DOI: 10.24888/2500-1957-2020-4-57-61

УДК 519.600

К ВОПРОСУ ИССЛЕДОВАНИЯ МОДЕЛИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МЕЖДУ НЕЙРОНАМИ

Константин Сергеевич Елецких
к.ф.-м.н., ст. преподаватель
Kostan86@yandex.ru
г. Елец

Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина

Аннотация. Рассматривается модель, используемая при анализе взаимодействия между двумя (тормозящим и возбуждающим) нейронами в биологической системе. С помощью комбинации методов проверяется существование и устойчивость предельных циклов. В ходе численных экспериментов получены фазовые портреты системы и установлен характер положения равновесия при изменении параметра вблизи бифуркационного значения.

Ключевые слова: точка равновесия, фазовый портрет, система нелинейных дифференциальных уравнений, критерий Пуанкаре-Бендиксона, теорема Пуанкаре-Андронова-Хопфа, предельный цикл, теорема Ляпунова.

Современный мир динамических моделей развивается и расширяется стремительными темпами. Помимо традиционных областей таких, как механика, техника, физика, астрономия, теперь он охватывает менее традиционные области – химию, биологию, медицину, экологию, экономику. Большое количество известных численных методов исследования часто неприменимо для нелокального анализа таких моделей, то есть для решения задач устойчивости и неустойчивости состояний равновесия, а также проблем существования и устойчивости циклов различного типа. Если эти методы все же применяются, то, как известно, иногда они приводят к ошибкам качественного характера. Более точные результаты в нелокальном анализе динамических систем могут быть получены только с использованием точных (качественных) методов.

Классический принцип, позволяющий доказать существование циклов в динамических системах второго порядка и установить их устойчивость – известная теорема (критерий) Пуанкаре-Бендиксона [2,3]. Применение этого принципа при исследовании конкретных систем позволяет сформулировать утверждение о существовании хотя бы одного орбитально устойчивого цикла в некоторой ограниченной области фазового пространства, но не гарантирует его единственности. В то же время известная бифуркационная теорема Пуанкаре-Андронова-Хопфа [5] утверждает, не совсем точно, что в случае наличия сверхкритической бифуркации существует малый интервал изменения параметра бифуркации, гарантирующий существование, притом единственного, орбитально устойчивого цикла в малой окрестности точки покоя, который притягивает из заданной окрестности все траектории системы. Существование цикла при значениях параметров, достаточно удаленных от точки бифуркации, при применении теоремы Пуанкаре-Андронова-Хопфа может быть проверено, как правило, только с помощью численных экспериментов. Поэтому при исследовании систем конкретного вида, встречающихся в приложениях, гораздо более целесообразно комбинировать все вышеперечисленные методы исследования: принцип Пуанкаре-Бендиксона, теорему Пуанкаре-Андронова-Хопфа и численный эксперимент, чем применять все эти методы по отдельности. Эта комбинация и будет продемонстрирована в данной работе.

Рассмотрим, например, модель, применяемую в биологической системе (нейронной сети) для исследования взаимодействия между тормозящим и возбуждающим нейронами [6]. Пусть эта модель описывает простейший случай, т. е. взаимодействие между двумя нейронами. Обозначим за x_1 – выходную переменную состояния возбуждающего нейрона, за x_2 – выходную переменную состояния тормозящего нейрона. Уравнения системы имеют вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\dfrac{1}{\tau}x_1 + \operatorname{th}(\lambda x_1) - \operatorname{th}(\lambda x_2), \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{1}{\tau}x_2 + \operatorname{th}(\lambda x_1) + \operatorname{th}(\lambda x_2), \end{cases} \tag{1}$$

где $\tau > 0$ – постоянная времени и λ – коэффициент усиления.

Применим критерий Пуанкаре-Бендиксона для того, чтобы установить условия существования периодических орбит. Обозначим

$$\varphi_1(x_1, x_2) = -\frac{1}{\tau}x_1 + \operatorname{th}(\lambda x_1) - \operatorname{th}(\lambda x_2),$$

$$\varphi_2(x_1, x_2) = -\frac{1}{\tau}x_2 + \operatorname{th}(\lambda x_1) + \operatorname{th}(\lambda x_2).$$

Система (1) имеет единственную точку равновесия $x_1 = 0, x_2 = 0$.
В положении равновесия матрица Якоби системы

$$A(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{\tau} + \dfrac{\lambda}{\operatorname{ch}^2(\lambda x_1)} & -\dfrac{\lambda}{\operatorname{ch}^2(\lambda x_2)} \\ \dfrac{\lambda}{\operatorname{ch}^2(\lambda x_1)} & -\dfrac{1}{\tau} + \dfrac{\lambda}{\operatorname{ch}^2(\lambda x_2)} \end{bmatrix}$$

имеет вид:

$$A(0,0) = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{\tau} + \lambda & -\lambda \\ \lambda & -\dfrac{1}{\tau} + \lambda \end{bmatrix}. \tag{2}$$

$-\frac{1}{\tau} + \lambda \pm \lambda i$ — собственные числа матрицы Якоби. В случае $\lambda\tau > 1$ вещественные части собственных чисел положительные, а в случае $\lambda\tau < 1$ – отрицательные. Мы может видеть, что при $\lambda\tau > 1$ одно из условий теоремы Пуанкаре-Бендиксона выполняется. Проверим выполнимость второго условия.

Положим $V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$ – непрерывно дифференцируемая функция. $V(x_1, x_2) = c$ – замкнутая кривая. Множество $M = \{(x_1, x_2): V(x_1, x_2) \le c, c > 2\tau^2\}$ замкнутое, ограниченное. Нетрудно проверить, что M содержит только одну точку равновесия, такую что собственные числа матрицы Якоби имеют положительные вещественные части. Тогда скалярное произведение векторного поля $\varphi(x)$ на вектор-градиент ∇V имеет вид

$$\varphi \cdot \nabla V = \frac{\partial V_1}{\partial x_1}\varphi_1 + \frac{\partial V_2}{\partial x_2}\varphi_2 = -\frac{x_1^2}{\tau} - \frac{x_2^2}{\tau} +$$

$$+x_1[\operatorname{th}(\lambda x_1) - \operatorname{th}(\lambda x_2)] + x_2[\operatorname{th}(\lambda x_1) + \operatorname{th}(\lambda x_2)].$$

Так как $|\operatorname{th}(\lambda x)| < 1$, то $\varphi \cdot \nabla V \le -\frac{x_1^2}{\tau} - \frac{x_2^2}{\tau} + 2|x_1| + 2|x_2|$. Поскольку $\frac{x^2}{\tau} + 2|x| < 0$ при $|x| > 2\tau$, то $\varphi \cdot \nabla V < 0$. Таким образом, согласно критерию Пуанкаре-Бендиксона, во множестве M существует периодическая орбита.

Матрица Якоби (2) при $\lambda\tau < 1$ имеет собственные числа с отрицательными вещественными частями, поэтому положение равновесия (0,0) является устойчивым фокусом (рис. 1).

В случае же $\lambda\tau > 1$ собственные числа матрицы Якоби имеют положительные вещественные части. В таком случае положение равновесия (0,0) является неустойчивым фокусом.

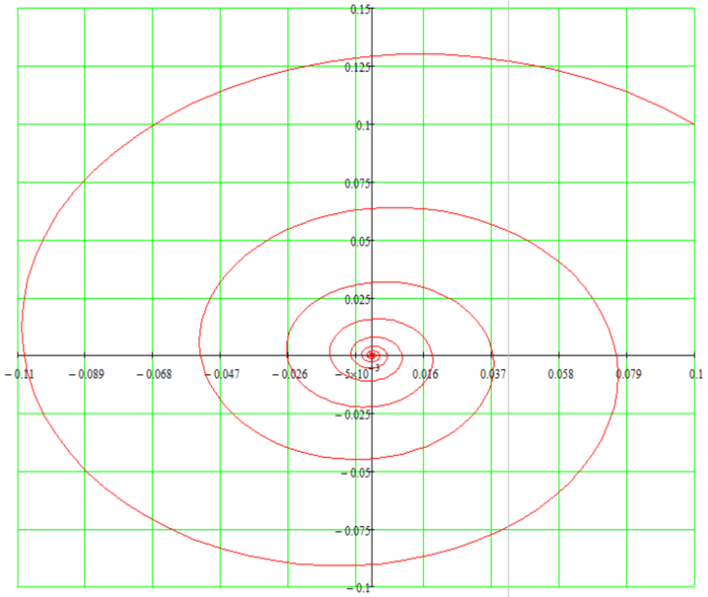

Рис. 1. Фазовый портрет системы для случая $\tau = 1, \lambda = 0{,}9$.

Видим, что значение $\lambda\tau = 1$ является бифуркационным значением параметра $\lambda\tau$, т. е. именно при этом значении качественно меняется фазовый портрет системы дифференциальных уравнений (1). Пренебрегая членами порядка $O(x^5)$ в разложении в ряд Тейлора $\mathrm{th}(\lambda x_1)$ и $\mathrm{th}(\lambda x_2)$ в малой окрестности точки покоя (0,0), перепишем систему (1) в виде

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\lambda x_2 - \dfrac{\lambda^3}{3}(x_1^3 - x_2^3), \\ \dot{x}_2 = \lambda x_1 - \dfrac{\lambda^3}{3}(x_1^3 + x_2^3). \end{cases}$$

Обозначим $\psi_1(x_1, x_2) = -\lambda x_2 - \frac{\lambda^3}{3}(x_1^3 - x_2^3)$ и $\psi_2(x_1, x_2) = \lambda x_1 - \frac{\lambda^3}{3}(x_1^3 + x_2^3)$. Рассмотрим функцию $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$. Тогда скалярное произведение векторного поля $\psi(x)$ на вектор-градиент ∇V запишется в виде

$$\psi \cdot \nabla V = \frac{\partial V_1}{\partial x_1}\psi_1 + \frac{\partial V_2}{\partial x_2}\psi_2 = 2x_1\left[-\lambda x_2 - \frac{\lambda^3}{3}(x_1^3 - x_2^3)\right] +$$

$$+2x_2\left[\lambda x_1 - \frac{\lambda^3}{3}(x_1^3 + x_2^3)\right] = -\frac{2\lambda^3}{3}[x_1^4 - x_1 x_2^3 + x_1^3 x_2 + x_2^4] =$$

$$= -\frac{2\lambda^3}{3}x_1^4\left[1 - \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^3 + \frac{x_2}{x_1} + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^4\right].$$

Пусть $h(t) = t^4 - t^3 + t + 1$. Нетрудно проверить, что $h(t) > 0$ при $t \in (-\infty, \infty)$. Если $x_1 = 0$, то $\psi \cdot \nabla V = -\frac{2\lambda^3}{3}x_2^4 < 0$ при $x_2 \neq 0$. Поэтому $\psi \cdot \nabla V < 0$, а $V > 0$. Таким образом, согласно теореме Ляпунова об устойчивости по первому приближению [1,4] при $\lambda\tau = 1$ положение равновесия асимптотически устойчиво.

Итак, при $\lambda\tau \leq 1$ положение равновесия в точке (0,0) асимптотически устойчиво, а при $\lambda\tau > 1$ оно неустойчиво и существует устойчивый предельный цикл, т. е. происходит сверхкритическая бифуркация Пуанкаре-Андронова-Хопфа. Таким образом, наличие такой бифуркации гарантирует существование и единственность орбитально устойчивого цикла при малых положительных значениях параметра $\lambda\tau - 1$.

Пользуясь численными экспериментами (рис .2–4), покажем, что при любых положительных значениях параметра $\lambda\tau - 1$ существует единственный орбтально устойчивый цикл, притягивающий все остальные фазовые траектории системы.

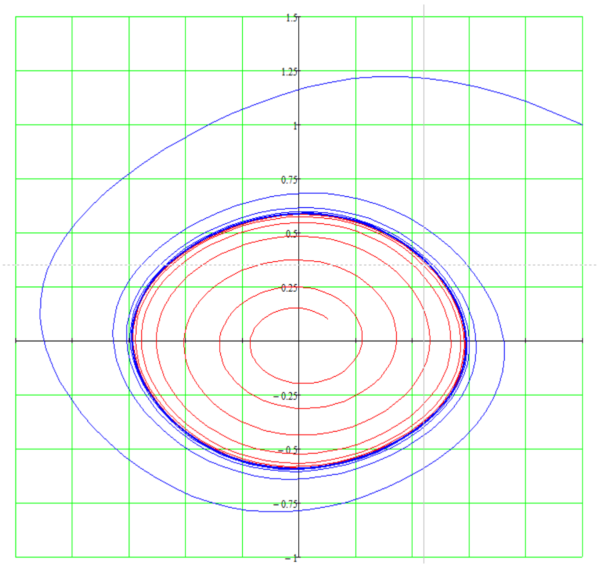

Рис.2. Фазовый портрет системы в случае $\tau = 1, \lambda = 1{,}1$.

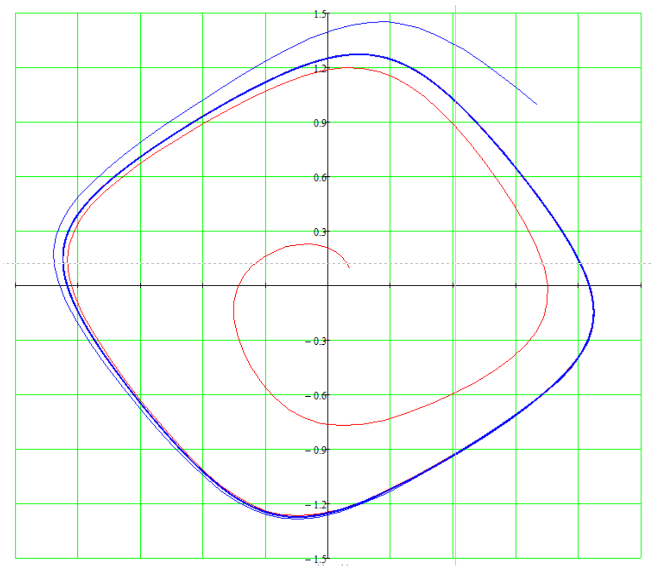

Рис.3. Фазовый портрет системы в случае $\tau = 1, \lambda = 2$.

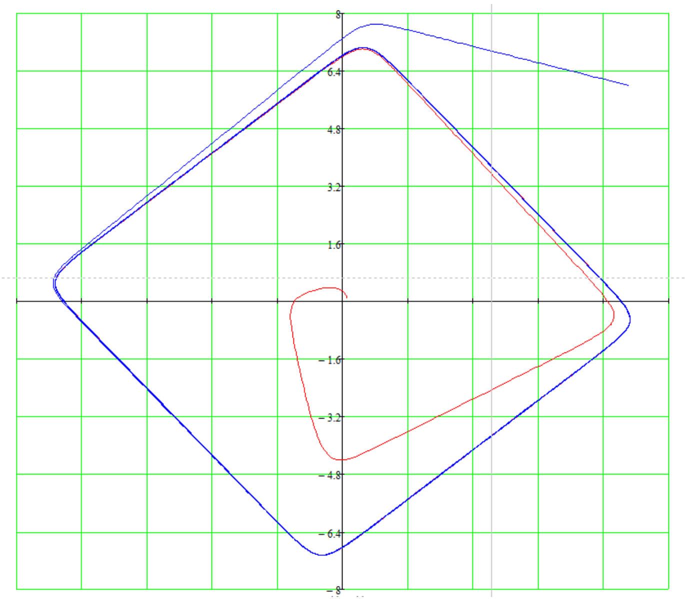

Рис.4. Фазовый портрет системы в случае $\tau = 4, \lambda = 2$.

Список литературы

1. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука,1967.

2. Ильяшенко Ю. С. Эволюционные процессы и философия общности положения. М.: МЦНМО, 2007.
3. Каток А. Б., Хасселблат Б. Введение в современную теорию динамических систем. Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems / пер. с англ. А. Кононенко при участии С. Ферлегера. М.: Факториал, 1999.
4. Ляпунов А. М. Собрание сочинений. В 6-ти т. Т.2. М.-Л, 1956.
5. Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. Москва: Мир. 1980.
6. Tonnelier A., Meignen S., Bosch H., Demongeot J. Synchronization and desychronization of neural oscillators // Neural Networcks, 1999. 1213-1228.

TO THE QUESTION ABOUT RESEARCH THE MODEL INTERACTIONS BETWEEN NEURONS

K. S. Yeletskikh
Cand. Sci. (Phys.-Math.), senior lecturer
Kostan86@yandex.ru
Yelets

Bunin Yelets State University

Abstract. A model is considered that is used to analyze the interaction between two (inhibitory and excitatory) neurons in a biological system. Using a combination of methods, the existence and stability of limit cycles is checked. In the course of numerical experiments, phase portraits of the system are obtained and the nature of the equilibrium position is established when the parameter changes near the bifurcation value.

Keywords: equilibrium point, phase portrait, system of nonlinear differential equations, Poincaré-Bendixson criterion, Poincaré-Andronov-Hopf theorem, limit cycle, Lyapunov's theorem.

References

1. Demidovich, B. P. (1967) Lectures on the mathematical theory of stability [*Lektsii po matematicheskoy teorii ustoychivosti*]. Moscow: Nauka.
2. Ilyashenko, Yu. S. (2007). Evolutionary processes and philosophy of community of position [*Evolyutsionnyye protsessy i filosofiya obshchnosti polozheniya*]. Moscow: MTsNMO.
3. Katok, A. B., Hasselblat B. (1999) Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems [*Vvedeniye v sovremennuyu teoriyu dinamicheskikh sistem*] / trans. from English A. Kononenko with participation of S. Ferleger. M.: Factorial.
4. Lyapunov, A. M. (1956) Collected Works. In 6 volumes. Vol.2 [*Sobraniye sochineniy. V 6-ti t. T.2*]. M.-L.
5. Marsden, J., McCracken, M. (1980) Cycle birth bifurcation and its applications [*Bifurkatsiya rozhdeniya tsikla i yeye prilozheniya*]. Moscow: Mir.
6. Tonnelier, A., Meignen, S., Bosch, H., Demongeot, J. (1999) Synchronization and desychronization of neural oscillators // Neural Networcks. 1213-1228.