+h) + (-1)^j u_{11}(x+\tau,y+h)]_{xx} =\end{gathered} \tag{16}$$

$$= -a_{01}[r(x-\tau,y) + (-1)^j\rho(x+2\tau,y)]_{xx} -$$
$$-H(y)a_{02}[r(x-\tau,y+h) + (-1)^j\rho(x+2\tau,y+h)]_{xx},$$
$$(x,y) \in D_{00}^{+} (j=0,1);$$

а в области D_{01}^{+}, переведя её заменой y на $y+h$ в D_{00}^{+}, учтя (5), в форме

$$[u_{01}(x,y+h) + (-1)^j u_{11}(x+\tau,y+h)]_{yy} + H(y)\big(a_{10} + (-1)^j a_{00}\big)\cdot$$
$$\cdot [u_{00}(x,y) + (-1)^j u_{10}(x+\tau,y)]_{xx} +$$
$$+\big(a_{11} + (-1)^j a_{01}\big)[u_{01}(x,y+h) + (-1)^j u_{11}(x+\tau,y+h)]_{xx} = \quad (17)$$
$$= -H(y+h)(a_{12} + (-1)^j a_{02})[\delta(x,y+2h) + (-1)^j\delta(x+\tau,y+2h)]_{xx} -$$
$$-H(y+h)a_{02}[r(x-\tau,y+2h) + (-1)^j\rho(x+2\tau,y+2h)]_{xx},$$
$$(x,y) \in D_{00}^{+} (j=0,1).$$

Пусть

$$a_{10} + (-1)^j a_{00} = a_{12} + (-1)^j a_{02}. \quad (18)$$

Складывая и вычитая (16), (17), в силу (18), получим четыре отдельных уравнения без отклонений эллиптического типа

$$\{\big[u_{00}(x,y) + (-1)^j u_{10}(x+\tau,y) + (-1)^k\big[u_{01}(x,y+h) + (-1)^j u_{11}(x+\tau,y+h)\big]\big\}_{yy} +$$
$$+\big[\big(a_{11} + (-1)^j a_{01}\big) + (-1)^k H(y)\big(a_{10} + (-1)^j a_{00}\big)\big]$$
$$\big\{\big[u_{00}(x,y) + (-1)^j u_{10}(x+\tau,y)\big]\big\} + \quad (19)$$
$$+(-1)^k\big[u_{01}(x,y+h) + (-1)^j u_{11}(x+\tau,y+h)\big]\}_{xx} =$$
$$= -(a_{01} + (-1)^k H(y)a_{00})\{\big[r(x-\tau,y) + (-1)^j\rho(x+2\tau,y)\big] +$$
$$+(-1)^k\big[r(x-\tau,y+h) + (-1)^j\rho(x+2\tau,y+h)\big]\}_{xx} -$$
$$-(-1)^k\{\big(a_{12} + (-1)^j a_{02}\big)\big[\delta(x,y+2h) + (-1)^j\delta(x+\tau,y+2h)\big] +$$
$$+a_{02}[r(x-\tau,y+2h) + \big(-1\big)^j\rho(x+2\tau,y+2h)\big]\}_{xx}, (x,y) \in D_{00}^{+} (k,j=0,1).$$

Таким образом, опережающе-запаздывающее уравнение смешанного типа (2) приведено, в силу (14), (19), к системе четырех уравнений смешанного типа без отклонений аргументов

$$(sgn\, y) q_{jkyy}(x,y) + \gamma_{jk}^2 q_{jkxx}(x,y) = m_{jk}(x,y), \quad (20)$$
$$(x,y) \in D_{00} = D_{00}^{+} \cup D_{00}^{-} \cup I_0, (j,k=0,1),$$

где

$$4q_{jk}(x,y) = \big[u_{00}(x,y) + (-1)^j u_{10}(x+\tau,y)\big] +$$
$$+(-1)^k H(y)\big[u_{01}(x,y+h) + (-1)^j u_{11}(x+\tau,y+h)\big]; \quad (21)$$
$$m_{jk}(x,y) = -(a_{01} + (-1)^k H(y)a_{00})\{[r(x-\tau,y) + (-1)^j\rho(x+2\tau,y)]_{xx} +$$

$$+(-1)^j H(y)[r(x-\tau,y+h)+(-1)^j\rho(x+2\tau,y+h)]_{xx}\}+ \tag{22}$$

$$-(-1)^k H(y)\{(a_{12}+(-1)^j a_{02})[\delta(x,y+2h)+(-1)^j\delta(x+\tau,y+2h)]_{xx}+$$

$$+a_{02}\big[r(x-\tau,y+2h)+(-1)^j\rho(x+2\tau,y+2h)]_{xx}\big\},$$

причем

$$\gamma_{jk}^2=\big(a_{11}+(-1)^j a_{01}\big)+(-1)^k H(y)(a_{10}+(-1)^j a_{00}). \tag{23}$$

Множество решений $q_{jk}(x,y),(x,y)\in D_{00}(j,k=0,1)$ четырёх неоднородных уравнений смешанного типа Лаврентьева-Бицадзе (20) содержит все решения

$$u(x,y)=u_{jk}(x,y),(x,y)\in D_{jk}(j,k=0,1)$$

опережающе-запаздывающего уравнения смешанного типа (2), которые, в силу (15), можно выделить из системы (21) в виде

$$u(x,y)=u_{jk}(x,y)=q_{00}(x-j\tau,y-kh)+(-1)^j q_{10}(x-j\tau,y-kh)+$$

$$+(-1)^k H(y-kh)\big(q_{01}(x-j\tau,y-kh)+(-1)q_{11}(x-j\tau,y-kh)\big), \tag{24}$$

$$(x,y)\in D_{jk}^{\pm}(j=0,1).$$

Таким образом, поставленная задача T для опережающе-запаздывающего уравнения смешанного типа (2) в области $D=D^+\cup D^-\cup I$ относительно искомой функции $u(x,y)$ редуцирована к четырем задачам Трикоми для четырех уравнений смешанного типа (20) без отклонений в области $D_{00}=D_{00}^+\cup D_{00}^-\cup I_0$ относительно функций $q_{jk}(x,y),(j,k=0,1)$ вида (21).

Задача T$_{jk}$. Найти в области $D_{00}=D_{00}^+\cup D_{00}^-\cup I_0$ решение $q_{jk}(x,y)\in C(\overline{D}_{00})\cap C^2(D_{00}\backslash I_0)$ уравнения (20), удовлетворяющее условиям

$$q_{jk}(0,y)=q_{jk}(\tau,y)=\overline{r_{jk}}(y)\equiv$$

$$\equiv\frac{1}{4}[(r(0,y)+\big(-1)^j\rho(2\tau,y)\big)+ \tag{25}$$

$$+(-1)^k\left(r(0,y+h)+\left(-1\right)^j\rho(2\tau,y+h)\right)\Big],0\le y\le h;$$

$$q_{jk}(x,h)=\bar{\delta}_{jk}(x)\equiv\frac{1}{4}[(\delta(x,h)+\big(-1)^j\delta(x+\tau,h)\big)+$$

$$+(-1)^k\left(\delta(x,2h)+\left(-1\right)^j\delta(x+\tau,2h)\right)\Big],0\le x\le\tau; \tag{26}$$

$$q_{jo}\left(x,-\frac{x}{\gamma_{jo}}\right)=\overline{\Psi}_{jo}(x)\equiv\frac{1}{2}[\Psi_{oj}(x)+\big(-1\big)^j\Psi_{1j}(x+\tau)\big],0\le x\le\frac{\tau}{2}; \tag{27}$$

условиям сопряжения, в силу (7), (8),

$$q_{jk}(x,0-)=q_{jk}(x,0+)=\bar{\omega}_{jk}(x)\equiv\frac{1}{2}[\omega(x)+\big(-1\big)^j\omega(x+\tau)\big],0\le x\le\tau; \tag{28}$$

$$q_{jky}(x,0-)=q_{jky}(x,0+)=\bar{\nu}_{jk}(x)\equiv\frac{1}{2}[\nu(x)+\big(-1\big)^j\nu(x+\tau)\big],0<x<\tau; \tag{29}$$

причем, согласно (9), $\bar{r}_{jk}(0) = \bar{\Psi}_{jk}(0); \bar{r}_{jk}(h) = \bar{\delta}_{jk}(0); \bar{r}_{jk}(h) = \bar{\delta}_{jk}(\tau)$,
где $\bar{r}_{jk}(y), \bar{\delta}_{jk}(x), \bar{\Psi}_{jk}(x)$ –заданные непрерывные достаточно гладкие функции;
$\bar{v}_{jk}(x), \bar{\omega}_{jk}(x)$ – функции, подлежащие определению в процессе решения задачи T_{jk}.
Здесь и далее $j, k = 0,1$.

Однозначная разрешимость задачи T

Единственность решения задачи T для опережающе-запаздывающего уравнения смешанного типа (2) в области $D = D^{+} \cup D^{-} \cup I$следует из того, что однородная задача T имеет тривиальное решение $u(x,y) \equiv 0$ в $\bar{D}$ в смысле её эквивалентности, согласно (21), (24), тривиальному решению $q_{jk}(x,y) \equiv 0$ в $\bar{D}_{00} = D_{00}^{+} \cup D_{00}^{-} \cup I_0$ однородной задаче T_{jk} для однородного уравнения (20) при однородных условиях (25)-(27).

Доказательство этого факта основано на установлении знакоопределенности интеграла

$$\beta_{jk} = \int_0^{\tau} \bar{\omega}_{jk}(x)\bar{v}_{jk}(x)dx.$$

Лемма 1. Если $q_{jk}(x,y)$ решение однородного уравнения (20) в области $\bar{D}_{00}^{+}$ из класса $C(\bar{D}_{00}^{+}) \cap C^2(D_{00}^{+})$, обращающееся в нуль при $x = 0, x = \tau (0 \le y \le h)$ и $y = h (0 \le x \le \tau)$, то

$$\beta_{jk} \le 0 \tag{30}$$

и

$$\beta_{jk} + \iint_{D_{00}^{+}} \left[q_{jky}^2(x,y) + \gamma_{jk}^2 q_{jkx}^2(x,y)\right]dxdy = 0. \tag{31}$$

Лемма 2. Если $q_{jk}(x,y) \in C(\bar{D}_{00}^{-}) \cap C^2(D_{00}^{-})$ – решение однородного уравнения (20) в области $\bar{D}_{00}^{-}$, обращающееся в нуль на характеристике $x = -\gamma_{jk}y \left(0 \le x \le \frac{\tau}{2}\right)$, то

$$\beta_{jk} \ge 0. \tag{32}$$

Доказательство лемм 1,2 можно провести аналогично [9], [3].

Из неравенств (30),(32) следует $\beta_{jk} = 0$, а потому из равенства (31) получим положительно определенную форму равную нулю и, значит, $q_{jkx}(x,y) \equiv 0, q_{jky}(x,y) \equiv 0$, т.е. $q_{jk}(x,y) \equiv const$ в D_{00}^{+}. Однородность граничных условий в D_{00}^{+} и $q_{jk}(x,y) \in C(\overline{D}_{00}^{+})$ позволяют утверждать, что $q_{jk}(x,y) \equiv 0$ в $\overline{D}_{00}^{+}$ и, в частности, $q_{jk}(x,0) \equiv 0,\ 0 \le x \le \tau$. Последнее равенство в совокупности с однородным условием (28) обеспечивают тривиальность решений $q_{jk}(x,y) \equiv 0$ первой задачи Дарбу в $\bar{D}_{00}^{-}$.

Из полученной тривиальности решений $q_{jk}(x,y)$в $\bar{D}_{00}^{+}$и $\bar{D}_{00}^{-}$ следует тривиальность $q_{jk}(x,y) \equiv 0$в $\bar{D}_{00}$.Таким образом, единственность решения задачи T_{jk} для уравнения (20) и граничных условий (25)-(27) в области $\bar{D}_{00}$ доказана.

Тривиальность решения однородной задачи T для опережающе-запаздывающего уравнения смешанного типа (2) и однородных граничных условий (3)-(6) в области $\bar{D}$ следует из $q_{jk}(x,y) \equiv 0$ в $\bar{D}_{00}$ и равенств (24): $u(x,y) = u_{jk}(x,y) \equiv 0,\ (x,y) \in \bar{D}_{jk}\ (j,k = 0,1)$. Это означает единственность решения задачи T для уравнения (2) при граничных условиях (3)-(6) в области $\bar{D}$.

Доказательство существования решения $u(x,y)$ задачи T в области $\bar{D}$ для опережающе-запаздывающего уравнения смешанного типа (2) основано на решениях задач T_{jk} $(j,k = 0,1)$ в области эллиптичности D_{00}^{+} и гиперболичности D_{00}^{-} для уравнения (20).

Задача Неймана – Дирихле. Найти в области D_{00}^{+} решение $q_{jk}^{+}(x,y) \in C(\overline{D}_{00}^{+}) \cap C^2(D_{00}^{+})$ уравнения (20)-(23)

$$q_{jkyy}^{+}(x,y) + \gamma_{jk}^2 q_{jkxx}^{+}(x,y) = m_{jk}(x,y), (x,y) \in D_{00}^{+}, \quad (33)$$

удовлетворяющее условиям (25), (26), (29).

Задача Дарбу. В области D_{00}^{-} найти решение $q_{jk}^{-}(x,y) \in C(\overline{D}_{00}^{-}) \cap C^2(D_{00}^{-})$ уравнения (20)-(23)

$$q_{jkyy}^{-}(x,y) - \gamma_{jk}^2 q_{jkxx}^{-}(x,y) = m_{jk}^{-}(x,y) \equiv a_{01}[r(x-\tau,y) + (-1)^j \rho(x+2\tau,y)]_{xx}, \quad (x,y) \in D_{00}^{-}, \quad (34)$$

удовлетворяющее условиям (27), (29).

Вопрос существования решения $q_{jk}(x,y)$задачи T_{jk} для уравнения (20) в области $D_{00} = D_{00}^{+} \cup D_{00}^{-} \cup I_0$ связан с разрешимостью полного [2] сингулярного интегрального уравнения относительно $\bar{\nu}_{jk}(x), 0 < x < \tau$, которое будет получено из функциональных соотношений между $\bar{\nu}_{jk}(x)$ и $\bar{\omega}_{jk}(x)$, привнесённых на $y = 0, 0 < x < \tau$ решениями задачи Неймана-Дирихле из D_{00}^{+} и задачи Дарбу из D_{00}^{-}.

Лемма 3. Если имеют место включения $\bar{r}_{jk}(y) \in C[0,h] \cap C^2(0,h)$; $\bar{\delta}_{jk}(x) \in C[0,\tau] \cap C^2(0,\tau)$; $\bar{\nu}_{jk}(x) \in C^1(0,\tau)$, то существует единственное решение задачи Неймана-Дирихле $q_{jk}^{+}(x,y) \in C(\overline{D}_{00}^{+}) \cap C^2(D_{00}^{+})$, которое имеет вид

$$q_{jk}^{+}(x,y) = \frac{1}{\gamma_{jk}} \int_0^{\tau} \bar{\nu}_{jk}(\xi) G_{jk}(x,\xi,y-h) d\xi + F_{jk}(x,y), (x,y) \in \overline{D}_{00}^{+}, \quad (35)$$

где

$$G_{jk}(x,\xi,t) = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p (M_{jkp}^{+}(x,\xi,t) - M_{jkp}^{-}(x,\xi,t)),$$

$$M_{jkp}^{\pm}(x,\xi,t) = \frac{1}{2\pi} ln \frac{\gamma_{jkp}^{\pm}(-x,\xi,t)}{\gamma_{jkp}^{\pm}(x,\xi,t)},$$

$$\gamma_{jkp}^{\pm}(z,\xi,t) = ch(\gamma_{jk}\pi(h(1+2p) \pm t)/\tau) - \cos\left(\frac{\pi(\xi+z)}{\tau}\right),$$

$F_{jk}(x,y) \in C(\overline{D}_{00}^{+}) \cap C^2(D_{00}^{+}) -$ известная функция, выражающаяся через $\bar{\delta}_{jk}(x), \bar{r}_{jk}(y), m_{jk}(x,y), G_{jk}(x,\xi,t)$.

Доказательство формулы (35) состоит в построении для уравнения (33) суммы решений двух вспомогательных задач Нейман-Дирихле

$$q_{jk}^{+}(x,y) = q_{jk}^{1}(x,y) + q_{jk}^{2}(x,y),$$

где $q_{jk}^{s}(x,y)$ $(s = 1,2)$ удовлетворяет уравнению

$$q_{jkyy}^{s}(x,y) + \gamma_{jk}^2 q_{jkxx}^{s}(x,y) = (2-s) m_{jk}(x,y), (x,y) \in D_{00}^{+};$$

и условиям

$$q_{jk}^{s}(0,y) = q_{jk}^{s}(\tau,y) = (s-1)\bar{r}_{jk}(y), 0 \le y \le h;$$

$$q_{jk}^{s}(x,h) = (2-s)\bar{\delta}_{jk}(x), 0 \le x \le \tau;$$

$$\frac{\partial q_{jk}^{s}(x,y)}{\partial y}|_{y=0} = (2-s)\bar{\nu}_{jk}(x), 0 < x < \tau$$

в форме рядов

$$q_{jk}^{1}(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_{njk}(y) \sin\left(\frac{n\pi x}{\tau}\right), (x,y) \in \bar{D}_{00}^{+},$$

$$q_{jk}^{2}(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_{njk}(x) \cos((2\pi+1)\pi y/2h), (x,y) \in \bar{D}_{00}^{+},$$

в которых $C_{njk}(y), A_{njk}(x) -$ решения соответствующих двухточечных краевых задач.

Функциональное соотношение между $\bar{\nu}_{jk}(x)$ и $\bar{\omega}_{jk}(x)$, привнесённое из $\bar{D}_{00}^{+}$ на $y = 0, 0 \leq x \leq \tau$, найдем из решения задачи Неймана-Дирихле (35), полагая $y = 0$ и дифференцируя:

$$\begin{aligned} \bar{\omega}'_{jk}(x) = \frac{1}{2\tau\gamma_{jk}} \int_{0}^{\tau} \bar{\nu}_{jk}(\xi) \left[ctg\left(\frac{\pi(\xi-x)}{2\tau}\right) - ctg\left(\frac{\pi(\xi+x)}{2\tau}\right)\right] d\xi - \\ -\frac{1}{\gamma_{jk}} \int_{0}^{\tau} \bar{\nu}_{jk}(\xi) \frac{\partial}{\partial x} \bar{G}_{jk}(x,\xi) d\xi + F'_{jkx}(x,0), 0 < x < \tau, \end{aligned} \tag{36}$$

где

$$\bar{G}_{jk}(x,\xi) = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^{p} M_{jkp}^{-}(x,\xi,-h).$$

Лемма 4. Если выполняются включения $\bar{\nu}_{jk}(x) \in C^{1}(0,\tau), \bar{\Psi}_{jk}(x) \in C[0,\frac{\tau}{2}] \cap C^{2}(0,\frac{\tau}{2})$ и $\bar{\Psi}_{jk}(0) = \bar{r}_{jk}(0),$ то существует единственное решение задачи Дарбу $q_{jk}^{-}(x,y) \in C(\bar{D}_{00}^{-}) \cap C^{2}(D_{00}^{-})$, которое имеет вид

$$q_{jk}^{-}(x,y) = \frac{1}{\gamma_{jk}} \int_{0}^{x+y\gamma_{jk}} \bar{\nu}_{jk}(\xi) d\xi + R_{jk}(x,y), (x,y) \in \bar{D}_{00}^{-}, \tag{37}$$

где

$$\begin{aligned} R_{jk}(x,y) = -\bar{\Psi}_{jk}(0) + \bar{\Psi}_{jk}\left(\frac{x-y\gamma_{jk}}{2}\right) + \bar{\Psi}_{jk}\left(\frac{x+y\gamma_{jk}}{2}\right) - \\ -B_{jk}(x,y) + B_{jk}(\frac{x-y\gamma_{jk}}{2}, -\frac{x-y\gamma_{jk}}{2\gamma_{jk}}) + B_{jk}\left(\frac{x+y\gamma_{jk}}{2}, -\frac{x+y\gamma_{jk}}{2\gamma_{jk}}\right), \end{aligned}$$

а

$$B_{jk}(x,y) = \frac{1}{2\gamma_{jk}} \int_{0}^{y} dt \int_{x-(y-t)\gamma_{jk}}^{x+(y-t)\gamma_{jk}} m_{jk}^{-}(\xi,t) d\xi.$$

Доказательство формулы (36) следует из общего решения неоднородного уравнения (34) колебания струны

$$q^{-}_{jk}(x,y) = L^1_{jk}(x - y\gamma_{jk}) + L^2_{jk}(x + y\gamma_{jk}) + B_{jk}(x,y), (x,y) \in \overline{D}^{-}_{00};$$

$$L^s_{jk}(\xi) \in C^2[0,\tau](s = 1,2)$$

и краевых условий (27), (29).

Функциональное соотношение между $\bar{\nu}_{jk}(x)$ и $\bar{\omega}_{jk}(x)$, привнесённое из $\overline{D}^{-}_{00}$ на $y = 0, 0 \le x \le \tau$, найдем из решения задачи Дарбу (37), полагая $y = 0$ и дифференцируя:

$$\bar{\omega}'_{jk} = \frac{1}{\gamma_{jk}} \bar{\nu}_{jk}(x) + R'_{jkx}(x,0), 0 < x < \tau, \tag{38}$$

где

$$R'_{jkx}(x,0) = \overline{\Psi_{jk}}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{\gamma_{jk}} \int\limits_0^{-x/2\gamma_{jk}} m^{-}_{jk}(x + t\gamma_{jk}, t)dt,$$

причем $R'_{jkx}(x,0) \in C^1(0,\tau)$.

Вопрос существования решения задачи T_{jk} (20), (25)-(27), в силу условий сопряжения (28)-(29) и функциональных соотношений (36), (38) сведен к разрешимости полного сингулярного интегрального уравнения нормального [2] типа

$$\bar{\nu}_{jk}(x) - \frac{1}{2\tau}\int\limits_0^\tau \bar{\nu}_{jk}(\xi)\left[ctg\left(\frac{\pi(\xi - x)}{2\tau}\right) - ctg\left(\frac{\pi(\xi + x)}{2\tau}\right)\right]d\xi =$$

$$= d_{jk}(x) \equiv \gamma_{jk}\left(F'_{jkx}(x,0) - R'_{jkx}(x,0)\right) - \tag{39}$$

$$-\int\limits_0^\tau \bar{\nu}_{jk}(\xi)\frac{\partial}{\partial x}\bar{G}_{jk}(x,\xi)d\xi, 0 < x < \tau;$$

$d_{jk}(x) \in C^1(0,\tau)$; которое, после преобразований и замены переменных и функций по формулам

$$\bar{\nu}_{jk}(x) = \bar{\bar{\nu}}_{jk}(y); d_{jk}(x) = \bar{d}_{jk}(y), y = \cos\left(\frac{\pi x}{\tau}\right), \tag{40}$$

примет вид

$$\bar{\bar{\nu}}_{jk}(x) - \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \bar{\bar{\nu}}_{jk}(t)\frac{dt}{t - y} = \bar{d}_{jk}(y), -1 < y < \tag{41}$$

Индекс [2] нормального сингулярного интегрального уравнения (41) равен нулю. В силу единственности решения задачи T_{jk} (20), (25)-(27), уравнение (41) однозначно обратимо в классе функций $\bar{\bar{\nu}}_{jk}(y)$, удовлетворяющих условию Гельдера при $-1 < y < 1$, методом сингуляризации [8],[1].

Действительно, действуя на обе части уравнения (41) оператором

$$K\upsilon \equiv \upsilon(s) + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \upsilon(p)\frac{dp}{p - s},$$

используя формулу Пуанкаре-Бертрана [2] перестановки порядка интегрирования в сингулярном повторном интеграле с ядром Коши и необходимые при этом преобразования, придем к решению уравнения (41) вида

$$\bar{\bar{v}}_{jk}(y) = \frac{1}{2}\bar{d}_{jk}(y) + \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\bar{d}_{jk}(p)\frac{dp}{p-y}, -1 < y < 1,$$

а возращение к старым переменным и функциям по формулам (40), подстановка правой части уравнения (39), приводит к уравнению [4] Фредгольма

$$\bar{v}_{jk}(x) + \int_{0}^{\tau}\bar{v}_{jk}(t)W_{jk}(x,t)dt = Q_{jk}(x), 0 < x < \tau, \tag{42}$$

где

$$W_{jk}(x,t) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\bar{G}_{jk}(x,t) +$$

$$+\frac{1}{4\tau}\int_{0}^{\tau}\left[ctg\left(\frac{\pi(\xi-x)}{2\tau}\right) - ctg\left(\frac{\pi(\xi+x)}{2\tau}\right)\right]\frac{\partial}{\partial\xi}\overline{G_{jk}}(\xi,t)d\xi,$$

$$Q_{jk}(x) = \frac{\gamma_{jk}}{2}\left[F'_{jkx}(x,0) - R'_{jkx}(x,0)\right] +$$

$$+\frac{\gamma_{jk}}{4\tau}\int_{0}^{\tau}\left[ctg\left(\frac{\pi(\xi-x)}{2\tau}\right) - ctg\left(\frac{\pi(\xi+x)}{2\tau}\right)\right][F'_{jk\xi}(\xi,0) - R'_{jk\xi}(\xi,0)]d\xi,$$

причем $Q_{jk}(x) \in C^1(0,\tau), W_{jk}(x,t) \in C^1(0 < x,t < \tau)$.

Разрешимость уравнения [4] Фредгольма (42) следует из единственности решения задачи T_{jk} в области $\bar{D}_{00}$.

Определив $\bar{v}_{jk}(x)$ из уравнения (42), найдем $\bar{\omega}_{jk}(x)$ из (36) или (38), а затем по формулам (35) и (37) получим решение $q^{+}_{jk}(x,y)$ и $q^{-}_{jk}(x,y)$ задачи Немана-Дирихле и Дарбу соответственно в областях D^{+}_{00}, D^{-}_{00} . Таким образом, существование решения $q_{jk}(x,y)$ задачи T_{jk} в области $D_{00} = D^{+}_{00} \cup D^{-}_{00} \cup I_0$ доказано.

Вернемся к задаче Т для опережающе –запаздывающего уравнения смешанного типа (2) в области $D = D^{+} \cup D^{-} \cup I$.

Ее решение, в силу (24) и (35), имеет в области $\bar{D}^{+} = \bigcup_{j,k=0}^{1} D^{+}_{jk}$ вид:

$$u(x,y) = u^{+}_{jk}(x,y) = q^{+}_{00}(x-j\tau, y-kh) + (-1)^j q^{+}_{10}(x-j\tau, y-kh) +$$

$$+(-1)^k(q^{+}_{01}(x-j\tau, y-kh) + (-1)^j q_{11}(x-j\tau, y-kh)),$$

а в области $\bar{D}^{-} = \bigcup_{j=0}^{1}\bar{D}^{-}_{jo}$, согласно (24) и (37):

$$u(x,y) = U^{-}_{jo}(x,y) = q^{-}_{00}(x-j\tau, y) + (-1)^j q_{10}(x-j\tau, y), (x,y) \in \bar{D}^{-}_{jo}(j = 0,1).$$

Теорема доказана.

Список литературы

1. Бабурин Ю.С. О сингуляризации сингулярных интегральных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1977. Выпуск. 10. С. 14-24.
2. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977.

3. Зарубин А.Н. Уравнения смешанного типа с запаздывающим аргументом. Орел.: ОГУ, 1999.
4. Краснов М.Л. Интегральные уравнения. М.: Наука, 1975.
5. Маслов В.П. Операторные методы. М.: Наука, 1973.
6. Онанов Г.Г., Скубачевский А.Л. Дифференциальные уравнения с отклоняющимися аргументами в стационарных задачах механики деформируемого тела // Прикл.механики. 1979. Т.15. № 5. С. 39-47.
7. Самарский А.А. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения, 1980. Т.16. №11. С. 1925-1935.
8. Флайшер Н.М. Новый метод решения в замкнутой форме для некоторых классов сингулярных интегральных уравнений с регулярной частью // Revue Roum. De Math. pures et appl. 1965. T. 10. №5. С.615-620.
9. Франкль Ф.И. Избранные труды по газовой динамике. М.: Наука, 1973.

INITIAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A NON-LOCAL MIXED-TYPE EQUATION

A.N. Zarubin
Ph. D.-M. n, Professor
matdiff@yandex.ru
Orel
E.V. Chaplygina
Dr. Sci. (Physico-Mathematical), associate professor
lena260581@yandex.ru
Oryol

Orel Oryol state University named after I.S. Turgenev

Abstract. The initial-boundary value problem of Tricomi for a non-local mixed-type Lavrentiev-Bitsadze equation is investigated. The problem is unambiguously solvable.

Keywords: mixed-type equations, differential-difference equations, concentrated lag and advance.

References

1. Baburin, Yu. S. (1977). On singularization of singular integral equations [*O singulayrizacii singulyarnih integralniyh uravnenii*]. Differents.equations, 10, 14-24
2. Fleischer, N. M. (1965). A new closed-form solution method for some classes of singular integral equations with a regular part [*Noviy metod resheniya v zamcnytoi forme dlya nekotoriyh klassov singulyarniyh integralniyh uravneniy s regulyarnoi chastu*]. Revue Roum. De Math. pures et appl. 10(5), 615-620.
3. Frankl, F. I. (1973). Selected works on gas dynamics [*Izbranniye trydiy po gazovoi dinamike*]. Moscow.
4. Gakhov, F. D. (1977). Regional problems [*Kraeviye zadachi*]. Moscow.
5. Krasnov, M. L. (1975). Integral equations [*Integralniye uravneniya*]. Moscow.
6. Maslov, V. P. (1973). Operator methods [*Operatorniye metodiy*]. Moscow.
7. Onanov, G. G., Skubachevsky, A. L. (1979). Differential equations with deviating arguments in stationary problems of deformable body mechanics [*Differecialniye*

uravneniya s otklonyaushimisya argumentami v stacionarnyih zadachah mehaniki deformiryemogo tela]. Approx.mechanics, 15(5), 39-47.
8. Samarsky, A. A. (1980). On some problems of the theory of differential equations [*O necotoriyh problemax teorii differencialniyh uravnenii*]. Differential equations, 16(11), 1925-1935.
9. Zarubin, A. N. (1999). Mixed-type Equations with a lagging argument [*Uravneniya smeshannogo tipa s zapazdivaushim argumentom*]. Orel.

DOI: 10.24888/2500-1957-2020-3-101-109

УДК 004.424.22

ВАРИАНТЫ ДИСТАНЦИОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В ТИПОВЫХ КОНФИГУРАЦИЯХ 1С

Дмитрий Васильевич Корниенко
к. физ.-мат. н., доцент
dmkornienko@mail.ru
г. Елец

Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина

Аннотация. Статья посвящена описанию возможностей повышения эффективности дистанционной торговли с использованием типовой функциональности программ "1С: Управление торговлей 11", "1С: Комплексная автоматизация 2" или "1С:ERP Управление предприятием" и сервисов 1С.

Ключевые слова: дистанционное взаимодействие, интеграция, онлайн-сервис, заказы клиентов.

В настоящее время все больше организаций задумываются о переходе на дистанционный, или как еще говорят, удаленный режим работы. Значительное количество организаций в стране ведут деятельность в области оптовой торговли, и они начали внедрение различных форматов дистанционной торговли и доставки товаров. Уже сейчас можно с уверенностью говорить, что наличие направления дистанционной торговли является необходимостью устойчивого развития торговых компаний [2].

Наличие интернет-магазина на сегодняшний день является ключевым фактором эффективной дистанционной торговли. Он позволяет предоставить потенциальному покупателю подробную информацию о товаре и его изображение.

Считается, что создание интернет-магазина – это долгий и затратный процесс, который требует разработки программной платформы и дизайна сайта, приобретения доменного имени и хостинга сайта, наполнения и постоянной актуализации каталога. Однако эти расходы можно свести к минимуму, если создавать сайт на уже готовой платформе. Такая возможность для пользователей прикладных программных решений 1С доступна с сервисом 1С-UMI. В сервисе предоставляется хостинг сайта, используется готовая платформа и готовые варианты дизайна на выбор [4]. При этом за счет возможности редактирования стилей, система позволяет использовать корпоративные цвета и логотип. Это позволяет минимизировать затраты на создание сайта и практически мгновенно запустить интернет-магазин в работу, что является определяющим преимуществом в кризисных условиях.

Интеграция с сервисом уже включена в типовые конфигурации "1С:Управление торговлей 11", "1С:Комплексная автоматизация 2" или "1С:ERP Управление предприятием". Для начала работы нужно просто включить функциональную опцию НСИ и