THE MIRROR METHOD FOR CALCULATING THE SPLINE CURVE

A.V. Zhuravleva | Kubanskij State University
student
anastasiya_zhuravleva98@mail
Krasnodar
A.B. Dauletkulov | School of ORFO "BEST"
physics and computer science teacher
aldauletkulov@ mail.ru
Almaty

Abstract. The authors of the article proposed " the mirror" method for calculating the spline curve, which takes into account the values of the functions f (x_{i-1}), f (x_i), f (x_{i+1}). The use of these values leads to a "physically" more correct "reflection" of the interpolation curve in the region of the reference points; it becomes possible to avoid false maxima and minima. Testing of this method showed that it becomes possible to use it both for interpolating "simple" functions and for "heavy" ones for interpolating experimental data, which means that the "mirror" method can be called universal. The "mirror" method is stable, this means that the results do not depend on the direction of the calculations, it has a locality radius of 1. The article shows that the formula for calculating the "central" differences (finite difference method) is the limiting case of the "mirror" difference method.

Keywords: a cubic spline, an interpolation, the mirror method, a finite difference method

References

1. Volkov, E.A. (2007). Numerical methods. [*Chislennyye metody*]. Moscow.: Nauka, 1987.
2. Znamenskij, S.V. (2018). A numerical estimate of the accuracy of interpolation of simple elementary functions *[Chislennaja ocenka tochnosti interpoljacii neslozhnyh jelementarnyh funkcij]*. *Software systems: theory and applications.* Vol. 9. No. 4 (39). Pp. 69–92.
3. Karl de Bur. (1985). A practical guide to splines [*Prakticheskoe rukovodstvo po splajnam*]. Moscow: Radio and communication.
4. Hieoshi Akima (1970). A New Method of Interpolation and Smooth Curve Fitting Based on Local Procedures. *Journal of the Association for Computing Machinery*. Vol. 17(4). Pp. 689–302.

УДК 517.956.6

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ОПЕРЕЖАЮЩЕ-ЗАПАЗДЫВАЮЩИХ УРАВНЕНИЙ

Александр Николаевич Зарубин | Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева
д.ф.-м.н, профессор
aleks_zarubin@mail.ru
г. Орел

Аннотация. В прямоугольной области рассматривается двумерное функциональное опережающе-запаздывающее уравнение. Функциональные

некарлемановские сдвиги являются взаимно-обратными диффеоморфизмами. Вопрос существования и единственности решения исследуемой задачи сводится к разрешимости блочной матричной системы в классе непрерывных функций.

Ключевые слова: функциональное уравнение, некарлеманоский сдвиг, опережение, запаздывание, блочная матрица.

Введение

Богатым источником разностных, q-разностных, дифференциально-разностных и других функциональных и дифференциально-функциональных уравнений являются краевые задачи для гиперболических систем уравнений в частных производных [6], численные методы решения задач для дифференциальных уравнений [4]. Интерес к функциональным уравнениям связан с возможностью использовать их для моделирования [1] сложных колебательных процессов; изучения упорядоченных структур (синергетика) [5]; проблем [3] турбулентности; устойчивости [2].

Рассматриваемая работа исследует задачу для функционального уравнения с некарлемановским запаздыванием и опережением вида

$$\sum_{n=-n_1}^{n_2}\sum_{k=-k_1}^{k_2} a_{k+k_1,n+n_1}u\left(\alpha_1^k(x),\alpha_2^n(x)\right)=0 \qquad (1)$$

в области $D=\{(x,y)\colon x_0<x<x_{k_2+1},y_0<y<y_{n_2+1}\}$ причем $n_j,k_j\in\mathbb{N}(j=1,2)$ $a_{k+k_1,n+n_1}=const;\alpha_1(t),\alpha(t)-$сохраняющие ориентацию взаимно-обратные $\alpha_{3-j}\left(\alpha_j(t)\right)=t(j=1,2)$ диффеоморфизмы класса C^1, удовлетворяющие условиям:
$\alpha_1(t)<t,\alpha'_1(t)>1\left(\alpha_1'(t)<1\right)$ и $\alpha_2(t)>t,\alpha'_2(t)<1\left(\alpha_2'(t)>1\right);t_n=\alpha_1(t_{n+1}),t_{n+1}=\alpha_2(t_n),\alpha_2(t_0)>0;\alpha_1(t_1)=t_0=0;\alpha_j^l\equiv\underbrace{\alpha_j(\alpha_j\left(\ldots\left(\alpha_j(t)\right)\ldots\right)}_{l-раз}$, если
$l>0;\ \alpha_j^l\equiv\underbrace{\alpha_{3-j}(\alpha_{3-j}\left(\ldots\left(\alpha_{3-j}(t)\right)\ldots\right)}_{-l-раз}$, если $l>0;\alpha_j^0(t)=t(j=1,2)$.

Постановка задачи

Не ограничивая общности и для наглядности рассмотрим уравнение (1), когда $n_1=n_2=1,k_1=k_2=1$ то есть

$$\sum_{n=-1}^{1}\sum_{k=-1}^{1} a_{k+1,n+1}u\left(\alpha_1^k(x),\alpha_2^n(x)\right)\equiv\sum_{n=-1}^{1}[a_{0,n+1}u(\alpha_2(x),\alpha_2^n(y))+a_{1,n+1}u(x,\alpha_2^n(y)+$$
$$+a_{2,n+1}u(\alpha_1(x),\alpha_2^n(y))]\equiv a_{0,0}u(\alpha_2(x),\alpha_1(y))+a_{0,1}u(\alpha_2(x),y)+a_{0,2}u(\alpha_2(x),\alpha_2(y))+$$
$$+a_{1,0}u\big(x,\alpha_1(y)\big)+a_{1,1}u(x,y)+a_{1,2}u\big(x,\alpha_2(y)\big)+a_{2,0}u\big(\alpha_1(x),\alpha_1(y)\big)+\ a_{2,1}u(\alpha_1(x),y)+$$
$$+a_{2,2}u\big(\alpha_1(x),\alpha_2(y)\big)=0,$$

$(x,y)\epsilon D=\{(x,y)\colon x_0<x<x_2,y_0<y<y_2\}=\cup_{i,j=0}^{1}D_{i,j}$, где $D_{kn}=\{(x,y)\colon x_k<x<x_{k+1},\ y_n<y<y_{n+1}\}\ (k,n=\overline{-1,2})$.

Задача R. Найти в области D решение $u(x,y)\in C(\bar{D})$ уравнения (2), удовлетворяющее условиям

$$u(x,y)=r_{-1,n}(x,y),(x,y)\in\ \bar{D}_{-1,n}\big(n=\overline{-1,2}\big), \qquad (3)$$

$$u(x,y)=\rho_{2,n}(x,y),(x,y)\in\bar{D}_{2,n}\big(n=\overline{-1,2}\big), \qquad (4)$$

$$u(x,y) = \gamma_{k,2}(x,y), (x,y) \in \overline{D}_{k,2}\ \left(k = -\overline{1,2}\right), \tag{5}$$

$$u(x,y) = \delta_{k,-1}(x,y), (x,y) \in \overline{D}_{k,-1}\ \left(k = -\overline{1,2}\right), \tag{6}$$

причем

$$r_{-1,-1}(x,y) = \delta_{-1,-1}(x,y), \rho_{2,-1}(x,y) = \delta_{2,-1}(x,y),$$
$$r_{-1,2}(x,y) = \gamma_{-1,2}(x,y), \rho_{2,2}(x,y) = \gamma_{2,2}(x,y),$$

где $r_{-1,n}(x,y), \rho_{2,n}(x,y)\ \left(n = -\overline{1,2}\right);\ \gamma_{k,2}(x,y), \delta_{k,-1}(x,y)\ \left(k = -\overline{1,2}\right)$ – заданные непрерывные функции.

Целью дальнейшей работы является построение алгоритма численного решения задачи **R,** то есть получения явной формулы решения.

Существование и единственность решения задачи R. Алгоритмизация

Теорема. Если $r_{-1,n}(x,y) \in C(\overline{D}_{-1,n}), \rho_{2,n}(x,y) \in C(\overline{D}_{2,n})\left(n = -\overline{1,2}\right);\ \ \gamma_{k,2}(x,y) \in C(\overline{D}_{k,2});\ \ \delta_{k,-1}(x,y) \in C(\overline{D}_{k,-1})\ \left(k = -\overline{1,2}\right);\ a_{0,j} = b_{2,j}\ (j = 0,1,2);\ \ det(A_1^2 - A_0A_2) \neq 0,$ то существует единственное решение $u(x,y)$ задачи **R.**

Доказательство.

В терминах функций

$$u_{i,j}(x,y) = u(x,y), (x,y) \in \overline{D}_{i,j}\ (i,j = -\overline{1,2}) \tag{7}$$

уравнение (2) представим в форме матричной системы сначала в области $D_{0,0} \cup D_{0,1} \subset D,$ работая по переменной *x*, а затем в области $D_{0,0} \subset D$, проведя преобразования по переменной y.

С этой целью в уравнении (2), записанном для областей $D_{j,0} \cup D_{j1}(j = 0,1)$, заменим переменную *x* на $\alpha_2^j(x)$ (x_k на $\alpha_2^j(x) = x_{k+j}(k = \overline{-1,2})(j = 0,1)$. Принимая во внимание обозначения (7), условия (3)-(6); что $x_j \leq \alpha_2^j(x) \leq x_{j+1}$ при $x_0 \leq x \leq x_1(j = 0,1)$, получим матричную систему уравнений

$$\sum_{n=-1}^{1} A_{n+1} \begin{pmatrix} u_{0,n+j}(x, \alpha_2^n(y)) \\ u_{1,n+j}(\alpha_2(x), \alpha_2^n(y)) \end{pmatrix} = -\sum_{n=-1}^{1} B_{n+1} \begin{pmatrix} u_{-1,n+j}(a(x), \alpha_2^n(y)) \\ u_{2,n+j}(\alpha_2^2(x), \alpha_2^n(y)) \end{pmatrix}, \tag{8}$$

$x_0 \leq x \leq x_1, y_j \leq y \leq y_{j+1}\ \ (j = 0,1),$

где

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{1,n+1} & a_{0,n+1} \\ a_{2,n+1} & a_{1,n+1} \end{pmatrix}, B_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{2,n+1} & 0 \\ 0 & a_{0,n+1} \end{pmatrix}. \tag{9}$$

В системе (8)-(9), записанной для областей $D_{0j}\,(j = 0,1)$, заменим переменную *y* на на $\alpha_2^j(y)$ (y_k на $\alpha_2^j(y_k) = y_{k+j}(k = \overline{-1,2})(j = 0,1)$. Принимая во внимание обозначения (7), условия (3)-(6); что $y_j \leq \alpha_2^j(y) \leq y_{j+1}$ при $y_0 \leq y \leq y_1(j = 0,1)$, получим эквивалент задачи **R** для уравнения (2) в форме матричной системы уравнений

$$\sum_{n=-1}^{1} A_{n+1} \begin{pmatrix} u_{0,n+j}(x, \alpha_2^{n+j}(y)) \\ u_{1,n+j}(\alpha_2(x), \alpha_2^{n+j}(y)) \end{pmatrix} = -\sum_{n=-1}^{1} B_{n+1} \begin{pmatrix} u_{-1,n+j}(a_1(x), \alpha_2^{n+j}(y)) \\ u_{2,n+j}(\alpha_2^2(x), \alpha_2^{n+j}(y)) \end{pmatrix},$$

$x_0 \leq x \leq x_1, y_0 \leq y \leq y_1\ \ (j = 0,1),$

или, используя клеточные матрицы, обозначения (7), условия (3)-(6),

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_0 & A_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{0,0}(x,y) \\ u_{1,0}(\alpha_2(x),y)) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} u_{0,1}(x,\alpha_2(y)) \\ u_{1,1}(\alpha_2(x),\alpha_2(y)) \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1(x,y) \\ Q_2(x,y) \end{pmatrix} \equiv -\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_0 & B_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{-1,0}(\alpha_1(x),y)) \\ \rho_{2,0}(\alpha_2^2(x),y)) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} r_{-1,1}(\alpha_1(x),\alpha_2(x)) \\ \rho_{2,1}(\alpha_2^2(x),\alpha_2(y)) \end{pmatrix} \end{pmatrix} -$$

$$-\begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{0,-1}(x,\alpha_2(y)) \\ \delta_{1,-1}(\alpha_2(x),\alpha_1(y)) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \gamma_{0,2}(x,\alpha_2^2(x)) \\ \gamma_{1,2}(\alpha_2(x),\alpha_2^2(y)) \end{pmatrix} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} B_0 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{-1,-1}(\alpha_1(x),\alpha_1(y)) \\ \rho_{2,-1}(\alpha_2^2(x),\alpha_2(y)) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} r_{-1,2}(\alpha_1(x),\alpha_2(y)) \\ \rho_{2,2}(\alpha_2^2(x),\alpha_2^2(y)) \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$x_0 \le x \le x_1, y_0 \le y \le y_1$, где $Q_j(x,y) -$ матрицы-столбцы правых частей системы $(j = 0,1)$.

Если $a_{0,j} = a_{2,j}$ $(j = 0,1,2)$, то матрицы $A_j (j = 0,1,2)$ из (9) будут симметричны и попарно коммутативны. Тогда при $\det(A_1^2 - A_0A_2) \neq 0$ существует единственная обратная матрица

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_0 & A_1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{|A_0A_2 - A_1^2|}\begin{pmatrix} -A_1 & A_2 \\ A_0 & -A_1 \end{pmatrix},$$

которая позволяет получить единственное решение матричной системы (10) в виде

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{0,0}(x,y) \\ u_{1,0}(\alpha_2(x),y)) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} u_{0,1}(x,\alpha_2(y)) \\ u_{1,1}(\alpha_2(x),\alpha_2(y)) \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \frac{1}{|A_0A_2 - A_1^2|}\begin{pmatrix} -A_1 & A_2 \\ A_0 & -A_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_1(x,y) \\ Q_2(x,y) \end{pmatrix},$$

$x_0 \le x \le x_1, y_0 \le y \le y_1$, то есть

$$\begin{pmatrix} u_{0,0}(x,y) \\ u_{1,0}(\alpha_2(x),y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(x,y) \\ F_2(x,y) \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{|\mathrm{A}_0A_2 - A_1^2|}\big(-A_1Q_1(x,y) + A_2Q_2(x,y)\big),$$

$x_0 \le x \le x_1, y_0 \le y \le y_1$;

$$\begin{pmatrix} u_{0,1}(x,\alpha_2(y)) \\ u_{1,1}(\alpha_2(x),\alpha_2(y)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_1(x,y) \\ G_2(x,y) \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{|A_0\mathrm{A}_2 - \mathrm{A}_1^2|}\big(A_0Q_1(x,y) - A_1Q_2(x,y)\big),$$

$x_0 \le x \le x_1, y_0 \le y \le y_1$.

Поэтому

$$\begin{gathered} u_{0,0}(x,y) = F_1(x,y), x_0 \le x \le x_1, y_0 \le y \le y_1; \\ u_{1,0}(\alpha_2(x),y) = F(x,y), x_0 \le x \le x_1, y_0 \le y \le y_1; \\ u_{0,1}(x,\alpha_2(y)) = K_1(x,y), x_0 \le x \le x_1, y_0 \le y \le y_1; \\ u_{1,1}(\alpha_2(x),\alpha_2(y) = K_2(x,y), x_0 \le x \le x_1, y_0 \le y \le y_1. \end{gathered} \quad (11)$$

то есть, согласно (7), (11),

$$u(x,y) = \begin{cases} u_{0,0}(x,y) = F_1(x,y), x_0 \le x \le x_1, y_0 \le y \le y_1; \\ u_{1,0}(x,y) = F_2(\alpha_1(x),y), x_1 \le x \le x_2, y_j \le y \le y_1; \\ u_{0,1}(x,y) = G_1(x,\alpha_1(y)), x_0 \le x \le x_1, y_1 \le y \le y_2; \\ u_{1,1}(x,y) = G_2(\alpha_1(x),\alpha_1(y)), x_1 \le x \le x_2, y_1 \le y \le y_2. \end{cases}$$

является единственным решением задачи **R** для уравнения (2) в области D из класса непрерывных функций.

Теорема доказана.

Список литературы

1. Витт А.А. К теории скрипичной струны // Журнал технической физики. 1936. Т.6. №9. С. 1459–1479.
2. Колмановский В.Б., Носов В.Р. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последствием. М.: Наука, 1981.
3. Рошко А. Структура турбулентных сдвиговых течений: новая точка зрения // Ракетная техника и космонавтика. 1976. №14 (10). С.8–20.
4. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
5. Ханкен Г. Синергетика. Иерархия неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. М.: Мир,1985.
6. Шарковский А.Н., Майстренко Ю.Л., Романенко Е.Ю. Разностные уравнения и их приложения. Киев.: Изд-во Наукова думка, 1986.

ALGORITHM FOR SOLVING PROBLEMS FOR FUNCTIONAL LEADING-LAGGING EQUATIONS

A.N. Zarubin
Dr. Sci. (Mathematics), professor
aleks_zarubin@mail.ru
Orel

Turgenev Oryol state University

Abstract. In a rectangular area, we consider a two-dimensional functional leading-lagging equation. Functional ncelemesi shifts are mutually inverse diffeomorphisms. The question of the existence and uniqueness of the solution of the problem under study is reduced to the solvability of a block matrix system in the class of continuous functions.

Keywords: functional equation, ncelemesi shift, advance, delay, block matrix.

References

1. Witt, A. A. (1936). On the theory of the violin string [*K teoriy skripichnoi strunyi*]. *Jurnal Techn. physics.* Vol. 9. Pp. 1459–1479.
2. Kolmanovsky, V. B., Nosov, V. R. (1981). *Stability and periodic regimes of regulated systems with consequences* [*Ustoichivost i periodicheskie reshimi regyliryemix system s posledstviem*]. Moscow: Nauka.
3. Roshko, A. (1976). Structure of turbulent shear flows: a new point of view.technology and cosmonautics [*Struktyra tyrbylentnix sdvigovix techeni: novaya tochka zreniya*]. *Rocket. technology and cosmonautics*. Vol. 10. Pp. 8–20.
4. Samarskiy, A.A., Nikolaev, E.S. (1978). *Methods for solving grid equations* [*Metody resheniya setochnykh uravneniy*]. Moscow: Nauka.
5. Haken, G. (1985) *Synergetics. Hierarchy of instabilities in self-organizing systems and devices* [*Sinergetika. Ierarhiya neystoichivosty v samoorganizyishixsy sistemax*]. Moscow: Mir.
6. Sharkovskii, A.N., Maistrenko, Yu.L., Romanenko, E.Y. (1986). *Difference equations and their applications* [*Raznostnye uravneniya i ih prilozheniya*]. Kiev: Naukova Dumka.