DOI: 10.24888/2500-1957-2021-4-32-50

УДК 372.851

СИСТЕМНЫЙ ПОДХОД К ИЗУЧЕНИЮ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Насонова Екатерина Дмитриевна
к.ф.-м.н., доцент
baratovaed@mail.ru
г. Балашов
Балашовский институт (филиал) Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского

Грибанова-Подкина Мария Юрьевна
к.ф.-м.н., доцент
m.gribanova-podkina@rambler.ru
г. Балашов
Балашовский институт (филиал) Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского

Аннотация. Исследование посвящено вопросам формирования умений моделировать и решать оптимизационные задачи на уровне основного общего и среднего общего образования. В предметной области «Математика и информатика» умение строить математические модели, в том числе для оптимизационных задач, является важной частью подготовки обучающихся, это нашло отражение и в контрольно-измерительных материалах по информатике и профильной математике. Каждая из учебных дисциплин предметной области «Математика и информатика» формирует свои навыки, необходимые для умения решать оптимизационные задачи. В школьном курсе математики подготовка к решению подобных задач просматривается еще с седьмого класса, а на уровне старшей школы рассматриваются основы теории оптимизации для функции одной переменной, что, тем не менее, не дает возможности рассмотреть все многообразие задач данного типа. В курсе информатики задачи оптимизации представлены, но не во всех учебно-методических комплексах и в небольшом объеме. Кроме того, информатика не всегда присутствует в учебных планах ступени среднего общего образования. Методика обучения решению задач оптимизации должна быть основана на системном подходе, учитывающем вклад каждого учебного предмета. Математическая подготовка является основным фундаментом, который дополняется компьютерными средствами представления и моделирования данных. Предложенный в статье системный подход позволяет сформировать у обучающихся целостное представление о самих задачах оптимизации и о способах их решения, необходимых в каждом конкретном случае. Реализовывается предложенный подход с помощью двух составляющих: базовой подготовки в рамках дисциплин «Математика» и «Информатика» и специализированной с помощью межпредметного элективного курса по основам оптимизации. Межпредметный элективный курс по основам оптимизации позволяет научить эффективно использовать методы математики и информатики для анализа и решения оптимизационных задач.

Ключевые слова: системный подход, задача оптимизации, информационные технологии, математическое программирование, ЕГЭ.

Введение

Процесс информатизации современного общества привел к необходимости использования информационных моделей практически во всех сферах человеческой деятельности. Информационные модели используются в решении многих практических задач: управление робототехническими системами, космическими аппаратами, биотехническими комплексами, решение вопросов экологической безопасности и др. В связи с этим для специалистов совершенно разных областей знаний возникает необходимость наличия компетенций по математическому и компьютерному моделированию (Горностаева, 2006; Грибанова-Подкина, 2018).

Современные Федеральные государственные образовательные стандарты школьного основного общего и среднего общего образования (Приказ Минобрнауки России, 2012) предусматривают получение навыков метапредметного моделирования объектов, явлений и процессов через предметную область «Математика и информатика». При реализации программы среднего общего образования уже на базовом уровне курса «Информатика» предметные результаты освоения включают «сформированность представлений о компьютерно-математических моделях и необходимости анализа соответствия модели и моделируемого объекта (процесса)» (Приказ Минобрнауки России, 2012), а на углублённых уровнях курсов «Математика» и «Информатика» требования к предметным результатам включают сформированность умений моделировать реальные процессы и явления, использовать компьютерно-математические модели и исследовать их, интерпретировать полученный результат. Навыки в сфере информационного моделирования позволяют формировать новый тип мышления, связанный с использованием современных технологий обработки информации (Грибанова-Подкина, 2019; Штепа, 2009).

Математические и компьютерные модели, описывающие процесс управления сложными системами, которыми является большинство реальных объектов, обычно предполагают наличие критерия оптимальности выбора определенного решения или траектории. Задачи принятия решений изучаются в таких дисциплинах, как исследование операций, системный анализ, теория игр, теоретическая информатика и другие, при этом учитываются динамический характер модели, наличие или отсутствие обратной связи, влияние неопределенных факторов (Баратова, 2003; Баратова, 2004).

Подготовка к решению оптимизационных задач ведется со школьного курса математики и информатики, начиная с относительно простых дискретных задач выбора и заканчивая исследованием непрерывных функций на оптимальность с помощью производной. Учитывая важность и востребованность теории оптимизации как для решения различных практических задач, так и для становления общей математической культуры обучающегося, а также недостаточность освещения этой темы в школьном курсе, то закономерно можно встретить в публикациях, например, (Власов, 2018), и сетевых педагогических сообществах методические описания элективных курсов по математике или информатике, призванные восполнить эту нехватку. Можно даже вести дискуссии, какая из дисциплин школьного курса должна включать в себя основы оптимизации.

В целом, вид оптимизационной задачи определяет метод ее решения. Но также необходимо опираться на инструменты, доступные школьнику. Так, например, простейшие дискретные задачи можно решить при помощи простого перебора имеющихся альтернатив. Для решения более сложных задач необходимо знание основных свойств функций, умение определять наибольшие и наименьшие значения на промежутках для монотонных функций, находить экстремумы функций с помощью производной и без нее, использовать численные методы решения экстремальных задач, подключая информационные технологии.

Методология исследования

Рассмотрим далее возможности и вклад математики и информатики в процесс обучения решению оптимизационных задач, а также системное взаимодействие обеих дисциплин.

1. Подготовка к решению оптимизационных задач в курсе математики основного общего образования

С простейшими задачами выбора обучающиеся встречаются на уроках математики, начиная с начальной школы, например, проводя анализ потребительской корзины или осуществляя выбор варианта с наименьшей стоимостью. Подобные задачи не являются типовыми и используются в системах развивающего обучения (системы Л.В. Занкова, Д.Б. Эльконина–В.В. Давыдова).

Далее, в курсе основной школы, школьники знакомятся с различными простейшими функциональными зависимостями и их свойствами, строят графики и решают задачи, включающие в себя элементы исследования функций. Подготовка к решению экстремальных задач, а также исследованию функций на экстремум продолжается в 7 классе, с момента изучения линейных функций.

Так, при изучении линейной функции необходимым навыком является определение её возрастания или убывания, что позволяет изучить вопрос нахождения наибольшего и наименьшего значения на некотором промежутке. Также при изучении линейных функций полезным навыком является умение сравнивать угловые коэффициенты двух прямых и выяснять, как выглядят в зависимости от их значения графики линейной функции и каково взаимное расположение прямых. Подобные задачи широко используются в современных учебно-методических комплексах (УМК) по математике, изданных после 2018 года, например, в УМК Ю.Н. Макарычева, Алгебра (7-9), УМК «Лаборатория А.Г. Мордковича», Алгебра 7-9, УМК А.Г. Мерзляка, Алгебра (7-9).

Изучение простейших степенных функций с натуральным и целым показателем, иррациональной функции $y = \sqrt{x}$, позволяет школьникам познакомиться и с другими видами зависимостей, однако задач на исследование поведения этих функций и на наличие экстремумов в рассматриваемых УМК в 7 и 8 классах не представлено. Подобные задачи отнесены в курс алгебры 9 класса, хотя некоторые вопросы исследования степенных функций, такие как промежутки возрастания и убывания, поиск максимальных и минимальных значений, можно было бы обзорно рассмотреть и в курсе 7-8 класса при помощи графиков и решать качественные задачи.

Картина меняется в 9 классе, где в углублённом курсе алгебры дается полный и подробный теоретический материал, позволяющий проводить основные этапы исследования простых функциональных зависимостей на знакопостоянство и монотонность, изучаются вопросы ограниченности функций, экстремумов квадратичной функции, предлагается большое количество соответствующих заданий. Однако следует отметить высокую степень теоретичности рассматриваемых заданий и полное отсутствие в курсе практико-ориентированных задач, которые позволили бы учащимся взглянуть на мир функциональных зависимостей как на систему, описывающую реальные процессы и позволяющую решать прикладные проблемы.

Рассмотрим прикладную оптимизационную задачу, которая предлагалась на профильном ЕГЭ по математике в 2019 году. «Строительство нового завода стоит 159 млн. рублей. Затраты на производство x тыс. ед. продукции на таком заводе равны $0{,}5x^2 + 2x + 6$ млн. рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн. рублей) за один год составит $px - (0{,}5x^2 + 2x + 6)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При этом в первый год $p = 10$, а далее каждый год возрастает на 1. За сколько лет окупится строительство?».

Данная задача, хотя и является нестандартной для учащихся 9 класса, вполне может быть решена без использования производной, а только с помощью свойств квадратичной функции. Кроме того, решение подобных задач способствует достижению метапредметных результатов в обучении математике.

Помимо изучения свойств возрастания и убывания функции на промежутках с учетом наличия единственной точки экстремума, полезным является исследование связи между значением функции и расстоянием ее аргумента от оси симметрии. Также полезным навыком является умение строить графики различных функций и зависимостей, не являющихся функциональными, например, изображение окружности, параболы с горизонтальной осью симметрии и других.

2. Оптимизационные задачи и методы их решения в курсе математики среднего общего образования

Характерной чертой оптимизационных задач, рассматриваемых в курсе алгебры старшей школы, является использование производной непрерывной функции. В углублённых курсах алгебры и начал математического анализа (10-11) УМК А.Г. Мерзляка, УМК Ю.М. Калягина, УМК Ш.А. Алимова, тема производной изучается достаточно полно, подробно, включает в себя решение текстовых и прикладных задач на оптимизацию из области физики и техники. Заметим, что предлагаемые задачи ограничены применением производной непрерывных дифференцируемых функций одной переменной, что не отражает в достаточной мере всего спектра оптимизационных задач, доступных для решения в старшей школе и предлагаемых для решения в ходе итоговой аттестации по профильной математике.

В актуальной версии ЕГЭ по математике профильного уровня содержится задание 15, направленное на проверку умений использовать математические модели для решения практических задач. Представленный блок заданий включает в себя задачи по финансовой математике, а также оптимизационные задачи, которые не рассматриваются в курсе математики средней школы. В нем изучаются лишь подводящие задачи. Так как основной курс алгебры не может включать в себя достаточно полный перечень оптимизационных задач, предлагаемых в программе ЕГЭ, то с целью более полной подготовки к итоговой аттестации следует включать эти задачи в программу элективных курсов, для чего существует достаточное количество методических материалов, например (Шестаков, 2020).

Одной из причин сложности задач оптимизации является разнообразие их видов, определяющее выбор метода решения. Так, например, можно выделить линейные и нелинейные задачи, которые можно решать графически и аналитически. При этом нелинейные задачи могут решаться с использованием дифференцирования, а для решения линейных задач достаточно знаний свойств линейных функций. Отдельно следует выделить задачи целочисленной оптимизации, которые имеют ряд особенностей, например, невозможность получения оптимального решения путем округления или отбрасывания дробной части, а значит, требуют особого рассмотрения.

Так, например, в (Шестаков, 2020) достаточно подробно изучены двумерные линейные целочисленные и нецелочисленные задачи, а также приведены методы решения некоторых двумерных нелинейных задач методами введения параметра, векторной алгебры и сведения к функции одной переменной с последующим дифференцированием. Также был использован графический метод для линейных и нелинейных задач с достаточно простыми ограничениями и видом целевой функции.

Перечень предлагаемых для итоговой аттестации по математике оптимизационных задач постоянно расширяется и дополняется новыми моделями, включающими различные ограничения и допускающими различные особенности, касающиеся методов их решения.

3. Математическое и компьютерное моделирование в курсе информатики основной и средней школы

В отличие от математики, формирующей практические навыки решения различных задач, на информатику в школьном образовании возложены еще и более концептуальные задачи, связанные с формированием методологического и метапредметного представления о моделировании в целом, об этапах моделирования. Конечно же, инструментальные средства решения задач, связанные с применением информационных технологий и сред, присутствуют, однако моделированию как категории отводится очень важное место. В

соответствие с требованиями ФГОС, в число основных метапредметных результатов в том числе включается владение информационным моделированием как основным методом приобретения знаний.

К предметным результатам по теме моделирования и решению оптимизационных задач относятся:

– умение строить математическую модель и использовать компьютер при работе с ней;

– владение компьютерным моделированием при решении научно-технических задач.

Собственно, моделирование как концептуальное понятие, как способ познания мира, и связанная с ней формализация объектов, процессов и явлений в курсе информатики основной школы изучается в 8-9 классах.

Например, в учебнике 9 класса авторов Л.Л. Босовой и А.Ю. Босовой (Босова, 2016) – это тема «Моделирование и формализация», где рассматривается понятие модели и моделирования, приводится классификация моделей: знаковые, графические, табличные. Особо необходимо выделить важность математического моделирования, которое описывает закономерности описываемых явлений на языке математики. Такие модели являются базой для компьютерных моделей, позволяющих проводить эксперименты с целью исследования. В главе «Алгоритмизация и программирование» это прослеживается при рассмотрении этапов решения задачи: постановка задачи – формализация – алгоритмизация – программирование – отладка и тестирование – выполнение расчетов. На этапе постановки задачи определяются параметры объекта, имеющие значимость при моделировании, а при формализации фактически создается математическая модель. Это важный момент, который говорит о том, *что математическая модель является основой для компьютерной, увязывая, таким образом, математику и информатику на одном пути к исследованию объекта*.

УМК «Информатика» авторского коллектива под руководством И.Г. Семакина в 8 классе (Семакин, 2016) вводит понятие компьютерного математического моделирования, рассматриваются этапы моделирования. В данном УМК с помощью электронных таблиц приводятся примеры реализации моделей размножения рыб в водоеме и имитационной модели эволюции. Практикум (Залогова, 2013) предусматривает объемную работу с задачами динамического, статистического и даже имитационного моделирования. Особо интересно включение в практикум раздела с моделированием знаний и логическим программированием на Прологе.

В учебнике 9 класса авторов К.Ю. Полякова и Е.А. Еремина (Поляков, 2019) в теме «Моделирование» уже встречаются игровые модели и стратегии, которые приводят к термину «принятие оптимального решения». В главе «Электронные таблицы» вводится понятие численных методов и приближенного решения, для решения уравнений используется надстройка Microsoft Excel «Подбор параметра». Параграф «Оптимизация», также включенный в главу «Электронные таблицы», вводит определение оптимизации как «поиск наилучшего (оптимального) решения задачи при заданных ограничениях» (Поляков, 2019). Здесь же приводится понятие целевой функции, которая должна достигать минимального и максимального значения. *Для решения задачи нахождения максимума при ограничениях типа неравенств используется надстройка «Поиск решения»*.

Курс информатики среднего общего образования (10-11 классы) расширяет знания об информационном моделировании. Процесс разработки компьютерной модели описывается следующими этапами:

1) системный анализ как процесс получения теоретической информационной модели;

2) компьютеризация теоретической модели.

УМК «Информатика» авторского коллектива под руководством И.Г. Семакина даже для изучения информатики на базовом уровне вводит модель оптимального планирования, изучение которой оперирует понятиями «целевая функция» и «математическое программирование», «линейное программирование». Обучающимся предлагается графическая интерпретация задачи линейного программирования с ограничениями типа

равенств и способ ее решения с помощью средства «Поиск решения», являющегося надстройкой Microsoft Excel. Интересно, что в учебнике присутствуют и проектные задания по теме «Оптимальное планирование».

Для углублённого уровня в параграфе «Компьютерное моделирование в экономике и экологии» задача оптимального планирования более формализована и для ее решения применяется классический графический метод, лишь после этого предлагается реализация компьютерной модели и использование средства «Поиск решения» Microsoft Excel (Семакин, 2016).

Стоит отметить, что УМК «Информатика» под руководством И.Г. Семакина интересен еще и тем, что вводит и другие серьезные задачи из теории оптимизации, например, транспортную задачу, решаемую с помощью средства «Поиск решения» Microsoft Excel, а также знакомит обучающихся с основами имитационного моделирования.

УМК «Информатика» К.Ю. Полякова, Е.А. Еремина на базовом и углубленном уровнях в 11 классе расширяет понятие об оптимизации, введенное в 9 классе, рассматривая такие понятия, как локальный и глобальный минимум, начальное приближение.

В целом можно констатировать, что в старших классах осуществляется итоговое формирование концепта «моделирование» во всем многообразии процессов, его составляющих. А так как задачи оптимизации легко решаются с помощью Microsoft Excel, то многие обзоры решений таких типов задач часто присутствуют именно в разделах про электронные таблицы.

В целом же, инструментарий для решения задач математического программирования в школьном курсе информатики может включать в себя:

– электронные таблицы: позволяют хранить данные, обрабатывать их с помощью функций, наглядно представлять информацию в виде диаграмм, получать результаты решения задачи с помощью средств анализа данных (подбор параметра и поиск решения);

– программирование: мощный инструмент для решения любых формализованных задач.

4. Оптимизационная задача

Рассмотрим прикладную оптимизационную задачу с линейными и нелинейными ограничениями, с возможностью поиска экстремума линейной и нелинейной целевой функции и, для простоты, без дополнительных ограничений по целочисленности.

Необходимо построить прямоугольное здание склада, площадь которого должна составлять не менее 200 м^2, а протяженность фундамента – не более 80 м. Также необходимо учесть:

1) длина здания должна быть не более 30 м, а стоимость возведения каждой такой стены составит 500 у.е. за каждый погонный метр;

2) ширина здания должна быть не более 20 м, а стоимость возведения каждой такой стены составит 250 у.е. за каждый погонный метр.

Требуется найти

а) размеры склада и объем затрат на его постройку при условии его минимальной стоимости;

б) размеры склада и объем затрат на его постройку при условии его максимальной стоимости;

в) размеры склада с максимальной площадью и объем затрат на его постройку.

Рассмотрим процесс формализации условия задачи и составление математической модели. Для решения данной задачи обучающемуся необходимо осознать, что она включает в себя элементарные знания по геометрии о площади и периметре прямоугольника, из чего следует ввести переменные, соответствующие длине и ширине прямоугольного здания.

Пусть $x -$ длина здания, $y -$ ширина здания, тогда ограничение, устанавливаемое на его площадь, будет выглядеть: $xy \geq 200$, а требование, накладываемое на протяженность фундамента, можно формализовать как $x + y \leq 40$, что составляет половину периметра прямоугольника. Также необходимо учесть непосредственные ограничения на длину и

ширину: $x \leq 30$, $y \leq 20$. Кроме того, естественными будут ограничения, определяющие неотрицательность переменных x и y.

Таким образом, получаем систему ограничений задачи:

$$xy \geq 200;$$

$$x + y \leq 40;$$

$$x \leq 30;$$

$$y \leq 20;$$

$$x, y \geq 0.$$

Также следует установить, что задача является оптимизационной, то есть включает в себя поиск наибольшего и наименьшего значения некоторой функции на заданном множестве, а значит, следует определить вид этой функции и критерия оптимальности.

Стоимость возведенной стены с учетом цены погонного метра можно выразить как $500 \cdot 2 \cdot x + 250 \cdot 2 \cdot y = 1000x + 500y$, таким образом, получаем соответствующие критерии оптимальности:

а) $f(x; y) = 1000x + 500y \to min$;

б) $f(x; y) = 1000x + 500y \to max$;

в) $f(x; y) = xy \to max$;

В результате получили математическую модель, представляющую собой задачу нелинейной оптимизации. Представленную задачу можно решать с помощью методов исследования операций с применением функции Лагранжа и частных производных, но в данном случае придется ограничиться элементарными методами, которые можно использовать в курсе средней школы.

Рассмотрим решение задачи графическим методом. В курсе алгебры и начал математического анализа 10 и 11 класса обучающиеся получают навыки решения неравенств с двумя переменными и их систем графическим методом, который следует использовать для построения изображения множества допустимых решений на плоскости, решая неравенства системы ограничений. При этом достаточно неточного, модельного чертежа, адекватно описывающего взаимное расположение заданных линий и областей.

Для решения заданной системы необходимо построить на координатной плоскости Oxy граничную линию каждого ограничения и выбрать нужную полуплоскость, затем выполнить операцию пересечения полученных множеств. Линейное граничное условие $x + y = 40$ следует представить в виде уравнения прямой с угловым коэффициентом $y = -x + 40$, что пригодится для дальнейшего анализа взаимного расположения линий на координатной плоскости, нелинейное условие $xy = 200$ также следует представить в виде функциональной зависимости $y = \frac{200}{x}$, которая позволит определить соответствующую кривую как гиперболу.

Решая попарно системы уравнений, соответствующих граничным линиям каждого ограничения, можно получить координаты точек $A\left(30; 6\frac{2}{3}\right)$, $B(10; 20)$, $C(20; 20)$, $D(30; 10)$, среди которых могут быть точки экстремума (рис. 1), однако, так как задача нелинейная, нужно помнить, что точки экстремума могут находиться как на границе допустимого множества, так и внутри него.

Следующим этапом является построение линий уровня целевой функции для определения направления ее возрастания и убывания. Рассмотрим линейный критерий эффективности $f(x;y) = 1000x + 500y$. Обозначим a – затраты на возведение здания, получим $1000x + 500y = a$, следовательно, уравнение прямой с угловым коэффициентом, соответствующее критерию, имеет вид $y = -2x + \frac{a}{500}$.

Рис. 1. Решение системы ограничений-неравенств

Значение параметра возрастает при параллельном переносе линии уровня «вправо и вверх» и убывает при параллельном переносе ее «влево и вниз».

«Левой нижней» границей множества допустимых значений является гипербола, а значит, минимум целевой функции достигается в точке касания гиперболы и линии уровня целевой функции, если эта точка принадлежит множеству допустимых значений, либо необходимо исследовать граничные точки нелинейного ограничения на оптимальность. Найдем точку касания гиперболы и линии уровня, решив уравнение

$$-2x + \frac{a}{500} = \frac{200}{x},$$

которое приводится к равносильному квадратному уравнению

$$x^2 - \frac{a}{1000}x + 100 = 0, x \neq 0.$$

Для того чтобы решение данного уравнения соответствовало точке касания прямой и гиперболы, необходимо, чтобы оно было единственным, а значит, дискриминант квадратного уравнения должен быть равен нулю.

$$D = \frac{a^2}{1000^2} - 400 = 0,$$

из чего следует, что $a = 20000$. Подставив найденное значение параметра a в квадратное уравнение, найдем абсциссу точки касания

$$x^2 - 20x + 100 = 0;$$

$$x = 10.$$

Подставив найденное значение x в любое из частей исходного уравнения, найдем ординату точки касания $y = \frac{200}{10} = 20$.

Полученное решение соответствует точке B, принадлежащей области допустимых решений, а значит, именно в данной точке достигается минимум целевой функции (рис. 2). Затраты на строительство уже были найдены в ходе решения и составляют $a = 20000$ у.е., что можно проверить, подставив найденное решение $x = 10$, $y = 20$ в целевую функцию $f(x; y) = 1000x + 500y$.

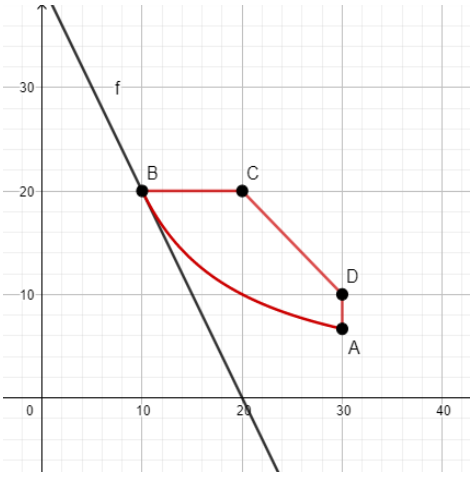

Рис. 2. Решение задачи минимизации с линейной целевой функцией

Найдем решение задачи максимизации этой же линейной целевой функции на заданном множестве. «Правой верхней» границей множества допустимых значений является отрезок CD, а значит, максимум целевой функции достигается в одной из точек C или D, либо на всем отрезке CD. Найдем точку максимума целевой функции, сравнивая угловые коэффициенты соответствующих прямых. Так как модуль углового коэффициента, соответствующего прямой CD, меньше модуля углового коэффициента, соответствующего линии уровня целевой функции, то максимум целевой функции достигается в точке $D(30; 10)$ (рис. 3).

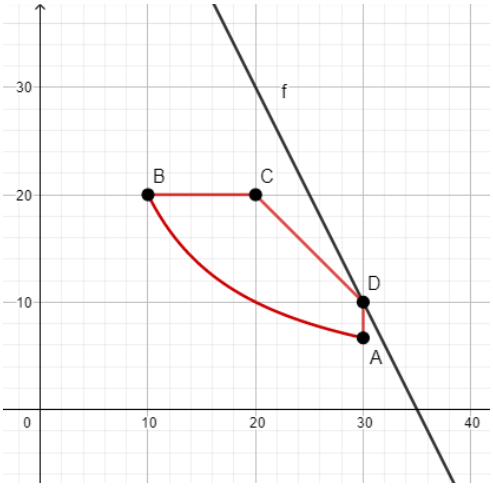

Рис. 3. Решение задачи максимизации с линейной целевой функцией

Подставив координаты точки D в целевую функцию, найдем затраты на строительство склада $f(30; 10) = 1000 \cdot 30 + 500 \cdot 10 = 35000$ у.е.

Рассмотрим нелинейную целевую функцию, $f(x; y) = xy$, которую нужно максимизировать.

Обозначим a – значение площади склада, получим $xy = a$, следовательно, уравнение гиперболы, соответствующее критерию, имеет вид $y = \frac{a}{x}$.

Значение параметра возрастает при удалении линии уровня от координатных осей, с учетом неотрицательности x, y, a, «вправо и вверх» и убывает при приближении ее к координатным осям «влево и вниз». Для поиска максимума целевой функции также необходимо использовать «правую верхнюю» границу множества допустимых значений, в данном случае это также отрезок CD. Так как функция нелинейная, то необходимо искать точку касания гиперболы $y = \frac{a}{x}$ и ограничения $y = 40 - x$. Если найденная точка лежит на отрезке CD, она и будет являться точкой максимума целевой функции. В противном случае следует исследовать границы отрезка CD на оптимальность.

Решив уравнение

$$40 - x = \frac{a}{x}$$

с учетом требования единственности решения, накладываемого на дискриминант равносильного ему квадратного уравнения, аналогично рассмотренному выше примеру, получим

$$x = 20, y = 20, a = 400,$$

что соответствует точке C, принадлежащей области допустимых решений (рис. 4), а значит, именно в данной точке достигается максимум целевой функции.

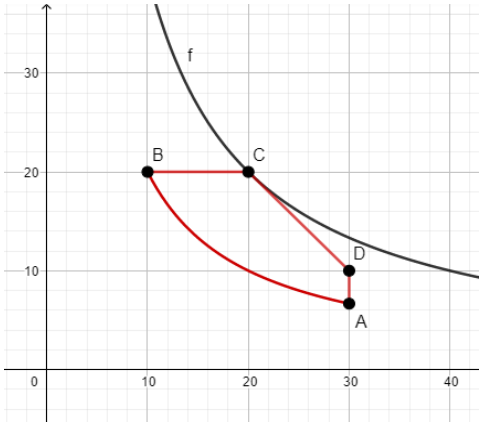

Рис. 4. Решение задачи максимизации с нелинейной целевой функцией

Подобные оптимизационные задачи реализуемы на уровне среднего общего образования, графический способ решения оптимизационных задач рассматривается в УМК курса информатики К.Ю. Полякова, Е.А. Еремина, а также под руководством И.Г. Семакина. При минимуме представления этого метода в школьных учебниках, его применение необходимо при прохождении итоговой государственной аттестации и по информатике (задача № 17 КИМ ЕГЭ), и по математике (задача № 17 КИМ ЕГЭ). И если для решения оптимизационной задачи по математике аналитический подход и графический метод – единственный инструментарий, то с переходом к компьютерному ЕГЭ по информатике мы имеем целый арсенал информационных средств, позволяющих облегчить процесс нахождения решения.

5. Информационные технологии при решении оптимизационных задач

В процессе формирования навыков решения оптимизационных задач аналитический метод эффективно дополнять графическими моделями, создаваемыми средствами

информационных технологий. Например, с помощью интернет-сервисов GeoGebra, Desmos можно построить точный график области ограничений, а целевую функцию перемещать с помощью параметра до получения пересечения с нужной точкой. По опыту авторов, этот способ является эффективным при начальном изучении графического способа решения оптимизационных задач, а также в особо трудных случаях.

В курсе информатики основной и средней школы УМК курса информатики К.Ю. Полякова, Е.А. Еремина, а также под руководством И.Г. Семакина для решения оптимизационных задач предлагают использовать надстройку Microsoft Excel «Поиск решения». Это средство предполагает решение оптимизационных задач приближенными методами с использованием начального приближения. Данная надстройка должна быть установлена дополнительно с помощью настройки параметров табличного процессора.

Для решения рассматриваемой в п. 5 оптимизационной задачи в табличном процессоре строится ее компьютерная модель: все вычисляемые ограничения и целевая функция должны быть записаны в отдельных ячейках в виде формул, а управляемым параметрам присвоены ненулевые начальные значения (рис. 5).

	A	B	C
1	x	y	f(x,y)
2	20	20	=1000*A2+500*B2
3	=A2+B2		
4	=A2*B2		

	A	B	C
1	x	y	f(x,y)
2	20	20	30000
3	40		
4	400		

Рис. 5. Начальные присвоения и формулы в задачах а и б

Затем необходимо открыть окно надстройки «Поиск решения», указать адрес ячейки целевой функции, критерий эффективности, а также все ограничения, накладываемые на допустимые альтернативы. Ограничения могут быть в виде равенств, неравенств, а также по целочисленности значений. Также при необходимости можно указать параметры используемых численных методов. После выполнения модели в ячейках будут подсчитаны оптимальные значения переменных модели и целевой функции (рис. 6). Задачи б и в решаются аналогично.

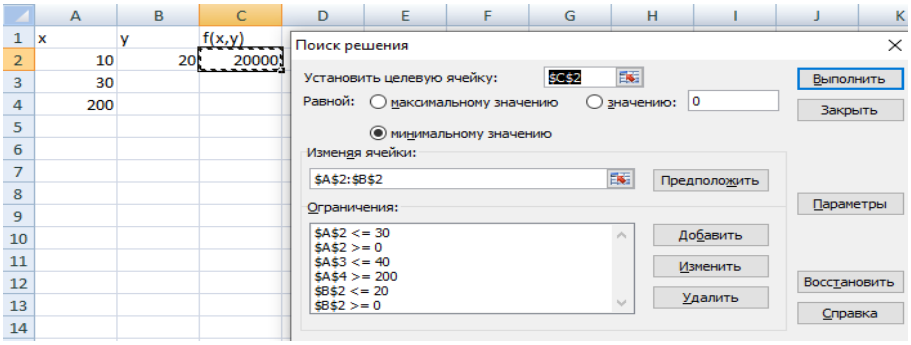

Рис. 6. Численное решение задачи а

Применение табличного процессора в ходе решения сложных оптимизационных задач может быть полезным для организации быстрой проверки решения, а также является средством ознакомления учащихся с приближенными методами решения математических задач, применяемых в инженерии, моделировании при решении практических задач.

6. Оптимизационные задачи в итоговой аттестации по информатике и особенности их решения

Как уже отмечалось выше, задачи начала оптимизации рассматриваются в школьном курсе информатики 9-11 классов. Обучающимся предлагают аналитическое решение, основанное на графическом представлении систем ограничений и целевой функции, а также надстройку «Поиск решения» Microsoft Excel. Закономерным результатом является

включение этих важных задач в итоговую аттестацию по информатике. Казусом является то, что данный тип задач встречается в задании № 17 КИМ ЕГЭ, которое, согласно «Спецификации контрольно-измерительных материалов для проведения в 2022 году единого государственного экзамена по информатике» проверяет знание основных понятий и законов математической логики. Математическая логика в этом задании быстро отступает, выводя на передний план задачу оптимизации. На эту особенность обратил внимание К.Ю. Поляков (Поляков, 2019) при рассмотрении методики решения данного типа задач.

Приведем некоторые формулировки задания №15 КИМ ЕГЭ по информатике, представленных в открытом банке тестовых заданий Федерального института педагогических измерений (ФИПИ).

Задача 8694. Для какого наименьшего целого неотрицательного числа A выражение

$$(x \cdot y < A) \vee (x < y) \vee (7 \leq x)$$

тождественно истинно, то есть принимает значение 1 при любых целых неотрицательных x и y?

Задача 8829. Для какого наибольшего целого неотрицательного числа A выражение

$$(69 \neq y + 2x) \vee (A < x) \vee (A < y)$$

тождественно истинно, то есть принимает значение 1 при любых целых неотрицательных x и y?

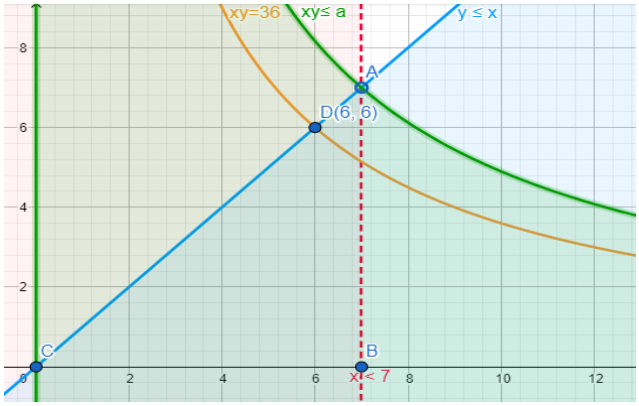

Рис. 7. Решение задачи оптимизации 8694

Каждая из приведенных задач требует нахождения минимума или максимума целевой функции при заданных ограничениях. Те операнды дизъюнкции, которые зависят от параметра A, должны быть истинными тогда, когда остальные операнды становятся ложными. Например, в задаче 8694 нужно выбрать такое наименьшее A, чтобы область

$$x \cdot y < A$$

покрывала все целые точки треугольника ABC (рис. 7). Таким образом, получаем следующую задачу целочисленной оптимизации:

$$x \cdot y \to max$$

при ограничениях

$$x \geq 0;\ y \geq 0;\ \ y \leq x;\ x < 7.$$

Если игнорировать условие целочисленности, то решение находилось бы на пересечении области ограничений ABC с гиперболой

$$x \cdot y = a, \text{где } a \to max.$$

Это пересечение происходит в точке $A(7;7)$, где $a = 7 \cdot 7 = 49$. Однако одно из ограничений сформулировано в форме строгого неравенства ($x < 7$), поэтому точка $A(7;7)$ не принадлежит области ограничений, и решение необходимо искать внутри области. Самой верхней целочисленной точкой, входящей в область ограничений, будет точка $D(6;6)$, для которой

$$a = 6 \cdot 6 = 36.$$

А так как в задаче необходимо найти

$$A > x \cdot y,$$

то получаем в ответе $A = 37$ как наименьшее целое значение, превышающее 36.

Рассмотренная задача интересна тем, что ее решение находится не в угловой точке области ограничений. Для поиска решения пришлось «углубляться» внутрь области, что усложняет задачу. Опыт авторов показывает, что аналитическое решение таких задач обычно вызывает трудности у обучаемых. И если в ЕГЭ по математике других альтернатив нет, то информатика с компьютерной формой ЕГЭ позволяет применять иные инструменты доработки или полного решения поставленной задачи.

Рассмотренная выше надстройка «Поиск решения» Microsoft Excel может быть выбрана для компьютерного решения рассмотренной задачи, но, к сожалению, не позволяет работать с ограничениями в виде строгих неравенств. Поэтому ограничение

$$x < 7$$

необходимо трансформировать в условие

$$x \leq 6.$$

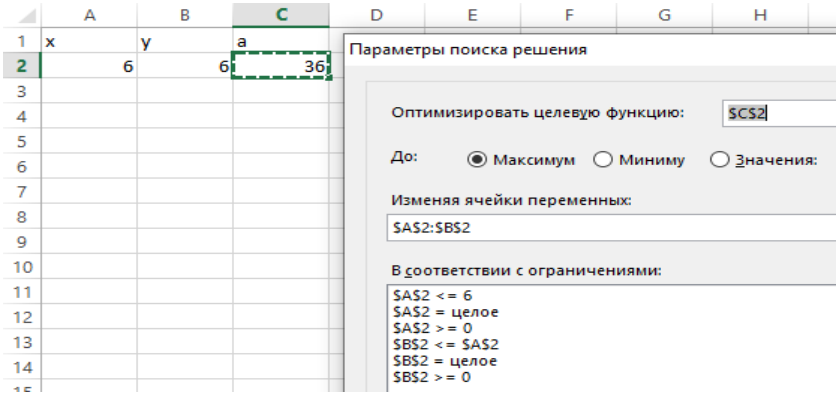

Рис. 8. Решение задачи оптимизации 8694

Теперь получаем $A = 37$ как наименьшее целое значение, превышающее 36.

Другой способ компьютерного подхода к решению задачи состоит в написании программного кода. Идея решения заключается в том, что необходимо перебрать значения A из некоторого диапазона и проверить выполнение заданного условия

$$(x \cdot y < A) \vee (x < y) \vee (7 \leq x)$$

для всех целых неотрицательных значений x и y. Если для рассматриваемого A существует такой набор $(x;y)$, что условие не выполняется, то такое A выбывает из рассмотрения (признак $f = 1$). Если же A оказалось «хорошим» для всех наборов $(x;y)$ (признак $f = 0$), то необходимо выбрать минимальное целое неотрицательное A. Ниже на языке C++ приведен фрагмент программного кода, реализующего приведенный алгоритм.

```
int am=0;
for(int a=0;a<100;a++){
    int f=0;
    for(int x=0;x<100;x++)
        for(int y=0;y<100;y++)
            if(!((y*x<a) || x<y || 7<=x)) f=1;
    if (f==0){
       am=a;
       break;
    }
}
```

Листинг 1. Программная реализация задачи оптимизации 8694

В приведенной реализации первое «хорошее» A (оно как раз минимальное) принимается за ответ, в нашем случае это число 37. В отличие от предыдущих способов, программа сразу дает окончательный ответ, который уже нет необходимости интерпретировать. Однако для понимания диапазонов для перебора значений A, x, y все же следует использовать схему с иллюстрацией области ограничений и целевой функцией.

Рассмотрим задачу *8829*. Для ее решения необходимо, чтобы прямая $69 = y + 2x$ при неотрицательных x и y покрывалась областью $(A < x) \vee (A < y)$ (рис. 9).

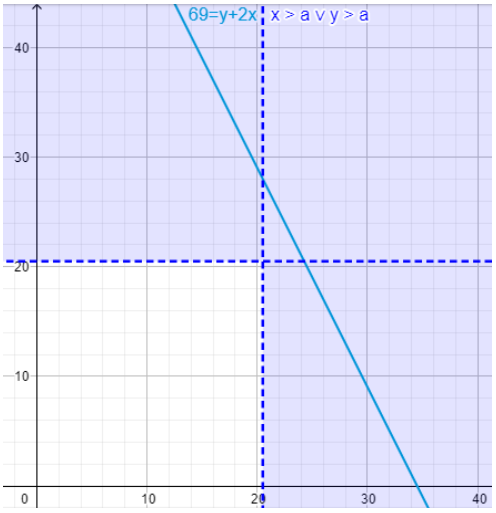

Рис. 9. Области в задаче 8829

Эта задача может быть сформулирована в виде следующей задачи оптимизации:

$$a \to max$$

при ограничениях

$$y + 2x = 69;$$

$$x > a;$$

$$y > a.$$

Как видно из рис. 10, решение необходимо искать на пересечении прямых

$$y + 2x = 69 \text{ и } y = x.$$

Точка $A(23; 23)$ должна удовлетворять неравенствам

$$x > a;$$

$$y > a.$$

Следовательно, $A = 22$.

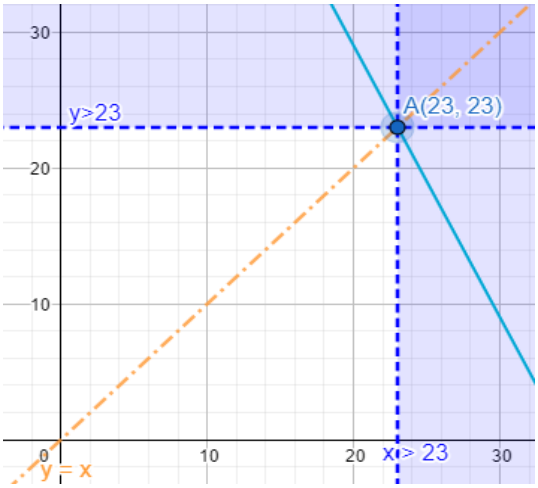

Рис. 10. Решение задачи оптимизации 8829

Для рассмотренной задачи использовать надстройку «Поиск решения» Microsoft Excel затруднительно, поэтому выбор компьютерного способа решения задачи остается за программой на языке программирования. Используем такой же алгоритм, как и в предыдущей задаче, но с учетом поиска максимума. Графическая схема задачи позволяет грамотно выбрать диапазоны для переменных, получаем реализацию на C++ ниже.

```
int am=0;
for(int a=0;a<100;a++){
    int f=0;
    for(int x=0;x<30;x++){
        for(int y=0;y<30;y++){
            if(!((69!=y+2*x) || a<x || a<y)) f=1;
    }
    if (f==0 && (a>am)){
       am=a;
    }
}
```

Листинг 2. Программная реализация задачи оптимизации 8829

В приведенной реализации ответом будет 22.

Рассмотренные решения позволяют сделать вывод, что, конечно же, самым эффективным способом решения задач оптимизации является написание программного кода. Он обладает рядом преимуществ:

1) сразу дает окончательный ответ, который нет необходимости «дорабатывать», как это происходит в случае применения других методов. Как показывает практика, при использовании аналитического способа частыми являются ошибки в получении числа, отличающегося от нужного на ± 1;

2) не ограничивает размерность рассматриваемого пространства. Выше уже говорилось, что школьные задачи оптимизации ограничены двумерным пространством, но при написании программного кода можно рассматривать сколь угодно большую размерность, увеличится лишь количество переменных (x, y, z, …) и вложенных циклов;

3) быстрота и стереотипность решения.

Вместе с тем, рассматривать программный код как единственный подход к решению оптимизационных задач в школе было бы весьма утилитарно. Важно сформировать полное понимание о задачах оптимизации, которое приходит в процессе моделирования задач и поиска путей их решения доступным школьнику способом.

7. Системное взаимодействие в обучении основам оптимизации

Для комплексного понимания понятия моделирования, а также для получения устойчивых навыков составления моделей оптимизационных задач и умения их решать необходим системный подход, интегрирующий в себе достаточно объемный материал из предметной области «Математика и информатика».

В результате подробного анализа можно сделать вывод, что ни одна из школьных дисциплин на данный момент не может сформировать у обучающегося целостное представление о том, как же все-таки решать задачи оптимизации и как поступить в особо сложных ситуациях. Уровень математической подготовки современного выпускника должен быть достаточно высок, чтобы решать оптимизационные задачи, включенные в программу итоговой аттестации по математике, но, как мы видим, в учебниках математики этот материал представлен в недостаточной мере. Конечно, аналитический способ решения таких задач не выходит за рамки школьной математики, но неподготовленному школьнику практически невозможно выдумать подход к решению самостоятельно.

Школьный курс информатики затрагивает, как мы успели заметить, вопросы решения оптимизационных задач. Хотя и с некоторыми оговорками. Во-первых, не все УМК включают этот материал на базовом уровне изучения дисциплины. Во-вторых, математическая подготовка обучающегося должна быть высокой. Мы видим, например, как школьники «просели» с графиками, и в том числе, поэтому отрадно видеть в новой модели контрольно-измерительных материалов по математике тему «Графики». Как мы понимаем, эта тема принципиально важна для аналитического способа решения задач математического программирования.

В идеале должен быть отлажен тандем «математика + информатика», но на практике возникает много проблем. Например, важна своевременность и согласованность подачи материала в двух дисциплинах. Отдельный вопрос состоит в том, как научиться решать такие задачи обучающихся, профиль которых не предусматривает углублённое изучение информатики.

Естественным решением всех озвученных проблем является системный подход и внедрение межпредметного элективного курса, который должен интегрировать в себе следующие темы из математики и информатики:

1) графики (повторение всех основных математических функций и их характеристик, построение графиков средствами интернет-сервисов и с помощью электронных таблиц);

3) задачи линейного программирования (составление модели задачи, графический способ решения задач из двумерного пространства, использование интернет-сервисов GeoGebra, Desmos, надстройки Microsoft Excel «Поиск решения», программирование задач из двумерного и многомерных пространств);

4) производная (геометрический смысл, поиск наибольших и наименьших значений);

5) задачи нелинейного программирования (аналитический и графический способ, использование интернет-сервисов GeoGebra, Desmos, программирование задач из двумерного и многомерных пространств).

Такое построение элективного курса на основе систематизации перечисленных тем предметной области «Математика и информатика» позволит сформировать представление о задачах оптимизации и устойчивый навык решения таких задач.

Заключение

Резюмировав все изложенное, можно сделать вывод, что системный подход к обучению решению оптимизационных задач должен реализовываться с помощью двух составляющих: базовой подготовки в рамках дисциплин «Математика» и «Информатика», а также специализированной.

Специализированная подготовка должна осуществляться с помощью элективного курса по основам оптимизации, который включает в себя необходимые темы из математики и информатики. Межпредметный элективный курс по основам оптимизации позволяет научить эффективно использовать методы математики и информатики для анализа и решения оптимизационных задач.

Список литературы

Баратова Е.Д., Тараканов А.Ф. Метод штрафов и необходимые условия оптимальности в дифференциальной иерархической игре при неопределенности // Известия АН. Теория и системы управления. 2003. №3. С. 30-36.

Баратова Е.Д., Тараканов А.Ф. Метод штрафов и необходимые условия оптимальности в дифференциальной кооперативной игре при неопределенности // Известия высших учебных заведений. Математика. 2004. № 12 (511). С. 66-74.

Босова Л.Л., Босова А.Ю. Информатика. 9 класс: учебник. 6-е изд. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2016.

Власов Д.А. Элементы математических методов в экономике в контексте профессиональной ориентации школьников // Профессиональная ориентация, 2018. № 1. С. 27-30.

Горностаева Т.Н., Горностаев О.М. Компьютерное моделирование в школьном и вузовском курсе информатики // Мир науки. Педагогика и психология. 2019 №6. URL: https://mir-nauki.com/PDF/84PDMN619.pdf (дата обращения: 01.12.2021)

Грибанова-Подкина М.Ю. Модели и базы данных в контексте непрерывного образования // Компьютерные науки и информационные технологии: материалы международной научной конференции, Саратов, 2-3 июля 2018 г. Саратов: «Издательский центр «Наука», 2018. С. 114-117.

Грибанова-Подкина М.Ю. Разработка и исследование моделей как фактор формирования объектно-ориентированного мышления // Образование. Технологии. Качество: материалы III всероссийской научно-практической конференции, Саратов, 29-30 марта 2019 г. Москва: Издательство «Перо», 2019. С. 41-45.

Информатика и ИКТ. Задачник-практикум: в 2 т. Т. 2 / Л.А. Залогова [и др.]; под ред. И.Г. Семакина, Е.К. Хеннера. 5-е изд. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013.

Поляков К.Ю. Задачи на анализ логических выражений в ЕГЭ по информатике // Информатика в школе. 2019. № 9 (152). С. 29-35.

Поляков К.Ю., Еремин Е.А. Информатика. 9 класс: учебник. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2019.

Приказ Минобрнауки России от 17.05.2012 № 413 (ред. от 11.12.2020) «Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта среднего общего образования». URL: https://fgos.ru/fgos/fgos-soo/ (дата обращения: 01.12.2021)

Семакин И.Г., Хеннер Е.К., Шестакова Л.В. Информатика. 11 класс. Углубленный уровень: учебник: в 2 ч. Ч. 2. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2016.

Информатика. 8 класс: учебник / И.Г. Семакин [и др.]. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2016.

Шестаков С.А. ЕГЭ 2020. Математика. Задачи с экономическим содержанием. Задача 17 (профильный уровень) / Под ред. И.В. Ященко. М.: МЦНМО, 2020.

Штепа Ю.П. Роль обучения решению задач по информационному моделированию для развития ИКТ-компетентности старшеклассников // Вестник ДВГСГА. Серия 1. Гуманитарные науки. 2009. №1 (2). С. 28-44.

SYSTEM APPROACH TO STUDYING OPTIMIZATION PROBLEMS IN THE SCHOOL COURSE OF MATH AND INFORMATICS

Nasonova E. D.
PhD (Physics and mathematics), associate professor
baratovaed@mail.ru
Balashov
Balashov Institute (branch) of Saratov State University

Gribanova-Podkina M. Yu.
PhD (Physics and mathematics), associate professor
m.gribanova-podkina@rambler.ru
Balashov
Balashov Institute (branch) of Saratov State University

Abstract. The study is devoted to the formation of skills to model and solve optimization problems at the level of basic general and secondary general education. In the subject area "Mathematics and Informatics", the ability to build mathematical models, including for optimization problems, is an important part of training students, this is reflected in the control and measuring materials in informatics and profile mathematics. Each of the disciplines of the subject area "Mathematics and Informatics" forms its own skills necessary for the ability to solve optimization problems. In the school mathematics course, preparation for solving such problems is seen from the seventh grade, and at the high school level, the basics of optimization theory for a function of one variable are considered, which, nevertheless, does not make it possible to consider the whole variety of problems of this type. In the course of computer science, optimization problems are presented, but not in all educational and methodological complexes and in a small amount. In addition, informatics is not always present in the curricula of the secondary general education level. The teaching methodology for solving optimization problems should be based on a systematic approach that takes into account the contribution of each academic subject. Mathematical training is the main foundation, which is complemented by computer tools for the presentation and modeling of data. The systematic approach proposed in the article allows students to form a holistic view of the optimization problems themselves and the methods of solving them, which are necessary in each specific case. The proposed approach is implemented with the help of two components: basic training within the disciplines "Mathematics" and "Informatics" and specialized with the help of an interdisciplinary elective course on the basics of optimization. The interdisciplinary elective course on the basics of optimization allows you to teach how to effectively use the methods of mathematics and computer science for the analysis and solution of optimization problems.

Keywords: systems approach, optimization problem, information technology, mathematical programming, unified state exam.

References

Baratova, E. D., Tarakanov, A. F. (2003). Penalty method and necessary optimality conditions in a differential hierarchical game under uncertainty. *Journal of computer and systems sciences international*, 3, 30-36. (In Russ.)

Baratova, E. D., Tarakanov, A. F. (2004). Penalty method and necessary optimality conditions in a differential cooperative game under uncertainty. *Izvestiya VUZ. Matematika*, *12* (66-74). (In Russ.)

Bosova, L. L., Bosova, A. Yu. (2016). *Informatika. 9 klass: uchebnik*. 6th ed. Moscow: Binom. Laboratoriya znaniy. (In Russ.)

Vlasov, D. A. (2018). Elementy matematicheskikh metodov v ekonomike v kontekste professional'noy orientatsii shkol'nikov. *Professional'naya orientatsiya,* (1), 27-30. (In Russ.)

Gornostaeva, T. N., Gornostaev, O. M. (2019). Computer modeling in school and university courses in computer science. *World of science. Pedagogy and psychology*, 6. Retrieved from https://mir-nauki.com/PDF/84PDMN619.pdf (In Russ., abstract in Eng.)

Gribanova-Podkina, M. Yu. (2018). Modeli i bazy dannykh v kontekste nepreryvnogo obrazovaniya [Models and databases in the context of lifelong education]. *Komp'yuternye nauki i informatsionnye tekhnologii: materialy mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii* (pp. 114-117). Saratov: Izdatel'skiy tsentr Nauka. (In Russ.)

Gribanova-Podkina, M. Yu. (2019). Razrabotka i issledovanie modeley kak faktor formirovaniya ob"ektno-orientirovannogo myshleniya [Development and research of models as a factor in the formation of object-oriented thinking]. *Obrazovanie. Tekhnologii. Kachestvo: materialy III vserossiyskoy nauchno-prakticheskoy konferentsii* (pp. 41-45). Moscow: Izdatel'stvo Pero. (In Russ.)

Zalogova, L. A., & Semakin, I. G., Henner, E. K. (Eds.) (2013). *Informatika i IKT. Zadachnik-praktikum : v 2 t. T. 2*. 5th ed. Moscow: BINOM. Laboratoriya znaniy. (In Russ.)

Polyakov, K. Yu. (2019). Tasks for the analysis of logical expressions in the exam in informatics. *Informatics in school*. *9* (152), 29-35. DOI: 10.32517/2221-1993-2019-18-9-29-35 (In Russ., abstract in Eng.)

Polyakov, K. Yu., Eremin, E. A. (2019). *Informatika. 9 klass: uchebnik*. Moscow: BINOM. Laboratoriya znaniy. (In Russ.)

Prikaz Minobrnauki Rossii ot 17.05.2012 N 413 (red. ot 11.12.2020). Ob utverzhdenii federal'nogo gosudarstvennogo obrazovatel'nogo standarta srednego obshchego obrazovaniya (2012) [Order of the Ministry of Education and Science of Russia of 05/17/2012 № 413 (as amended on 12/11/2020). On approval of the federal state educational standard of secondary general education]. Retrieved from https://fgos.ru/fgos/fgos-soo/ (In Russ.)

Semakin, I. G., Khenner, E. K., & Shestakova, L. V. (2016). *Informatika. 11 klass. Uglublennyy uroven' : uchebnik. V 2 ch. Ch. 2*. Moscow: BINOM. Laboratoriya znaniy. (In Russ.)

Semakin I. G., Zalogova L. A., & Shestakova L. V. (2016). *Informatika. 9 klass : uchebnik*. Moscow: BINOM. Laboratoriya znaniy. (In Russ.)

Shestakov, S. A., & Yashchenko, I. V. (Eds.) (2020). *EGE 2020. Matematika. Zadachi s ekonomicheskim soderzhaniem. Zadacha 17 (profil'nyy uroven')*. Moscow: MTsNMO. (In Russ.)

Shtepa, Yu. P. (2009) Rol' obucheniya resheniyu zadach po informatsionnomu modelirovaniyu dlya razvitiya IKT-kompetentnosti starsheklassnikov. *Vestnik DVGSGA. Seriya 1. Gumanitarnye nauki, 1*(2), 28-44. (In Russ.)