ПРОБЛЕМЫ И ПЕРСПЕКТИВЫ СОВРЕМЕННОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

DOI: 10.24888/2500-1957-2021-1-09-15

УДК 372.851

О ФОРМИРОВАНИИ И РАЗВИТИИ У УЧАЩИХСЯ УМЕНИЯ ПРИМЕНЯТЬ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИ РЕШЕНИИ МОТИВАЦИОННО-ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ

Абатурова Вера Сергеевна
к.п.н., с.н.с.
veronika-abaturova@yandex.ru
г. Владикавказ

Южный математический институт ВНЦ РАН

Аннотация. Статья посвящена проблеме формирования и развития у учащихся умения применять метод математического моделирования при решении мотивационно-прикладных учебных задач на основе адаптированного к школьному образованию сложного математического знания – задач линейного программирования. Задачи данного класса составляют основу одного из современных развивающихся разделов прикладной математики, открытого в 1939 году выдающимся советским математиком, лауреатом Нобелевской премии академиком Л.В. Канторовичем. Актуальность данного исследования вызвана формированием различными группами исследователей новых моделей развития образования и необходимостью поиска новых средств, форм, методов и содержания математического образования, способных эффективно развивать у учащихся важное в 21 веке умение применять полученные математические знания на практике. Функциональная грамотность обучаемых по результатам исследований в области школьного математического образования, включая международные мониторинговые исследования «PISA», сохраняет недостаточный уровень. Представлен опыт разработки и реализации в старшей школе элективного курса «Математическое моделирование – школьникам. Линейные модели», содержание которого включает мотивационно-прикладные линейные оптимизационные задачи и математический аппарат, необходимый для их решения. Элективный курс разработан на принципах «от простого – к сложному», фундаментализации, прикладной направленности. Курс ориентирован на формирование умений применять при решении задач все этапы математического моделирования, позволяющие учащимся создавать собственные мотивационно-прикладные задания, описываемые линейными оптимизационными моделями. В качестве эффективного средства формирования умения учащихся применять математические знания на практике представлены многоэтапные мультидисциплинарные задачи на построение математической модели реальной ситуации, для решения которых необходимы знания по математике, информатике и одной или нескольким естественнонаучным дисциплинам, предлагаемые учащимся в ходе участия во Всероссийском командном турнире школьников по математическому моделированию, проводимому СУНЦ МГУ, в котором автор в течение нескольких участвует с командой школьников.

Ключевые слова: математическое моделирование, мотивационно-прикладные задачи, сложное знание, линейные оптимизационные модели.

Формирующийся в мире шестой технологический уклад, связанный, в том числе, с беспрецедентным развитием цифровых технологий и глобальных информационных сетей, появлением искусственного интеллекта меняет устоявшийся уклад жизни человека. Новые способы обработки информации, возможность работы с большими данными, совершенствуют практически все виды деятельности человека, формируют условия для более полного и глубокого осмысления сложных явлений и процессов, и возможности выбора своей жизненной траектории в сложном современном мире.

Как должно меняться, в связи с этим, школьное образование – какие формы, средства, методы, содержание должны стать приоритетными в 21 веке? Над этим вопросом активно работают многие исследователи и практики в разных областях знаний в нашей стране и за рубежом.

Анализ исследований в области образования показывает, что в настоящее время разрабатываются различные прогнозные модели развития образования. Одна из возможных моделей развития образования была представлена в 2018 году на Саммите Global Education Leaders Partnership в рамках Московского международного салона образования в докладе «Образование для сложного общества», подготовленного авторским коллективом: П. Лукша, Д. Кубиста, А. Ласло, М. Попович, И. Нининко и др. по итогам исследований 2014-2017 годов международной платформы «Global Education Futures», объединяющей лидеров глобального образования [4]. В основе этой модели лежит тезис об образовании в течение всей жизни, обучении для новой экономики знаний, для «будущего, построенного на мудрости» с использованием цифровых платформ, которое возможно в первую очередь через развитие *ученической самостоятельности* человека, определяемой авторами как «способность действовать как осознанный, рефлексирующий, социально ответственный человек, реализующий свой выбор, активно достигающий поставленных и принятых им целей» [4]. Рост ученико-центрированного образования и распространение «самоуправляемых» учащихся, формирование парадигмы образования для команд, сообществ и сетей, новые «глобальные» образовательные экосистемы, эволюция показателей образовательного «успеха» для работы со сложностью 21-ого века – главные направления развития образования в данной модели [4].

На наш взгляд, данная модель сильно идеализирована и не раскрывает конкретных методик и технологий как прийти к «обществу, построенному на мудрости», но следует отметить, что изменения в указанных направлениях развития образования, происходят уже сейчас и как-то будут развиваться дальше. Как меняется российское школьное образование в современном мире, какие тренды и направления развития актуальны сегодня?

Анализ результатов научных и мониторинговых исследований последний лет в области школьного математического образования, включая Единый государственный экзамен по математике, оценку функциональной грамотности 15-летних учащихся в рамках международной программы Programme for International Student Assessment (PISA), реализуемой Организацией экономического сотрудничества и развития (ОЭСР) – международной организацией развитых стран, а также собственный педагогический опыт работы с учащимися в рамках математического кружка, сезонных математических школ, проводимых в РСО-А, показывает, что школьники испытывают значительные трудности при решении текстовых задач и сюжетных контекстных заданий, которые также называют практико-ориентированными, прикладными, практическими задачами, задачами прикладного характера, описывающими реальные ситуации и процессы и решаемые математическими средствами. Мы в своем исследовании используем термин *мотивационно-прикладные задачи*

– *сюжетные учебные задачи, описывающие реальные процессы в природе, обществе и производстве и решаемые математическими средствами.*

Умения моделировать реальные ситуации, исследовать построенные модели, интерпретировать полученный результат в концепции PISA относят к математической грамотности учащегося, под которой понимается «способность индивидуума формулировать, применять и интерпретировать математику в разнообразных контекстах. Она [математическая грамотность] включает математические рассуждения, использование математических понятий, процедур, фактов и инструментов для описания, объяснения и предсказания явлений. Она помогает понять роль математики в мире, высказывать хорошо обоснованные суждения и принимать решения, которые должны принимать конструктивные, активные и размышляющие граждане» [5].

В статье исследователя Е.И. Смирнова [6] отмечается, что «эффективным направлением формирования математической грамотности школьников может стать обучение математике на основе освоения сложного знания. При этом ставится задача создания насыщенной информационно-образовательной среды обучения математике за счет изменения содержания образовательных программ в направлении освоения сложного знания и поддержки дистанционных сред и компьютерного моделирования. Это реализуется в ходе этапного исследования сложного знания и решения практико-ориентированных заданий с возможностью эффективно интерпретировать задачи из реальной жизни: т.е. для решения широкого диапазона задач в различных сферах человеческой деятельности, общения и социальных отношений». Под сложным знанием в проводимом исследовании понимаются современные достижения прикладной математики, адаптированные к школьной математике.

«Необходимо выстраивание иерархий сложного разноуровневого знания, методов и средств в когнитивной деятельности, опоры на дидактические правила и закономерности освоения математической деятельности на основе синергетического подхода (фрактальная геометрия, нечеткие множества и fuzzy-logic, теория хаоса и катастроф, устойчивость динамических систем и нелинейная динамика, теория кодирования и шифрования информации и т.п.) [6].

В качестве сложного математического знания, адаптированного нами для школьной математики был выбран один из разделов прикладной математики – линейное программирование, который, как известно, был открыт молодым профессором Ленинградского университета, позже – академиком АН СССР, лауреатом Нобелевской премии по экономике Леонидом Витальевичем Канторовичем. Данная научная дисциплина была создана после обращения к нему в 1938 г. сотрудников Центральной лаборатории Ленинградского фанерного треста с просьбой порекомендовать численный метод расчета рационального плана загрузки имеющегося оборудования. Решая эту практическую задачу, Л.В. Канторович развил математическую теорию с многочисленными экономическими приложениями, которая была опубликована в 1939 году в брошюре «Математические методы организации и планирования промышленного производства». В этой работе впервые давалась математическая постановка производственных задач оптимального планирования, предлагались эффективные методы их решения, а также приемы экономического анализа этих задач. Тем самым, идея оптимальности в экономике была поставлена на прочный научный фундамент. Выбор линейного программирования для адаптации к школьной математике был выбран неслучайно. Как отмечал Л.В. Канторович, внесший существенный вклад в математическую и экономическую науки, «поскольку с экономикой в различных ее аспектах приходится сталкиваться практически каждому человеку, то знакомство с математическими методами в этой науке особенно интересно и важно» [3].

При формализации практических задач на нахождение максимума или минимума возникает математическая задача, точная постановка которой включает три составляющие: 1) какое-то множество X, которое моделирует совокупность всех стратегий или способов действия; 2) числовая функцию f, определенная на множестве X, показывающая, в каком смысле стратегия должна быть наилучшей; 3) некоторое подмножество C множества X, выделяемое ограничительными или регулирующими условиями задачи (последние часто выражаются системами уравнений и неравенств). Сама задача заключается в том, чтобы найти такой элемент x_0 в множестве C, для которого значение функции $f(x_0)$ является наименьшим (наибольшим) в множестве всех значений $\{f(x): x \in C\}$ и символически записывается в виде: $x \in C, f(x) \to min(max)$.

Если в этой задаче функция f линейна, а множество C задается системой линейных уравнений и неравенств, то говорят о линейной экстремальной задаче, или линейной оптимизационной задаче.

Линейное программирование относится к числу наиболее широко распространенных методов анализа управляющих решений, используемых при решении производственных и коммерческих задач. Любая задача линейного программирования включает три основных элемента: управляемые переменные, целевую функцию и ограничения.

Разработанный и реализованный элективный курс для школьников основной и старшей школы «Математическое моделирование – школьникам. Линейные модели» [1] содержит следующие темы: Линейные функции одной и двух переменных; Линейные уравнения; Линейные неравенства и системы линейных уравнений и неравенств с двумя неизвестными; Графический метод решения систем линейных неравенств с двумя неизвестными; Линейные оптимизационные модели; Симплекс-метод. Часть математических знаний (линейные функции, линейные уравнения с одной и двумя переменными, линейные неравенства с одной и двумя переменными, системы линейных уравнений и линейных неравенств с одной и двумя переменными) имеется в основной школьной программе по математике, поэтому введение понятия линейной оптимизационной модели вводится без особых затруднений, а затем на основе графического метода вводятся методы решения линейных оптимизационных задач с двумя неизвестными (графический и компьютерный – с помощью программы «Excel»). С целью выполнения принципа фундаментализации знаний и наглядного моделирования в обучении все понятия курса вводятся на основе геометрического подхода, который реализован посредством координатного метода, позволяющего дать наглядную интерпретацию связи основных понятий алгебры и геометрии – чисел и точек соответственно. Кроме этого курс построен на строгом доказательстве всех теоретических положений, в частности, теорем о графике линейной функции, графике линейного уравнения с двумя неизвестными, графическом способе решения систем линейных уравнений и неравенств с двумя неизвестными и их приложениях и др.

В ходе конструирования курса был разработан граф согласования математических и экономических знаний, которые интегрируются в ходе проведения элективного курса; составлены банки мотивационно-прикладных задач на линейные модели реальных процессов; описаны некоторые модели реальных линейных процессов: модель времени, модель равномерного прямолинейного движения, модель рыночного равновесия, модель национального дохода, линейные оптимизационные модели, модель распределения ресурсов.

В качестве примера рассмотрим следующую мотивационно-прикладную линейную оптимизационную задачу, адаптированную для школьной математики [2]:

Фермер выращивает для продажи кроликов двух пород — Русский косой и Белый великан, причем число кроликов породы Белый великан как минимум втрое меньше числа кроликов породы Русский косой. Спрос на породу Русский косой не превосходит 20 кроликов за 1 раз, а спрос на породу Белый великан достаточно высок — за один раз удается продать от 25 до 50 кроликов. Кроликовод обычно везет животных в клетке, которая вмещает не более 60 кроликов. Сколько кроликов каждой породы нужно взять для получения максимальной прибыли от продажи за 1 раз, если прибыль от продажи 1 кролика породы Русский косой составляет 450 рублей, а от продажи 1 кролика породы Белый великан — 300 рублей.

Решение данной задачи и иных задач курса строится на применении метода математического моделирования, который характеризуется несколькими этапами, позволяющими осуществить моделирование реальной ситуации, проанализировать результат решения и построить цепочку задач на основе имеющейся фабулы задачи:

I этап – постановка проблемы (работа по созданию предмодели);

II этап – анализ данных задачи, поиск закономерностей;

III этап – формализация проблемы, построение модели;

IV этап – внутримодельное решение;

V этап – интерпретация модели;

VI этап – проверка адекватности модели;

VII этап – чувствительность модели.

Элективный курс «Математическое моделирование-школьникам. Линейные модели» предполагает работу учащихся с разноуровневыми заданиями, включая работу по созданию собственных мотивационно-прикладных линейных оптимизационных задач, тем самым создавая возможность развития умения применять математическое моделирование реальных процессов на разном уровне сформированности этого умения. Результаты данной работы докладываются учащимися на конкурсах проектно-исследовательских работ школьников.

Ещё одним эффективным средством формирования у учащихся умения применять математическое моделирование является участие школьников в интеллектуальных командно-личных соревнованиях по математическому моделированию, в которых сложным знанием являются *многоэтапные мультидисциплинарные задачи на построение математической модели реальной ситуации, для решения которых необходимы знания по математике, информатике и одной или нескольким естественно-научным дисциплинам.*

Примером таких соревнований являются международные интеллектуальные мультидисциплинарные командно-личные соревнования школьников IMMC, которые уже более двадцати лет с успехом проводятся в разных странах. В Китае, к примеру, в таких конкурсах ежегодно принимает участие более 40000 школьников, а предмет «математическое моделирование» в этой стране введён в школьную общеобразовательную программу.

В России впервые в ноябре 2018 года в СУНЦ МГУ был организован I Международный командно-личный турнир школьников 8-10 классов по математическому моделированию (ТММ, МаМоНТ). Основной этап конкурса 2018 года – решение реальной производственной задачи «Калибровка акселерометров», предложенной фирмой Huawei – многоэтапной мультидисциплинарной задачи, с условием задачи можно ознакомиться по ссылке: http://internat.msu.ru/wp-content/uploads/2018/10/zadacha_KMM2018.pdf.

Анализ трехлетних результатов турнира по всем участникам в двух лигах (старшей – 10-11 классы и младшей – 8-9 классы) показал, что высокий уровень сформированности умений решать предложенные задания показывают учащиеся 11-х классов специализированных математических школ и центров, которые кроме получения традиционных академических знаний в области математики, информатики и естественнонаучных дисциплин, получают необходимые знания на кружках по математическому моделированию, организованных в этих школах. В таких кружках у учащихся формируются умения формулировать ситуацию на языке математики, умения применять математические понятия, факты, процедуры, умения интерпретировать, использовать и оценивать математические результаты, т.е. строить математические модели реальных ситуаций и процессов.

Расширение практики проведения конкурсов по математическому моделированию в школах страны (адаптируя задачи турнира на массовый школьный уровень), позволит повысить уровень компетенций в области математического моделирования школьных учителей, разработать адаптированные образовательные программы по математическому моделированию для организации школьных кружков, спецкурсов и /или факультативов и серии многоэтапных мультидисциплинарных мотивационно-прикладных задач.

Список литературы

1. Абатурова В.С. Математическое моделирование школьникам. Линейные модели: Учебное пособие. Владикавказ: Владикавказский научный центр РАН и РСО-А, 2007. 112 с.
2. Абатурова В.С. Математическое моделирование в обучении математике: Математическое моделирование как средство формирования познавательной самостоятельности учащихся. Саарбрюккен: LAP LAMBERT Academic Publising, Германия, 2012. 177 с.
3. Канторович Л.В., Горстко А.Б. Оптимальные решения в экономике. М.: Наука, 1972. 231 с.
4. Образование для сложного общества. Доклад Global Education Futures. 2018. URL: https://drive.google.com/file/d/0B9ZvF6mQ5FMbSTFKVmhodU5rNTNiTXpUZ2QwZktiR0pzSmJR/view
5. Рослова Л.О. Функциональная математическая грамотность: что под этим понимать и как формировать // Педагогика. 2018. № 10. С. 48-56.
6. Смирнов Е.И. Инновационное содержание и синергия математического образования будущего учителя / Современные проблемы математики и математического образования: XV: Владикавказская молодежная математическая школа. Математический форум (25-27 сентября 2020). Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН. С. 132-169.

ON THE FORMATION AND DEVELOPMENT OF STUDENTS' ABILITY TO APPLY MATHEMATICAL MODELING IN SOLVING MOTIVATIVE-APPLIED PROBLEMS

V.S. Abaturova
Ph.D. (Pedagogy), Senior Researcher
veronika-abaturova@yandex.ru
Vladikavkaz

Southern Mathematical Institute

Abstract. The article is devoted to the problem of the formation and development of students' ability to apply mathematical modeling in solving motivational-applied educational problems on the basis of complex mathematical knowledge adapted to school education - linear programming problems. The tasks of this class form the basis of one of the modern developing branches of applied mathematics, opened in 1939 by the outstanding Soviet mathematician, Nobel Prize winner Academician L.V. Kantorovich. The relevance of this study is due to the formation of new models of education development by various groups of researchers and the need to search for new means, forms, methods and content of mathematical education that can effectively develop in students the ability to apply the acquired mathematical knowledge in practice, which is important in the 21st century. The functional literacy of trainees according to the results of research in the field of school mathematics education, including the international monitoring research "PISA", remains insufficient. The experience of development and implementation at school of the elective course “Mathematical modeling - for schoolchildren. Linear Models”, the content of which includes motivational and applied linear optimization problems and the mathematical apparatus necessary for their solution. The elective course is developed on the principles "from simple to complex", fundamentalization, applied orientation. The course is focused on the formation of skills to apply all stages of mathematical modeling in solving problems, allowing students to create their own motivational and applied tasks based on modeling real processes and phenomena described by linear optimization models. As an effective means of forming students' ability to apply mathematical knowledge in practice, multi-stage multidisciplinary tasks for building a mathematical model of a real situation are presented, for the solution of which knowledge in mathematics, computer science and one or several natural science disciplines, offered to students during participation in the All-Russian team tournament of schoolchildren in mathematical modeling carried out by SSC MSU, in which the author has been participating for several years with a team of schoolchildren.

Keywords: mathematical modeling, motivational and applied problems, complex knowledge, linear optimization models.

References

1. Abaturova, V.S. (2007). *Matematicheskoe modelirovanie shkol'nikam. Linejnye modeli: Uchebnoe posobie* [Mathematical modeling for schoolchildren. Linear models.]. Vladikavkaz: Vladikavkazskij nauchnyj centr, 112 p. (In Russ.)
2. Abaturova, V.S. (2012). *Matematicheskoe modelirovanie v obuchenii matematike: Matematicheskoe modelirovanie kak sredstvo formirovaniya poznavatel'noj samostoyatel'nosti uchashchihsya* [Mathematical modeling in teaching mathematics: Mathematical modeling as a means of forming the cognitive independence of students]. Saarbryukken: LAP LAMBERT Academic Publising, Germaniya. 177 p. (In Russ.)
3. Kantorovich, L.V., Gorstko, A.B. (1972). *Optimal'nye resheniya v ekonomike* [Optimal solutions in the economy]. Moscow: Nauka. 231 p. (In Russ.)
4. *Obrazovanie dlya slozhnogo obshchestva. Doklad Global Education Futures* [Education for a complex society. Global Education Futures Report]. 2018. URL: https://drive.google.com/file/d/0B9ZvF6mQ5FMbSTFKVmhodU5rNTNiTXpUZ2QwZktiR0pzSmJR/view
5. Roslova, L.O. (2018). Funkcional'naya matematicheskaya gramotnost': chto pod etim ponimat' i kak formirovat' [What is functional mathematical literacy and how it should be formed]. Pedagogika [Pedagogy], 10, 48-56. (In Russ., abstract in Eng.)
6. Smirnov, E.I. (2020). Innovacionnoe soderzhanie i sinergiya matematicheskogo obrazovaniya budushchego uchitelya [Innovative content and synergy of mathematical education of the future teacher]. *Sovremennye problemy matematiki i matematicheskogo obrazovaniya: XV: Vladikavkazskaya molodezhnaya matematicheskaya shkola. Matematicheskij forum* (25-27 Sentyabrya, 2020, Vladikavkaz), 132-169. (In Russ.)