УДК 517.956.6

ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДВУМЕРНОГО РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ

Александр Николаевич Зарубин
д.ф.-м.н., профессор
aleks_zarubin@mail.ru
г. Орёл
Елена Викторовна Чаплыгина
к.ф.-м.н., доцент
lena260581@yandex.ru
г. Орёл

Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева

Аннотация. Рассматривается в частных разностях двумерное уравнение с опережением и запаздыванием, которое является разностным оператором вполне интегрируемого дифференциально-функционального уравнения. Вопрос существования и единственности редуцируется к разрешимости блочной матричной системы в классе непрерывных функций.

Ключевые слова: разностное уравнение, частные разности, функциональные сдвиги, опережение, запаздывание.

Введение

Среди дифференциально-функциональных уравнений [1] с разностным оператором

$$Lu(x,y) \equiv \sum_{n=-n_1}^{n_2} \sum_{k=-k_1}^{k_2} b_{k+k_1,n+n_1} u(x-k\tau, y+nh), n_j, k_j \in \mathbb{N}(j=1,2) \tag{1}$$

можно выделить класс вполне интегрируемых [3] уравнений

$$DLu(x,y) = 0, \tag{2}$$

D - дифференциальный оператор, поскольку вопрос существования решения [2] сводится к семейству функциональных уравнений

$$Lu(x,y) = v(x,y), \tag{3}$$

где $v(x,y)$ пробегает множество решений дифференциальных уравнений

$$Dv(x,y) = 0.$$

Например, 1) вопрос существования решения уравнения $\frac{\partial}{\partial x} Lu(x,y) + \gamma Lu(x,y) = 0$, $\gamma = const$, сводится к разрешимости разностного уравнения $Lu(x,y) = ce^{-\gamma x}, c \equiv const$; 2) вопрос существования решения уравнения $Lu(x+\tau,y)\frac{\partial}{\partial x} Lu(x,y) - -Lu(x,y)\frac{\partial}{\partial x} Lu(x+\tau,y) = 0$ сводится к разрешимости разностного уравнения $Lu(x+\tau,y) = \lambda Lu(x,y)$, $\lambda \equiv const$; вопрос существования решения уравнения $(Lu(x+\tau,y) - \beta)\frac{\partial}{\partial x} Lu(x+\tau,y) + Lu(x,y)\frac{\partial}{\partial x} Lu(x,y) = 0$, $\beta > 0$ сводится к разрешимости нелинейного разностного уравнения $(Lu(x+\tau,y) - \beta)^2 + L^2 u(x,y) = \alpha$, $\alpha \equiv const$.

Проблема однозначной разрешимости вполне интегрируемых уравнений (2) редуцируется к задаче существования и единственности решения разностных уравнений (3) с разностным оператором (1).

Постановка задачи. Однозначная разрешимость

Не ограничивая общности и для наглядности рассмотрим уравнение (3) с оператором (1) когда $n_1 = n_2 = 1, k_1 = k_2 = 1$, то есть

$$Lu(x,y) \equiv \sum_{n=-1}^{1} \sum_{k=-1}^{1} b_{k+1,n+1} u(x - k\tau, y + nh) = 0, \tag{4}$$

$0 < \tau, h \equiv const, b_{k,n} \equiv const,$ в области $D = \{(x,y): 0 < x < 2\tau, 0 < y < 2h\} = \bigcup_{i,j=0}^{1} D_{i,j}$, где $D_{k,n} = \{(x,y): k\tau < x < (k+1)\tau, nh < y < (n+1)h\}$ $\left(k,n = -\overline{1,2}\right)$.

Задача *S*. Найти в области D решение $u(x,y) \in C(\overline{D})$ уравнения (4), удовлетворяющее условиям

$$u(x,y) = p_{-1,n}(x,y), (x,y) \in \overline{D}_{-1,n} \left(n = -\overline{1,2}\right), \tag{5}$$

$$u(x,y) = s_{2,n}(x,y), (x,y) \in \overline{D}_{2,n} \left(n = -\overline{1,2}\right), \tag{6}$$

$$u(x,y) = f_{k,2}(x,y), (x,y) \in \overline{D}_{k,2} \left(k = -\overline{1,2}\right), \tag{7}$$

$$u(x,y) = z_{k,-1}(x,y), (x,y) \in \overline{D}_{k,-1} \left(k = -\overline{1,2}\right), \tag{8}$$

причем

$$p_{-1,-1}(x,y) = z_{-1,-1}(x,y), s_{2,-1}(x,y) = z_{2,-1}(x,y),$$
$$p_{-1,2}(x,y) = f_{-1,2}(x,y), s_{2,2}(x,y) = f_{2,2}(x,y),$$

где $p_{-1,n}(x,y), s_{2,n}(x,y)$ $\left(n = -\overline{1,2}\right)$; $f_{k,2}(x,y), z_{k,-1}(x,y)$ $\left(k = -\overline{1,2}\right)$ – заданные непрерывные функции.

Теорема. *Если* $p_{-1,n}(x,y) \in C\left(\overline{D}_{-1,n}\right)$, $s_{2,n}(x,y) \in C\left(\overline{D}_{2,n}\right)$ $\left(n = -\overline{1,2}\right)$; $f_{k,2}(x,y) \in$ $\in C\left(\overline{D}_{k,2}\right)$; $z_{k,-1}(x,y) \in C\left(\overline{D}_{k,-1}\right)$ $\left(k = -\overline{1,2}\right)$; $b_{0,j} = b_{2,j}$ $(j = 0,1,2)$; $det(B_1^2 - B_0 B_2) \neq 0$, *то существует единственное решение* $u(x,y)$ *задачи S.*

Доказательство.

Уравнение (4) в развернутом виде будет иметь вид

$$\begin{aligned} Lu(x,y) \equiv\ & b_{0,0}u(x+\tau, y-h) + b_{0,1}u(x+\tau, y) + b_{0,2}u(x+\tau, y+h) + \\ & + b_{1,0}u(x, y-h) + b_{1,1}u(x,y) + b_{1,2}u(x, y+h) + b_{2,0}u(x-\tau, y-h) + \\ & + b_{2,1}u(x-\tau, y) + b_{2,2}u(x-\tau, y+h) = 0\ . \end{aligned} \tag{9}$$

В терминах функций

$$u_{i,j}(x,y) = u(x,y), (x,y) \in \overline{D}_{i,j}\ (i,j = -\overline{1,2}) \tag{10}$$

уравнение (9) представим в форме матричной системы в области $D_{0,0} \cup D_{0,1} \subset D$, работая по переменной *x*, а затем в области $D_{0,0} \subset D$, работая по переменной *y*.

Для этого в уравнении (9) заменим переменную *x* на $x + j\tau$ $(j = 0,1)$. Принимая во внимание обозначение (10), условия (5) - (8), получим матричную систему уравнений

$$\sum_{n=-1}^{1} R_{n+1}\begin{pmatrix} u_{0,n+j}(x,y+nh) \\ u_{1,n+j}(x+\tau,y+nh)\end{pmatrix} = \\ = -\sum_{n=-1}^{1} Q_{n+1}\begin{pmatrix} u_{-1,n+j}(x-\tau,y+nh) \\ u_{2,n+j}(x+2\tau,y+nh)\end{pmatrix}, \tag{11}$$

$0 \le x \le \tau, nh \le y \le (n+1)h \ \ (j=0,1)$,

где

$$R_{n+1} = \begin{pmatrix} b_{1,n+1} & b_{0,n+1} \\ b_{2,n+1} & b_{1,n+1}\end{pmatrix}, Q_{n+1} = \begin{pmatrix} b_{2,n+1} & 0 \\ 0 & b_{0,n+1}\end{pmatrix}. \tag{12}$$

В системе (11)-(12), заменим переменную y на $y+jh$ $(j=0,1)$. Принимая во внимание обозначения (10), условия (5)-(8), получим для уравнения (9) эквивалент задачи S в форме матричной системы уравнений

$$\sum_{n=-1}^{1} R_{n+1}\begin{pmatrix} u_{0,n+j}(x,y+(n+j)h) \\ u_{1,n+j}(x+\tau,y+(n+j)h)\end{pmatrix} = -\sum_{n=-1}^{1} Q_{n+1}\begin{pmatrix} u_{-1,n+j}(x-\tau,y+(n+j)h) \\ u_{2,n+j}(x+2\tau,y+(n+j)h)\end{pmatrix},$$

$0 \le x \le \tau, 0 \le y \le h \ \ (j=0,1)$,

или, используя клеточные матрицы,

$$\begin{pmatrix} R_1 & R_2 \\ R_0 & R_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{0,0}(x,y) \\ u_{1,0}(x+\tau,y)\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} u_{0,1}(x,y+h) \\ u_{1,1}(x+\tau,y+h)\end{pmatrix}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_1(x,y) \\ H_2(x,y)\end{pmatrix} \equiv -\begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_0 & Q_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{-1,0}(x-\tau,y) \\ s_{2,0}(x+2\tau,y)\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} p_{-1,1}(x-\tau,y+h) \\ s_{2,1}(x+2\tau,y+h)\end{pmatrix}\end{pmatrix} - \\ -\begin{pmatrix} R_0 & 0 \\ 0 & R_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{0,-1}(x,y-h) \\ z_{1,-1}(x+\tau,y-h)\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} f_{0,2}(x,y+2h) \\ f_{1,2}(x+\tau,y+2h)\end{pmatrix}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Q_0 & 0 \\ 0 & Q_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{-1,-1}(x-\tau,y-h) \\ s_{2,-1}(x+2\tau,y-h)\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} p_{-1,2}(x-\tau,y+2h) \\ s_{2,2}(x+2\tau,y+2h)\end{pmatrix}\end{pmatrix}, \tag{13}$$

$0 \le x \le \tau, 0 \le y \le h$, где $H_j(x,y)$ – матрицы-столбцы правых частей системы $(j=0,1)$.

Если $b_{0,j} = b_{2,j}$ $(j=0,1,2)$, то матрицы $R_j (j=0,1,2)$ из (12) будут симметричны и попарно коммутативны. Тогда при $\det(R_1^2 - R_0R_2) \ne 0$ существует единственная обратная матрица

$$\begin{pmatrix} R_1 & R_2 \\ R_0 & R_1\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{|R_0R_2 - R_1^2|}\begin{pmatrix} -R_1 & R_2 \\ R_0 & -R_1\end{pmatrix},$$

и потому единственное решение матричной системы (13) можно получить в виде

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{0,0}(x,y) \\ u_{1,0}(x+\tau,y)\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} u_{0,1}(x,y+h) \\ u_{1,1}(x+\tau,y+h)\end{pmatrix}\end{pmatrix} = \frac{1}{|R_0R_2 - R_1^2|}\begin{pmatrix} -R_1 & R_2 \\ R_0 & -R_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} H_1(x,y) \\ H_2(x,y)\end{pmatrix},$$

$0 \le x \le \tau, \ 0 \le y \le h$, или,

$$\begin{pmatrix} u_{0,0}(x,y) \\ u_{1,0}(x+\tau,y)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1(x,y) \\ T_2(x,y)\end{pmatrix} \equiv \frac{1}{|R_0R_2 - R_1^2|}\big(-R_1H_1(x,y) + R_2H_2(x,y)\big), 0 \le x \le \tau, \ 0 \le y \le h\ ;$$

$$\begin{pmatrix} u_{0,1}(x,y+h) \\ u_{1,1}(x+\tau,y+h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_1(x,y) \\ K_2(x,y) \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{|R_0R_2-R_1^2|}\big(R_0H_1(x,y)-R_1H_2(x,y)\big), 0 \le x \le \tau,\ 0 \le y \le h.$$

Следовательно,

$$\begin{gathered} u_{0,0}(x,y) = T_1(x,y), 0 \le x \le \tau, 0 \le y \le h; \\ u_{1,0}(x+\tau,y) = T_2(x,y), 0 \le x \le \tau, 0 \le y \le h; \\ u_{0,1}(x,y+h) = K_1(x,y), 0 \le x \le \tau, 0 \le y \le h; \\ u_{1,1}(x+\tau,y+h) = K_2(x,y), 0 \le x \le \tau, 0 \le y \le h. \end{gathered} \tag{14}$$

Таким образом, согласно (10), (14),

$$u(x,y) = \begin{cases} u_{0,0}(x,y) = T_1(x,y), 0 \le x \le \tau, 0 \le y \le h; \\ u_{1,0}(x,y) = T_2(x-\tau,y), \tau \le x \le 2\tau, 0 \le y \le h; \\ u_{0,1}(x,y) = K_1(x,y-h), 0 \le x \le \tau, h \le y \le 2h; \\ u_{1,1}(x,y) = K_2(x-\tau,y-h), \tau \le x \le 2\tau, h \le y \le 2h \end{cases}$$

является единственным решением задачи S для уравнения (4) в области D из класса непрерывных функций.

Теорема доказана.

Список литературы

1. Пинни Э. Обыкновенные дифференциально-разностные уравнения. М.: Изд-во иностранной литературы, 1961.
2. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений М.: Наука, 1978.
3. Шарковский А.Н., Майстренко Ю.Л., Романенко Е.Ю. Разностные уравнения и их приложения. Киев.: Изд-во Наукова думка, 1986.

NUMERICAL IMPLEMENTATION OF THE PROBLEM FOR A TWO-DIMENSIONAL DIFFERENCE EQUATION

A.N. Zarubin
Dr. Sci. (Physico-Mathematical), professor
aleks_zarubin@mail.ru
Oryol
E.V. Chaplygina
Dr. Sci. (Physico-Mathematical), associate professor
lena260581@yandex.ru
Oryol

Turgenev Oryol state University

Abstract. A two-dimensional equation with advance and delay is considered in partial differences. The left part of the equation is the difference operator of a completely integrable differential-functional equation. The question of existence and uniqueness is reduced to the solvability of a block matrix system in the class of continuous functions.

Keywords: difference equations, partial differences, functional shifts, advance, delay.

References

1. Pinni, E. (1961). *Ordinary differential-difference equations* [*Obyknovennye differentsial'no-raznostnye uravneniya*]. Moscow: Publishing house of foreign literature.
2. Samarskiy, A.A., Nikolaev, E.S. (1978). *Methods for solving grid equations* [*Metody resheniya setochnykh uravneniy*]. Moscow: Nauka.
3. Sharkovskii, A.N., Maistrenko, Yu.L., Romanenko E.Y. (1986). *Difference equations and their applications* [*Raznostnye uravneniya i ikh prilozheniya*]. Kiev: Naukova Dumka.

УДК 004.942

ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ ВУЗА

Дмитрий Анатольевич Таров
к.пед.н., доцент
tarov1970@rambler.ru
г. Елец
Инна Николаевна Тарова
к.пед.н., доцент
inesstarova@rambler.ru
г. Елец

Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина

Аннотация. Авторы предлагают обобщенную модель функционирования распределенной информационной образовательной системы, изложены особенности задач управления дистанционной учебной деятельностью. В основу концепции модели автоматизированного образовательного процесса авторами положено понятие идентификатора состояния обученности – как критерия, определяющего качество подготовки обучающегося, либо группы обучающихся, т.к. предлагаемый авторами критерий применим в обоих случаях. Дистанционная учебная деятельность, с точки зрения информационной системы ВУЗа, рассматривается как целенаправленный процесс изменения состояния абонентов информационной системы посредством специальных информационных воздействий на них. Управление трактуется как инструмент описания модели процесса дистанционного обучения. Указываются этапы, на которые разбиваются процессы управления. Под объектом управления подразумевается множество субъектов учебной деятельности, при этом субъектом учебной деятельности может быть как конкретный обучаемый, так и группу обучаемых. Преподаватели, в предлагаемой модели, выступают как управляющие устройства, осуществляющие реализацию алгоритма управления – обучение, и образующие собственное множество. Исходя из предлагаемой модели, авторы полагают, что эффективность обучения напрямую зависит от адекватности предлагаемых в статье моделей субъекта обучения, причем, в процессе обучения сама модель подвержена изменениям. С точки зрения авторов, задача оптимизации процесса учебной деятельности в своем условии содержит неопределенность, что диктует необходимость ввода в её условие случайных величин, принимающих значение 1 (знает) или 0 (не знает). Обосновывается и подробно описывается блок-схема управления процессом дистанционной учебной деятельности посредством информационной системы ВУЗа. В дальнейшем предполагается уточнение отдельных параметров предлагаемой модели, замена абстрактных математических формулировок конкретными алгоритмами и стандартными