conference Control systems, technical systems: stability, stabilization, ways and methods of research. 134-138. Yelets.

5. Zvonarev, S. V. (2019). Fundamentals of mathematical modeling: a tutorial [*Osnovy matematicheskogo modelirovaniya: uchebnoe posobie*]. Ekaterinburg: Ural.

DOI: 10.24888/2500-1957-2020-4-51-56

УДК 517.983.23

ПРИЛОЖЕНИЕ ТЕОРИИ РИССА-ШАУДЕРА К ИССЛЕДОВАНИЮ РАЗРЕШИМОСТИ УРАВНЕНИЙ ТИПА РОМАНОВСКОГО С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ

Ирина Адольфовна Елецких
к.ф.-м.н., доцент
yelttskikh.irina@yandex.ru
г. Елец

Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина

Аннотация. До середины сороковых годов интересы специалистов по функциональному анализу были сфокусированы почти исключительно на изучение нормированных пространств. Впервые аксиомы таких пространств появились в работе Ф. Рисса о компактных операторах в пространстве $C[a;b]$ в 1918 году, но первое абстрактное изложение теории компактных операторов содержится в диссертации Стефана Банаха, опубликованной в 1932 году в Варшаве. С 50-х годов XX века возрастает прикладная направленность функционального анализа для решения различных задач математики, физики и других прикладных наук. В статье приведены понятия компактного множества и вполне непрерывного оператора, рассмотрена теория Рисса-Шаудера линейных уравнений второго порядка, приводятся теоремы, составляющие содержание этой теории. В качестве приложения теории Рисса-Шаудера приводятся условия существования решений уравнений типа Романовского с частными интегралами в пространстве непрерывных функций. Так как разрешимость операторных уравнений зависит от условий компактности, то в статье приводится пример на установление компактности интегрального оператора.

Ключевые слова: компактное множество, вполне непрерывный оператор, линейные уравнения второго порядка, теория Рисса-Шаудера.

Компактные операторы играют важную роль в различных приложениях. Они допускают достаточно детальное описание, поэтому построенная теория таких операторов позволяет значительно облегчить процесс решения интегральных и дифференциальных уравнений. В качестве определения компактного оператора возьмем сформулированное в учебнике В. С. Владимирова «Обобщенные функции в математической физике».

Пусть $\mathbb{E}$ и $\mathbb{F}$ – банаховы пространства на поле $\mathbb{F}$ действительных или комплексных чисел. Будем обозначать через S_r=$S_r(0)$ шар радиуса r>0, а через S=$S_1(0)$ единичный шар с центром в нуле [1].

Определение 1. *Линейный оператор* A:$\mathbb{E}\rightarrow\mathbb{F}$ *в банаховых пространствах* $\mathbb{E}$ и $\mathbb{F}$ *называется компактным, если образ* $A(S)\subset\mathbb{F}$ *единичного шара* $S\subset\mathbb{E}$ *является предкомпактным множеством в* $\mathbb{F}$.

Рассмотрим свойства компактных операторов, приведенные в [1]. Обозначим через $\mathfrak{C}(\mathbb{E},\mathbb{F})$– множество компактных операторов, а $\mathfrak{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$ – множество всех ограниченных операторов, действующих из $\mathbb{E}$ в $\mathbb{F}$. Тогда

1. *Каждый компактный оператор A ограничен.*
2. *Сумма C=A+B компактных оператор является компактным оператором.*
3. *Произведение C=AB операторов A и B, один из которых компактный, а другой ограниченный, является компактным оператором.*
4. *Равномерный предел $A = limA_n$ компактных операторов A_n является компактным оператором.*
5. *Если оператор A:X→ Y компактный, то сопряженный оператор A^*:Y^* → X^* также компактный.*

Из свойств компактных операторов вытекает, что $\mathfrak{C}(\mathbb{E},\mathbb{F})$ является замкнутым подпространством в $\mathfrak{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$ [1].

Прежде чем переходить к вопросам разрешимости уравнений типа Романовского с частными интегралами рассмотрим пример доказательства компактности интегрального оператора в пространстве непрерывных функций.

Пример. *Пусть $\mathbb{C}(X)$и $\mathbb{C}(Y)$ – два пространства непрерывных функций, заданных на компактах X и Y соответственно. Пусть $K(x,y) \in \mathbb{C}(X \times Y)$ есть непрерывная функция двух переменных на компакте $X \times Y$. Рассмотрим интегральный оператор A: $\mathbb{C}(Y) \to \mathbb{C}(X)$ с ядром K(x,y), действующий по формуле: $Ag(x) \doteqdot \int_Y K(x,y)g(y)d\mu_y$, $g \in \mathbb{C}(Y)$, где μ-некоторая регулярная конечная мера в Y. Доказать, что A – компактный оператор.*

Используем для доказательства теорему Арцела. Так как функция $K(x,y)$ непрерывна на компакте $X \times Y$, то она ограничена и равномерно непрерывна. Поэтому для любой функции $g \in S$ из единичного шара $S \subset \mathbb{C}(Y)$ получим

$$\|Ag\| \le \mu(Y)\|K\|\,, |Ag(x_1) - Ag(x_2)| \le \mu(Y)\omega(K,\delta),$$

если $\rho(x_1,x_2) \le \delta$. Следовательно, образ шара $A(S)$ является ограниченным и равностепенно непрерывным в $\mathbb{C}(X)$. Таким образом, по теореме Арцела множество $A(S)$ предкомпактно в $\mathbb{C}(X)$, а оператор A компактный [1].

Следующие теоремы составляют содержание теории Рисса – Шаудера, являющейся обобщением фредгольмовой теории интегральных уравнений.

Первая теорема Фредгольма. *Пусть A – линейный вполне непрерывный оператор в банаховом пространстве X. Следующие четыре утверждения эквивалентны:*

α) уравнение $x - Ax = y$ имеет решение при любой правой части y*;*

β) уравнение $z - Az = 0$ имеет только тривиальное решение;

γ) уравнение $f - A^*f = \omega$ имеет решение при любой правой части $\boldsymbol{\omega}$*;*

δ) уравнение $\psi - A^*\psi = 0$ имеет только тривиальное решение.

Если выполнено одно из условий α), β), γ), δ), то операторы $I - A$ и $I - \boldsymbol{A}^*$ непрерывно обратимы.

Вторая теорема Фредгольма. *Пусть A – линейный вполне непрерывный оператор в X. Тогда уравнения $z - Az = 0$ и $\psi - A^*\psi = 0$ имеют одинаковое конечное число линейно независимых решений.*

Третья теорема Фредгольма. *Пусть A – линейный вполне непрерывный оператор в X. Для того чтобы уравнение $x - Ax = y$ имело хоть одно решение, необходимо и достаточно, чтобы для любого решения ψ уравнения $\psi - A^*\psi = 0$ выполнялось условие $\langle y,\psi\rangle = 0$.*

Далее через $\sigma(A)$ обозначаем спектр оператора A, а через $\sigma_p(A)$ точечный спектр, состоящий из собственных значений. Известно, что предельный спектр$\sigma_l(A)$ включает точечный спектр $\sigma_p(A) \subseteq \sigma_l(A)$. При этом из следствия для компактных операторов имеем равенство $\sigma_l(A)\backslash 0 = \sigma_p(A)\backslash 0$.

Теорема (**Рисса-Шаудера**). *Пусть* $A: \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ – *компактный оператор в банаховом пространстве* $\mathbb{E}$ *и* $\dim \mathbb{E} = \infty$. *Тогда спектр* $\sigma(A)$ *состоит из конечного или счетного множества собственных значений* λ *и нуля. При этом ненулевые собственные значения* $\lambda \neq 0$ *имеют конечную кратность.*

Из представленных выше теорем непосредственно вытекает

Следствие *(альтернатива Фредгольма).* *Либо при всех* $y \in \mathbb{E}$ *неоднородное уравнение* $\lambda x - Ax = y$ *однозначно разрешимо, либо существует ненулевое решение* $x \neq 0$ *однородного уравнения* $\lambda x - Ax = 0$.

Теорию Рисса – Шаудера применим к исследованию разрешимости уравнений типа В. И. Романовского с частными интегралами.

Романовский Всеволод Иванович изучал эргодические свойства цепей Маркова. Напомним предварительно суть теории, введенной в 1907 году А. А. Марковым. Представим себе некоторый объект, который может находиться в конечном или счётном числе состояний E_i. Состояния объекта фиксируются в дискретные моменты времени $t = 0,1,2,\ldots$. Если вероятность обнаружить объект в момент времени $s+1$ в состоянии E_j при условии, что в момент времени s он находился в состоянии E_i не зависит от предшествующей моменту s эволюции объекта, то соответствующая теоретико-вероятностная схема называется цепью Маркова, а вероятности, о которых шла речь, вероятностями перехода. Обозначим их $P_{ij}(s)$. Если вероятности перехода не зависят от s, то цепь называется однородной.

Рассмотрим теперь вероятности перехода $P_{ij}(s)$ из состояния E_i в момент времени s в состояние E_j в момент времени t. В однородном случае эти вероятности зависят от $t-s$, обозначим их ${P_{ij}}^{(t-s)}$. Замечательный результат, полученный А. А. Марковым, состоит в том, что если все P_{ij} положительны (число состояний конечно), то существует $\lim\limits_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = P_j$, не зависящий от i.

Эта теорема называется эргодической. Эргодические свойства цепей Маркова изучались в различных работах и различными методами. В. И. Романовский развивал аналитические и алгебраические методы.

В 1932 году В. И. Романовский описал задачу теории марковских цепей [1], которая приводится к линейному интегральному уравнению вида

$$x(t,s) = \int_a^b m(t,s,\sigma)x(\sigma,t)d\sigma + f(t,s) \tag{1}$$

Это уравнение он исследовал методом, аналогичным методу определителей Фредгольма, в предположении непрерывности заданных функций $m(t,s,\sigma)$ и $f(t,s)$. Для уравнения (1) характерно то, что сначала производится перестановка переменных в неизвестной функции под знаком интеграла и только потом интегрирование.

Уравнение (1) является частным случаем уравнения

$$x(t,s) = (K_i \circ \Pi)x(t,s) + f(t,s), \tag{2}$$

где K_i, ($i = 1, 2, 3, 4$) – операторы типа Романовского:

$$K_1 = L \circ \Pi + M + N,\ K_2 = L \circ \Pi + M + N \circ \Pi,\ K_3 = L + M \circ \Pi + N,\ K_4 = L + M \circ \Pi + N \circ \Pi.$$

L, M, N – функции, измеримые по совокупности переменных, а интегралы понимаются в смысле Лебега:

$$Lx(t,s) = \int_a^b l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau,\ \ Mx(t,s) = \int_a^b m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma\,,$$

$$Nx(t,s) = \int_a^b \int_a^b n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma\,.$$

$\Pi x(t,s) = x(s,t)$ – оператор перестановки переменных.

Вопросы разрешимости уравнений (2) тесно связаны со свойствами операторов K_i, которые являются операторами с частными интегралами, так как в первых двух слагаемых их правых частей интегрирование неизвестной функции ведется по части переменных. Свойства операторов типа Романовского зависят от пространств, в которых они изучаются, и сильно отличаются от свойств обычных интегральных операторов.

Следует отметить, что найти решения уравнений, содержащих такие операторы, удается в редких случаях. Поэтому необходимо изучение условий, при которых уравнения типа Романовского являются фредгольмовыми или сводятся к уравнениям Фредгольма.

В [1, 2] рассматриваются условия нётеровости, фредгольмовости и обратимости оператора $I - K_i$ для $i = 1,\ldots,4$ и соответствующего ему уравнения $(I - K_i)x = f$, где I – тождественный оператор. Здесь под нётеровым (фредгольмовым) оператором понимается линейный оператор с замкнутой областью значений, у которого размерности ядра и коядра конечны (размерности ядра и коядра конечны и совпадают).

В [2] для уравнения $x = K_i\,x + f$ получены критерии фредгольмовости в практически важном случае непрерывных в целом и интегрально ограниченных ядер. Напомним, что измеримые по совокупности переменных функции $l(t,s,\tau), m(t,s,\sigma), n(t,s,\tau,\sigma)$ называются непрерывными в целом, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при $|t_1 - t_2| < \delta$, $|s_1 - s_2| < \delta$

$$\int_a^b |l(t_1,s_1,\tau) - l(t_2,s_2,\tau)|d\tau < \varepsilon, \quad \int_a^b |m(t_1,s_1,\sigma) - m(t_2,s_2,\sigma)|d\sigma < \varepsilon,$$

$$\int_a^b \int_a^b |n(t_1,s_1,\tau,\sigma) - n(t_2,s_2,\tau,\sigma)|d\tau d\sigma < \varepsilon\,.$$

интегрально-ограниченными, если

$$\sup_D \int_a^b |l(t,s,\tau)|d\tau = C_1 < +\infty, \quad \sup_D \int_a^b |m(t,s,\sigma)|d\sigma = C_2 < +\infty,$$

$$\sup_D \int_a^b \int_a^b |n(t,s,\tau,\sigma)|\, d\tau d\sigma = C_3 < +\infty.$$

Теорема 1. *Если ядра $l(t,s,\tau)$, $m(t,s,\sigma)$ и $n(t,s,\tau,\sigma)$ непрерывны в целом и интегрально ограничены на $D \times [a,b]$ и $D \times D$ соответственно, то при* i=1,2 *оператор $I - K_i$ фредгольмов в $\mathbb{C}(D)$ тогда и только тогда, когда в $\mathbb{C}(D)$ фредгольмов оператор $I - M$, а при* $i = 3,4$ – *тогда и только тогда, когда в $\mathbb{C}(D)$фредгольмов оператор $I - L$.*

Здесь $\mathbb{C}(D)$ – пространство непрерывных на $D = [a,b] \times [a,b]$ функций. В условии этой теоремы фредгольмовость уравнения $x = K_i x + f$ $(i = 1,\ldots,4)$ равносильна при $i = 1,2$ обратимости уравнения $x = Mx + f$, а при $i = 3,4$ – обратимости уравнения $x = Lx + f$.
Условия фредгольмовости в пространстве $\mathbb{L}^p = \mathbb{L}^p(D)$ устанавливает следующая

Теорема 2. *Пусть операторы L, M и N непрерывны в пространстве $\mathbb{L}^p$. Если операторы $(L \circ \Pi)^2$ и $N \circ \Pi^i + M \circ (L \circ \Pi)$ $(i = 1,2)$ компактны в $\mathbb{L}^p$, то в $\mathbb{L}^p$ нётеровость оператора $I - K_i$ $(i = 1,2)$ равносильна нётеровости оператора $I - M$, а фредгольмовость $I - K_i$ равносильна фредгольмовости оператора $I - M$.*

Аналогично, если операторы $(M \circ \Pi)^2$ *и* $N \circ \Pi^i + L \circ (M \circ \Pi)$ $(i = 1,2)$ *компактны в* $\mathbb{L}^p$, *то в* $\mathbb{L}^p$ *нётеровость оператора* $I - K_i$ $(i = 3,4)$ *равносильна нётеровости оператора* $I - L$, *а фредгольмовость* $I - K_i$ *равносильна фредгольмовости оператора* $I - L$.

Из сформулированных теорем и представления уравнения (2) в виде

$$(I - M) \circ (I - L \circ \Pi)x = (N + M \circ (L \circ \Pi))x + f \text{ в случае } i = 1 \text{ и}$$

$$(I - M) \circ (I - L \circ \Pi)x = (N \circ \Pi + M \circ (L \circ \Pi))x + f \text{ в случае } i = 2$$

Вытекают теоремы

Теорема 3. *Пусть операторы* L, M, N *– непрерывны в пространстве* $\mathbb{L}^p$, *операторы* $(L \circ \Pi)^2$ *и* $N \circ \Pi^i + M \circ (L \circ \Pi)$ $(i = 1,2)$ *компактны в* $\mathbb{L}^p$ *и* $1 \notin \sigma(M)$. *Тогда справедлива альтернатива Фредгольма:*

1. *либо уравнения* $x = K_i x + f$ $(i = 1,2)$ *и* $x = K_i{}^* x + g$ $(i = 1,2)$ *разрешимы при любых правых частях и их решения единственны;*
2. *либо однородные уравнения* $x = K_i x$ *и* $x = K_i x$ *имеют одинаковое и число линейно-независимых решений* $x_1, \dots, x_n$ *и* $y_1, \dots, y_n$, *соответственно. При этом уравнения* $x = K_i x + f$ *и* $x = K_i{}^* x + g$ *разрешимы соответственно тогда и только тогда, когда* $f(y_k) = 0$ *и* $g(x_k) = 0$ $(k = 1, \dots, n)$.

Теорема 4. *Если ядра* $l(t,s,\tau), m(t,s,\sigma), n(t,s,\tau,\sigma)$ *непрерывны в целом и интегрально ограничены, то для уравнения* $x = K_i x + f$ $(i = 1,2)$ *в* $\mathbb{C}(D)$ *альтернатива Фредгольма справедлива точно тогда, когда* $1 \notin \sigma(M)$.

Аналогичные теоремы имеют место и для $i = 3,4$.

В заключение следует отметить, что линейные операторы типа Романовского с частными интегралами исследовались А. С. Калитвиным, Л. М. Лихтарниковым, Л. Л. Морозовой. Наиболее подробно разработана теория оператора $К \circ \Pi$ для различного вида ядер (вырожденные, симметричными, симметризуемыми). Полный перечень работ по операторам этого типа можно найти, например, в [1, 3].

Уравнение (1) двусвязных цепей Маркова исследовано В. И. Романовским методом определителей Фредгольма в случае непрерывного ядра [4], в случае вырожденных ядер уравнение изучалось В. А. Щелкуновым [5]. Спектральные свойства оператора двусвязных цепей Маркова приведены в [3], там же рассмотрены условия обратимости, нетеровости и фредгольмовости уравнения (2).

Свойства операторов типа Романовского в пространствах непрерывных функций и в пространствах Лебега исследовались в работах А. С. Калитвина и автора статьи. Подробный перечень работ можно найти в [1, 3].

Список литературы

1. Елецких И. А. Вопросы теории операторов и уравнений типа Романовского с частными интегралами: дисс. …канд.физ.-мат. наук. Липецк, 2005.
2. Елецких И. А. Нетеровость и фредгольмовость операторов типа Романовского с частными интегралами в пространстве L^p // Операторы с частными интегралами: сб. науч. трудов Липецк, 2003. Вып. 6. С. 59-65.
3. Калитвин А. С. Интегральные уравнения типа В. И. Романовского с частными интегралами. Липецк: ЛГПУ, 2014.
4. Романовский В. И. Избранные труды. Т.2: Теория вероятностей, статистика и анализ. Ташкент: Наука, 1964.
5. Щелкунов В. А. Интегральные уравнения, ядра которых зависят от трех переменных // Сборник науч. трудов кафедры высшей матем. Тула. 1974. Вып. 2. С. 45-51.

APPLICATION OF RIESZ-SHAUDER THEORY TO INVESTIGATION OF THE SOLVABILITY OF EQUATIONS OF ROMANOVSKY TYPE WITH PARTIAL INTEGRALS

I. A. Yeletskikh
Cand. Sci. (Phys.-Math.), associate professor
yelttskikh.irina@yandex.ru
Yelets

Bunin Yelets State University

Abstract. Until the mid-1940s, the interests of functional analysts were focused almost exclusively on the investigation of normalized spaces. The axioms of such spaces first appeared in F. Riesz's paper on compact operators in the space $C\ [a;\ b]$ in 1918, but the first abstract presentation of the theory of compact operators is contained in Stefan Banach's dissertation published in 1932 in Warsaw. Since the 50s of the XX century, the applied focus of functional analysis for solving various problems of mathematics, physics and other applied sciences has been growing. The article presents the concepts of a compact set and a completely continuous operator, considers the Riesz-Schauder theory of second-order linear equations, presents the theorems that make up the content of this theory. As an application of the Riesz-Schauder theory, conditions are given for the existence of solutions of equations of Romanovsky type with partial integrals in the space of continuous functions. Since the solvability of operator equations depends on the compactness conditions, the article gives an example of establishing the compactness of an integral operator.

Keywords: compact set, completely continuous operator, second-order linear equations, Riesz-Schauder theory.

References

1. Yeletskikh, I. A. (2005) Questions of the theory of operators and equations of Romanovskii type with partial integrals [*Voprosy teorii operatorov i uravneniy tipa Romanovskogo s chastnymi integralami*]. [dissertation]. Lipetsk.
2. Yeletskikh, I. A. (2003) Noetherian property and Fredholm property of operators of Romanovskii type with partial integrals in the space L^p [*Noterovost' i fredgol'movost' operatorov tipa Romanovskogo s chastnymi integralami v prostranstve* L^p]. *Operators with partial integrals*, 6, 59-65. Lipetsk.
3. Kalitvin, A. S. (2014) Integral equations of V. I. Romanovsky with partial integrals [*Integral'nyye uravneniya tipa V. I. Romanovskogo s chastnymi integralami*]. Lipetsk: LGPU.
4. Romanovsky, V. I. (1964) Selected Works. Vol.2: Probability theory, statistics and analysis [*Izbrannyye trudy. T.2: Teoriya veroyatnostey, statistika i analiz*]. Tashkent: Nauka.
5. Shchelkunov, V. A. (1974) Integral equations whose kernels depend on three variables [*Integral'nyye uravneniya, yadra kotorykh zavisyat ot trekh peremennykh*] *Sb. scientific. tr. department of higher mat*. 2. 45-51. Tula.