References

1. Grishin, A.A., Stroyev, S.P. (2018). Efficiency Research for Classification Algorithms Using Decision Trees for Economic Forecasting Based on Posteriori Data [*Issledovaniye effektivnosti algoritmov klassifikatsii, ispol'zuyushchikh derev'ya resheniy, dlya ekonomicheskogo prognozirovaniya na osnove aposteriornykh dannykh*]. *Journal of the Technological University*. Vol. 21(9). Pp. 180–187.
2. Grishin, A.A., Stroyev, S.P. (2018). Development of a Behavioral Scoring Model Using Gradient Boosting Methods [*Razrabotka modeli povedencheskogo skoringa s ispol'zovaniyem metodov gradiyentnogo bustinga*]. *Scientific and Technical Journal of the Volga Region.* Vol. 9. Pp. 93–98.
3. Bialas, P. A. Multi-instance deep neural network classifier: application to Higgs boson CP measurement [Online Resource]. arXiv: 1803.00838v2. URL: https://arxiv.org/pdf/1803.00838.pdf.
4. Bühlmann, P., Hothorn, T. (2007). Boosting algorithms: regularization, prediction and model fitting. *Statistical Science*. Vol. 22 (4). Pp. 477–505.
5. Brownlee, J. (2017). *XGBoost With Python: Gradient Boosted Tree With XGBoost and scikit-learn*. Machine Learning Mastery.
6. Dorogush, A.V., Ershov, V., Gulin, A. (2017). CatBoost: gradient boosting with categorical features support. Workshop on ML Systems at NIPS 2017.
7. Hossin, M., Sulaiman, M.N. (2015). A Review on Evaluation Metrics for Data Classification Evaluations: IJDKP. *International Journal of Data Mining & Knowledge Management Process*. Vol. 5 (2). Pp. 1–11.
8. Lipton, Z.C. Thresholding Classifiers to Maximize F1 Score [Online Resource]. arXiv: 1402.1892v2. URL: https://arxiv.org/pdf/1402.1892.pdf

УДК 519.652

«ЗЕРКАЛЬНЫЙ» МЕТОД РАСЧЕТА СПЛАЙН КРИВОЙ

Анастасия Валерьевна Журавлева
студент
anastasiya_zhuravleva98@mail.ru
г. Краснодар
Кубанский государственный университет

Алдияр Бексеитович Даулеткулов
учитель физики и информатики
aldauletkulov@ mail.ru
г. Алматы
Школа ОРФО «БЭСТ»

Аннотация. Авторами статьи предложен «зеркальный» метод расчета сплайн кривой, в котором учитываются значения функций $f(x_{i-1})$, $f(x_i)$, $f(x_{i+1})$. Использование этих значений приводит к «физически» более правильному «отражению» интерполяционной кривой в области опорных точек, появляется возможность избежать ложных максимумов и минимумов. Проверка данного метода показала, что появляется возможность его применения как для интерполяции «простых» функций, так и для «тяжелых» для интерполяции экспериментальных данных, а это значит, что «зеркальный» метод можно назвать универсальным. «Зеркальный» метод устойчив, это говорит о том, что результаты не зависят от направления вычислений, имеет радиус локальности 1. В статье показано, что формула для расчета «центральных» разностей (метода

конечных разностей) является предельным случаем метода «зеркальных» разностей.

Ключевые слова: кубический сплайн, интерполяция, зеркальный метод, метод конечных разностей.

Не претендуя на широту охвата всех теоретических вопросов интерполяции, рассмотрим только несколько практических проблем применения сплайн интерполяции и в частности интерполяцией кубическими сплайнами.

Первая проблема связана с проявлением эффекта описанного Карлом де Буром (Boor C. de) [3]. Им были приведены результаты обработки данных изменение механических свойств титана при нагреве с помощью кубического сплайна. На рис.1 показаны исходные данные и интерполяционные кривые.

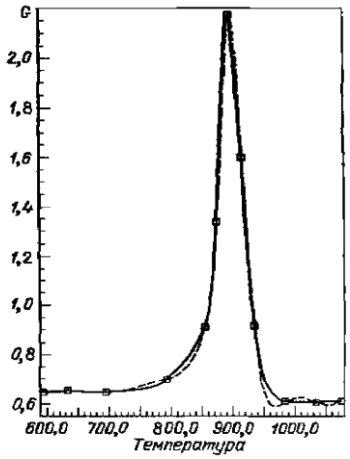


Рис. 1. Изменение механических свойств титана при нагреве (из работы Карл де Бур. «Практическое руководство по сплайнам)

На рис. 1 рядом с большим рефлексом (слева и справа) заметны два «ложных» максимума, то есть имеются чужеродные точки перегиба графика функции. Появление таких ложных максимумов и минимумов будем называть «эффект бабочки», а ложные минимумы и максимумы «крылья».

Вторая проблема связана с локальностью, то есть интерполянта должна иметь минимальный радиус локальности. Это особенно важно при интерполировании сложных экспериментальных данных, например рентгеновских дифрактограмм. При этом метод должен показывать достаточную точность при интерполировании простых и употребительных функций.

В качестве одного из эффективных методов нивелирования «эффекта бабочки» предлагается метод Хиеоши Акима (Hieoshi Akima) [4]. Но данный метод имеет радиус локальности 2, для построения сплайна Акимы требуется не менее 5 точек (две слева и две справа от $i^{ой}$). Вторым свойством, которое следует принимать во внимание, является нелинейность интерполяции сплайнами Акимы – результат интерполяции суммы двух функций не равен сумме интерполяционных схем, построенных на основе отдельных функций.

При поиске метода построения сплайн кривой наименее подверженному появлению «эффекта бабочки» был взят за основу сплайн Catmull-Rom (в честь Эдвина Кэтмалла и Рафаэля Рома) — это сплайн Эрмита, производные которого выбраны равными:

$$f'(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{x_{i+1} + x_{i-1}} = m_i \qquad (1)$$

Однако, на наш взгляд, кажется странным, что при вычислении «центральной разницы» не учитывается значение функции в точке, для которой и рассчитывается производная. При этом значения m_i только тогда является значением касательной в точке x_i, когда точка (x_i,y_i) находится на отрезке прямой проходящей через точки (x_{i-1},y_{i-1}) и (x_{i+1},y_{i+1}), как показано на рис. 2 или длины этих отрезков равны.

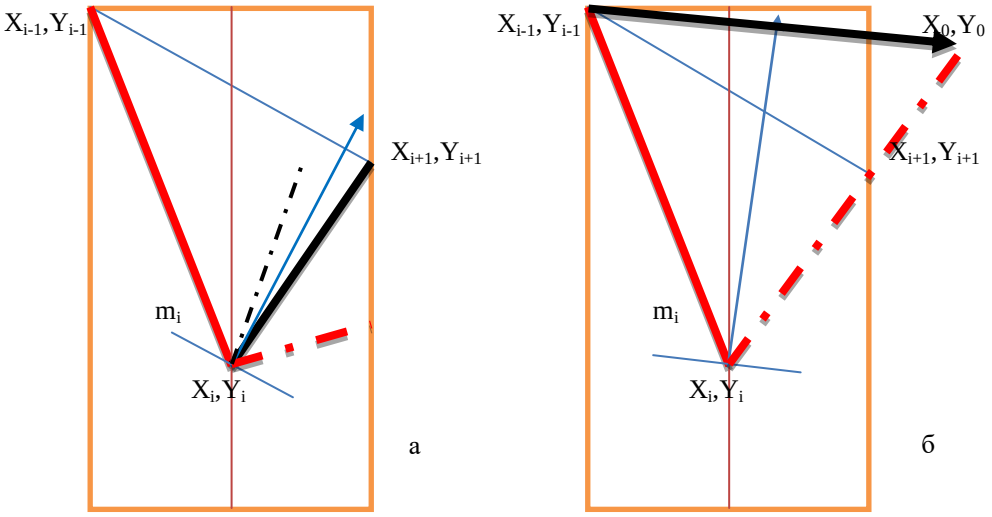


Рис. 2. Применяемый метод расчета (а), предложенный (б)

Если в качестве значения производной взять перпендикуляр к биссектрисе угла межу отрезками $[y(x_{i-1}), y(x_i)]$ и $[y(x_i), y(x_{i+1})]$, то проведя несложные преобразования, основанные на известных формулах векторной алгебры, мы получили следующую формулу для вычисления m_i:

$$m_i = \frac{y_{(i+1)'} - y_{i-1}}{x_{(i+1)'} - x_{i-1}} \tag{2}$$

$$m_i = \frac{(y_{i+1} - y_i) * R_i + y_i - y_{i-1}}{(x_{i+1} - x_i) * R_i + x_i - x_{i-1}} \tag{3}$$

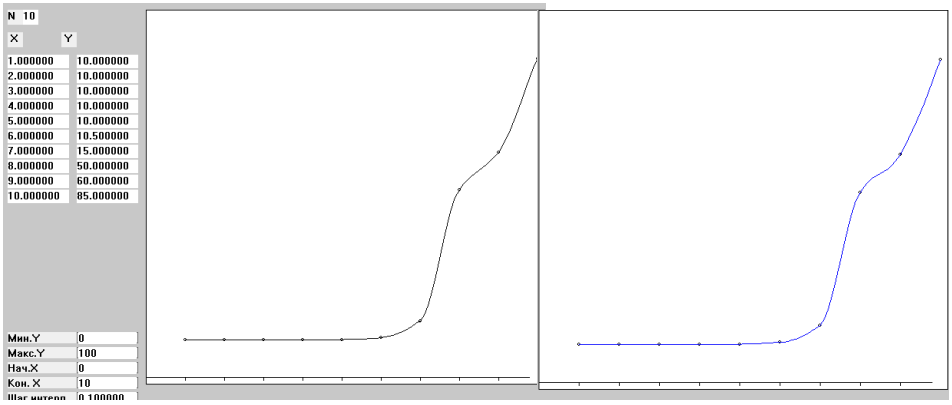
$$\text{где} \quad R_i = \frac{\sqrt{(y_{i-1}-y_i)^2+(x_{i-1}-x_i)^2}}{\sqrt{(y_{i+1}-y_i)^2+(x_{i+1}-x_i)^2}}$$

Предложенная формула использует принцип зеркального отражения: «Угол падения равен углу отражения». В случае, когда R стремится к 1 мы получаем формулу (1) для расчета центральной разницы в методе конечных разностей, применяемая в методе Эдвина Кэтмалла и Рафаэля Рома.

Если в узлах x_i, x_{i+1} заданы значения: f_i, f_{i+1}, которые принимает кубический сплайн, то на частичном отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ он принимает вид [1]:

$$S_3(x) = \frac{(x_{i+1} - x)^2(2(x - x_i) + h)}{h^3} f_i + \frac{(x - x_i)^2(2(x_{i+1} - x) + h)}{h^3} f_{i+1} + \frac{(x_{i+1} - x)^2(x - x_i)}{h^2} m_i + + \frac{(x - x_i)^2(x - x_{i+1})}{h^2} m_{i+1} \tag{4}$$

Используя в качестве значений m_i, вычисленных по формуле (3), нами была построена сплайн кривая, для примера из работы Х.Акима [3]. Результаты представлены на рис. 3.



а) б)

Рис. 3. Тест Х.Акима. Кривые интерполяции «зеркальный» метод (а), метод Х.Акима (б)

Были проведены сравнения поведения кривых сплайн интерполяции, полученной "стандартными" методами, и предложенным при измененных входных данных. Результаты приведены на рис. 4.

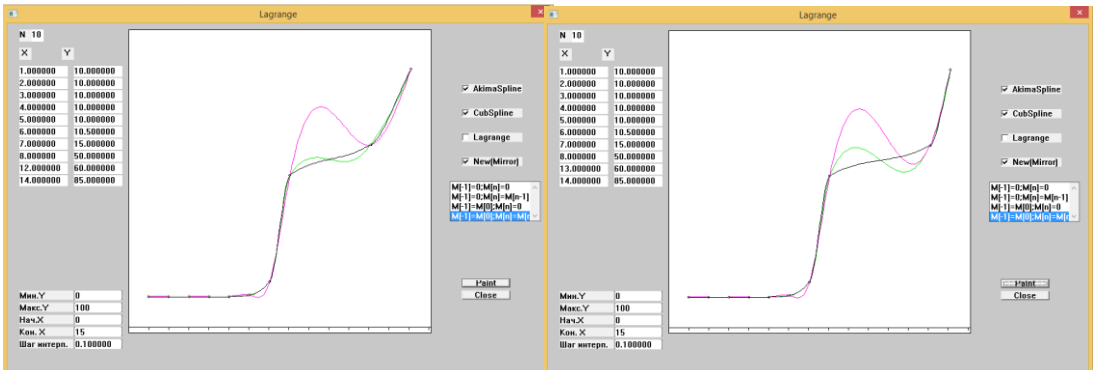


Рис. 4. Измененный тест Х. Акима. Кривые интерполяции при применении «зеркального» метода (черный), метода Акима (зеленый), «стандартного» кубического сплайна (розовый)

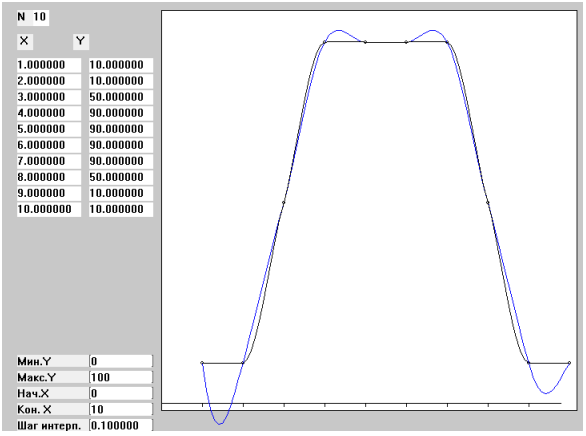


Рис. 5. Кривые сплайн интерполяции «широкий пьедестал» методом Х.Акима (синий), «зеркальный» (черный)

На кривых сплайн интерполяции полученных стандартными методами, в том числе и методами Х. Акима и Catmull-Rom, выявлен «эффект бабочки». Это наиболее сильно проявляется, когда имеется «удлиненный» крутой участок при чередовании пологих и крутых участков, например, рис. 4 и 5. При этом на рис. 5 помимо двух симметричных

максимумов при интерполяцией по методу Х. Акима имеем два несимметричных минимума, хотя исходные данные симметричны. Проведенные нами исследования показали, что устойчивостью к направлению вычислений (справа налево или слева направо) обладает только «зеркальный» метод.

Таблица 1.

Среднеквадратичное отклонение результатов интерполяции простых функций

№	Функция	Интервал	Кубический	Лагранж	Акима	Mirror	
						Шаг 1,0	Шаг 0,5
1	e^x	-3…3	0,0481	0,00009	0,0178	0,0104	0,00057
2	$Ln\ (x-0.1)$	1…6	0,00196	0,000432	0,00213	0,000329	0,000152
3	$\frac{1}{x}$	1…6	0,00431	0,00117	0,000496	0,000484	0,00027
4	$e^{-0.01x^2}$	-8…3	3,47E-05	2,89E-08	8,23E-06	3,29E-06	1,08E-11
5	$\sqrt{(25-x^2)}$	-5…5	0,0101	0,00353	0,00899	0,0112	0,0104
6	$\frac{x}{(1+5x^2)}$	-5…5	0,00409	0,00482	0,00490	0,00441	0,00143
7	|x|	-6…6	0,00456	0,232	0,00362	0,00362	Расчет не проводился

Для проведения исследований на воспроизводимость простых функций, был взят ряд функций из работы [2]. Рассчитывалось среднеквадратичное отклонение рассчитанных точек от «эталонных». Результаты сравнивались с результатами полученными методами Лагранжа, «стандартным» кубическим сплайном и сплайном, полученным по методу Акима. Задание табличных значений велось с шагом 1.0. Дополнительно, для исследования изменение шага интерполяции на точность «зеркального» метода, проводилась интерполяция по исходным данным заданных с шагом 0.5. Кривые интерполяции рассчитывались с шагом 0,1. Данные сравнения приведены в таблице 1.

Результаты проверки качества интерполяции «зеркальным» показали приемлемость применения данного метода для восстановления простых и употребляемых функций.

Список литературы

1. Волков Е.А. Численные методы. М.: Наука, 1987.
2. Знаменский С.В. Численная оценка точности интерполяции несложных элементарных функций // Программные системы: теория и приложения. 2018. Т. 9. №4(39). С. 69–92.
3. Карл де Бур. Практическое руководство по сплайнам. М.: Радио и связь. 1985.
4. Hieoshi Akima. A New Method of Interpolation and Smooth Curve Fitting Based on Local Procedures // Journal of the Association for Computing Machinery. 1970. Vol. 17(4). Pp. 689–302.

THE MIRROR METHOD FOR CALCULATING THE SPLINE CURVE

A.V. Zhuravleva | Kubanskij State University
student
anastasiya_zhuravleva98@mail
Krasnodar
A.B. Dauletkulov | School of ORFO "BEST"
physics and computer science teacher
aldauletkulov@ mail.ru
Almaty

Abstract. The authors of the article proposed " the mirror" method for calculating the spline curve, which takes into account the values of the functions f (x_{i-1}), f (x_i), f (x_{i+1}). The use of these values leads to a "physically" more correct "reflection" of the interpolation curve in the region of the reference points; it becomes possible to avoid false maxima and minima. Testing of this method showed that it becomes possible to use it both for interpolating "simple" functions and for "heavy" ones for interpolating experimental data, which means that the "mirror" method can be called universal. The "mirror" method is stable, this means that the results do not depend on the direction of the calculations, it has a locality radius of 1. The article shows that the formula for calculating the "central" differences (finite difference method) is the limiting case of the "mirror" difference method.

Keywords: a cubic spline, an interpolation, the mirror method, a finite difference method

References

1. Volkov, E.A. (2007). Numerical methods. [*Chislennyye metody*]. Moscow.: Nauka, 1987.
2. Znamenskij, S.V. (2018). A numerical estimate of the accuracy of interpolation of simple elementary functions *[Chislennaja ocenka tochnosti interpoljacii neslozhnyh jelementarnyh funkcij]*. *Software systems: theory and applications.* Vol. 9. No. 4 (39). Pp. 69–92.
3. Karl de Bur. (1985). A practical guide to splines [*Prakticheskoe rukovodstvo po splajnam*]. Moscow: Radio and communication.
4. Hieoshi Akima (1970). A New Method of Interpolation and Smooth Curve Fitting Based on Local Procedures. *Journal of the Association for Computing Machinery*. Vol. 17(4). Pp. 689–302.

УДК 517.956.6

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ОПЕРЕЖАЮЩЕ-ЗАПАЗДЫВАЮЩИХ УРАВНЕНИЙ

Александр Николаевич Зарубин | Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева
д.ф.-м.н, профессор
aleks_zarubin@mail.ru
г. Орел

Аннотация. В прямоугольной области рассматривается двумерное функциональное опережающе-запаздывающее уравнение. Функциональные