

## МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ И ИНФОРМАТИКЕ В СИСТЕМЕ ОБЩЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

---

DOI: 10.24888/2500-1957-2022-2-8-21

УДК  
376.5

**О МОДЕЛИ РАБОТЫ С МАТЕМАТИЧЕСКИ ОДАРЕННЫМИ  
ШКОЛЬНИКАМИ**

**Агаханов Назар Хангельдыевич**  
к.ф.-м.н., доцент,  
nazar\_ag@mail.ru  
г. Долгопрудный

Московский физико-технический  
институт

**Марчукова Ольга Григорьевна**  
к.п.н., ст. преподаватель  
vera-nadegda@bk.ru  
г. Тюмень

Тюменский государственный институт  
развития регионального образования

**Аннотация.** В контексте развития в нашей стране современных отраслей наук и производства актуальной целью становится подготовка высококвалифицированных специалистов в области информационных технологий и математики. Требуется совершенствование работы по поиску, профессиональной ориентации и подготовке молодежи, обладающей способностями в области математики, как в высшей школе, так и в системе общего образования. В статье освещается современное состояние этой работы и выявляется необходимость ее выведения за рамки общеобразовательной школы. Предложены пути развития и модернизации системы работы со школьниками, обладающими математическими способностями. Рассматривается роль содержания математических олимпиад не только в решении вопроса отбора одаренных школьников, но и формировании мотивации учащихся к занятиям математикой и их начальной профориентации. Выявляется необходимость изменений: в системе поиска и отбора учащихся, имеющих способности в области математики; в составе группы педагогов, осуществляющих работу с мотивированными и способными школьниками; в списке олимпиад, решающих задачи выявления способных учащихся; в формулировании целей, стоящих перед математическими олимпиадами; в разработке содержания олимпиад адекватно сформулированным целям. С целью реализации указанных изменений предлагаются новые подходы к работе со школьниками. Описана учебно-организационная модель для решения задач поиска, мотивации, отбора и профориентации широкой группы обучающихся, имеющих способности в области математики.

**Ключевые слова:** математически одаренные школьники, математические способности, математические олимпиады, содержание олимпиадных задач.

**Благодарности:** автор статьи выражает благодарность рецензентам за полезные и содержательные замечания.

**Актуальность оптимизации работы с математически одаренными школьниками**

Развитие нашей страны в мире высоких технологий требует развития наукоёмких отраслей<sup>1</sup>. Для цифровой экономики динамизация подготовки высококвалифицированных кадров – приоритетная задача. Результаты ее решения зависят, в том числе, от слаженности всех звеньев в системе работы с одаренными школьниками и студенческой молодежью. Возникающая в связи с этим **проблема** оптимизации традиционных и возникших за последние три десятилетия новых форм работы с математически одаренными школьниками осознается тем более выраженной в условиях отказа от Болонской системы подготовки кадров и осмысления итогов перманентной модернизации отечественной системы образования.

Изменившаяся социально-образовательная реальность ориентирует учебно-организационный процесс не столько на *поиск* и *отбор* юных талантов, сколько на *привлечение* способных учащихся к математике и *вовлечение* в ее познание. Данное означает, что моделирование учебно-организационной работы должно определяться задачами поиска, мотивации, отбора и профориентации широкой группы обучающихся. Обоснованием введения категорий *мотивации* и *профориентации* выступают, с одной стороны, четко обозначенные приоритеты кадровой политики на ближайшую и среднесрочную перспективу, с другой стороны, само содержание современных программ профессионального образования, требующее развитой культуры математического мышления.

Готовность существующей практики работы с одаренными школьниками к решению поставленных задач показывает анализ ее состояния.

**Современное состояние работы с юными математиками**

В настоящее время бытует представление, что в силу требуемой широты охвата учащихся, основным звеном и ключевыми исполнителями работы со школьниками, проявляющими способности в области математики и информатики, должны быть школы и учителя. Формированию такого взгляда способствовало введение Федеральных государственных образовательных стандартов второго поколения (2009, 2010, 2012 гг.), предусматривающих базовый и повышенный уровень освоения содержания образования. Новые целевые формулировки («повышенный уровень» / «ученик получит возможность научиться» / «на уроке будут созданы условия для...») сориентировали на работу со способными учениками в рамках урока и занятий внеурочной деятельности: «каждый учитель самостоятельно разрабатывает программу подготовки школьников к олимпиадам по математике, в которую включаются определенные темы с системой задач» (Пермякова, 2020). Результаты истекшего десятилетия убедительно показали, что ни мастерство учителя, ни методическая поддержка (большой по объему и вариативности тем материал, представленный на различных интернет-платформах) не привели и не могут привести к требуемому результату (успешности занятий с одаренным ребенком в условиях общеобразовательного класса на уроке), поскольку сама форма классно-урочной системы массовой школы не адекватна содержанию адресной подготовки способного ученика. Введение дополнительного содержания в урок, не решая задач действенной подготовки способных школьников, ведет к перегрузке основной группы учащихся. Анализируя уровень остаточных знаний по математике абитуриентов и студентов первых курсов университетов, ученые бьют тревогу: «перегружать и дальше школьные программы нельзя – мы уже перешли все разумные и научно-обоснованные пределы», – и ориентируют на «поиск путей...концентрации учебного процесса на более глубоком усвоении базовых понятий и положений» (Дураков, 2022).

Однако более важным представляется выявление не организационного, а содержательного «изъяна» сложившейся практики, состоящего в «конфликте» целей обучения стандартным (основанным на соблюдении верной последовательности определенного количества действий) и нестандартным (основанным на качественной новизне идеи условия и / или решения) задачам. Основной целью школьного учебного процесса является освоение большинством учащихся алгоритмов и методов решения

<sup>1</sup> Указ Президента РФ от 02.03.2022 № 83 «О мерах по обеспечению ускоренного развития отрасли информационных технологий в Российской Федерации» и др.

## МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ И ИНФОРМАТИКЕ В СИСТЕМЕ ОБЩЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

стандартных задач, реже – «задач повышенной сложности». Такие задачи допускают исчислимый минимум (часто – один) нестандартных шагов в своем решении. Тем самым, работа учителей даже в классах, где есть учащиеся, обладающие высоким уровнем восприятия математики, сводится к разбору на занятиях (основных или в рамках факультативов) стандартных методов и алгоритмов решения задач.

Не меняет ситуацию дефицита ресурсов выявления и профориентации одаренных школьников (здесь и далее профориентация подразумевает выбор выпускником школы ВУЗа математической направленности) наличие в профильном ЕГЭ задач, предполагающих некоторую творческую самостоятельность выпускника (часть С). Какова бы ни была сложность задач, она все равно определяется наличием пусть и не совсем простых, но, тем не менее, достаточно предсказуемых идей решения. Это могут быть оценки (нестрогие неравенства) правой и левой частей уравнения в алгебре (хорошо обученные школьники сразу различают такие задачи, увидев в уравнении функции разных типов), либо задачи с параметрами, решаемые с использованием графических методов и т.п. То есть усложнения заданий сохраняются в пределах некоей заданности, измеряемой целями итоговой аттестации за курс школы.

Популярность цифровых инструментов образования и внедрение в образовательный процесс в период пандемии дистанционных форм обучения способствовали широкому распространению интернет-репетиторства. Эффективность занятий с лучшими педагогами очевидна – ученик приобретает глубокие и прочные знания, восполняет пробелы и научается «правильно мыслить». Иными словами, школьник осваивает алгоритмы решения определённых типов задач. Однако приобретаемое преимущество – индивидуализированный характер подготовки – не преодолевает ее ограниченности в выявлении и развитии творческого потенциала ученика. В результате, выпускник школы, даже не обладающий необходимым для обучения в передовом университете уровнем математических способностей, может поступить в такой университет, сдав успешно ЕГЭ. Понимание ошибочности выбора ВУЗа, к сожалению, приходит после нескольких месяцев обучения. Накопленные за время существования ЕГЭ эмпирические данные позволяют утверждать, что экзаменационные задания в формате ЕГЭ (особенно его тестовая часть), эффективно выделяют только ту группу школьников, которые *не готовы* к решению сложных математических задач. То есть, отсекая абитуриентов, неготовых к обучению в статусном вузе, ЕГЭ, тем не менее, *не выделяет* искомую группу школьников, способных к творческим преобразованиям в решениях и могущих успешно учиться в таком университете.

Отметим, что хорошая базовая подготовка, равно как и большой объем знаний в области углубленной школьной программы, еще не являются показателями творческого потенциала учащегося. В противном случае, победителями всероссийской олимпиады школьников (ВсОШ) были бы только ученики лучших физико-математических школ страны, сосредоточенных в Москве и Санкт-Петербурге, в то время как, например, победителями заключительного этапа ВсОШ по математике 2021/2022 учебного года, помимо столичных школьников, стали учащиеся еще из 8 регионов. Объясняется это тем, что глубокие знания и навыки, которые участник олимпиады может воспроизвести при решении задачи, тематически близкой к встречавшейся ранее (*когнитивность*), не позволяют, тем не менее, найти решение сложной новой задачи, так как последнее требует проведение нового (нестандартного), близкого к научному творчеству, рассуждения (*креативность*).

В последние годы активизировалась деятельность региональных исследовательских коллективов по обоснованию и реализации доступных форм развития математического творчества. Содружество ученых, учителей и студентов позволяет актуализировать существующие на местах ресурсы в соответствии со спецификой территории. Это может быть развитие познавательной активности учеников средних классов в Малой школьной академии при пединституте (Ладоскин, 2018), система детско-взрослого наставничества в Сетевой проектной школе (Сергеева, 2021) и т.д. То есть, реальный опыт подтверждает теоретическое рассуждение: структуры, эффективно решающие проблему подготовки мотивированных и способных юных математиков, должны формироваться *вне школы и школьного курса математики*. В целом ряде регионов нашей страны (в Москве, Санкт-

Петербурге, Республиках Татарстан и Адыгея, в Кировской, Московской, Тюменской областях и др.) существуют структуры (управленческие + учебно-научные), успешно ведущие работу, направленную на поиск и отбор одаренных школьников. Однако, в силу как организационных, так и кадровых проблем, распространение опыта на большинство регионов страны проходит не столь успешно. Здесь следует отметить, что основы этой работы были заложены в Советском Союзе, в первую очередь, в Москве и Ленинграде (Леман, 1964; Генкин, 1994).

В советское время работа с одарёнными школьниками велась на кружках при университетах, а также через систему заочных школ, наиболее известными среди которых были школы при МГУ, МФТИ, Новосибирском государственном университете. Формат занятий в них был индивидуализированный – на каждое выполненное задание школьник получал подробную рецензию. В настоящее время созданы многочисленные новые формы работы с одарёнными школьниками, в том числе в рамках проектов, реализуемых образовательным центром Сириус и его филиалами. Недостатком всех проводимых мероприятий является фрагментарность работы, направленной в целом на одну и ту же группу учащихся, а также узость круга педагогов, эффективно осуществляющих работу по поиску и подготовке математически способных школьников. Другим важным фактором, влияющим на снижение в регионах страны качества этой работы, является наблюдающаяся в последнее время тенденция перехода способных детей в школы столицы, обладающей большими финансовыми возможностями для поощрения за олимпиадные успехи. В этом усматриваются неоднозначные последствия предпринимаемых государством шагов по обогащению базовых идей олимпиадного движения (обеспечение научно-образовательной конкурентоспособности страны) персонально-значимыми ценностями: успешное участие в олимпиаде становится социально-образовательным лифтом для талантливых детей, что приводит к концентрации математически одаренных школьников и студентов в столичных регионах<sup>2</sup>. Лучшие условия работы становятся решающим фактором в решении о переезде в Москву и для значительной группы учителей, нередко лучших в своих регионах.

Таким образом, очерчивая проблемное поле в существующей практике работы с юными математиками, следует выделить:

- неправомерность возложения полноты функций поиска, мотивации и отбора одаренных учащихся на уровень школы, поскольку массовый учитель, организуя работу со способными детьми, тем не менее, остается в рамках обучения стандартным методам и алгоритмам решения задач, которые адекватны «пороговым» значениям сложности профильного ЕГЭ;

- несостоятельность устоявшегося представления о том, что углубленная подготовка является однозначным показателем творческого потенциала и, следовательно, способности к освоению сложной (научоемкой) междисциплинарной / полидисциплинарной программы профессионального образования, поскольку творчество не тождественно широте математического кругозора и эрудиции;

- недостаточность сложившегося формата работы с одаренными школьниками, центрированного на взаимодействиях проявивших себя и *уже* известных учащихся с *уже* известными наставниками; поскольку вне поля зрения остаются большая группа потенциально одаренных / мотивированных детей, а также педагоги, способные вести работу с ними.

Рассмотрение проблемы поиска и отбора большой группы школьников, проявляющих математические способности, их мотивации и профориентации обосновывает создание новой **учебно-организационной модели**. Приведём структуру модели и ее содержание.

<sup>2</sup> «Национальная образовательная инициатива «Наша новая школа» (2010), «Концепция общенациональной системы выявления и развития молодых талантов» (2012), «Правила выявления детей, проявивших выдающиеся способности, и сопровождения их дальнейшего развития» (2015) и др. Указ Президента РФ от 21.07.2020 № 474 «О национальных целях развития Российской Федерации на период до 2030 года».

**Учебно-организационная модель работы с математически одаренными школьниками**

Как обозначено выше, в работе с математически одаренными школьниками речь должна идти не только об учащих, проявляющих выраженные способности в области математики и принадлежащих к 2,2% населения с очень высоким уровнем интеллекта (Шадрин, 2008), но и обо всех тех высокомотивированных учащих, кто, обладая достаточным уровнем математических способностей, сможет успешно работать в научных и технологических областях, требующих применения математики и информационных технологий. В предлагаемой модели **объект педагогической деятельности**

– относительно однородная группа достаточно стабильного состава учащихся, проявляющих выраженные способности (на основе природных задатков) в области математики и

– неоднородная группа школьников, имеющих выраженный (спонтанно-ситуативный или постоянный) интерес к занятиям математикой.

Выделение такой структуры объекта обосновывается как широко известной моделью одаренности Дж. Рензулли (интеллектуальные способности – креативность – мотивация), так и представлением об одаренности как динамической характеристике личности, для актуализации потенциала которой особое значение приобретают среда и характер деятельности (А.М. Матюшкин, А.И. Савенков, М.А. Холодная).

В качестве **технологической составляющей** модели предлагается система олимпиад. В научной и педагогической литературе, в нормативных документах не раз отмечалось, что олимпиады остаются проверенным и эффективным инструментом определения уровня творческих способностей школьника и его мотивирования к систематическому научно-исследовательскому творчеству. Так, в Порядке проведения всероссийской олимпиады школьников записано: «Олимпиада проводится в целях выявления и развития у обучающихся творческих способностей и интереса к научной (научно-исследовательской) деятельности, пропаганды научных знаний, отбора лиц, проявивших выдающиеся способности, в составы сборных команд Российской Федерации для участия в международных олимпиадах по общеобразовательным предметам»<sup>3</sup>. Разумеется, столь же успешно этих целей достигают получившие признание Московская и Санкт-Петербургская математические олимпиады, Международный турнир городов (Гальперин, 1986; Медников, 2017; Фомин, 2007).

Однако не все олимпиады в равной степени успешности могут выявлять способности школьника. Математические конкурсы обладают большой долей привлекательности. Успешное решение *простых* математических задач сродни разгадыванию кроссвордов, ребусов. Это в настоящее время активно используется различными образовательными платформами, предлагающими школьникам каждая «свою» олимпиаду, большинство из которых проводится в онлайн-формате. Привлекательность таких соревнований помимо простоты заданий усиливается выдачей дипломов даже при незначительных достижениях участников. В статье (Agakhanov, 2021) были описаны проблемы, связанные с проведением многочисленных конкурсов, носящих наименование «математические олимпиады».

Не способны в существенной мере решать задачу поиска сильных школьников вузовские олимпиады – олимпиады Российского совета олимпиад школьников (РСОШ), нацеленные на формирование контингента абитуриентов, готовых успешно продолжить обучение в выбранном вузе. Их участниками и победителями становятся старшеклассники, отбор и привлечение к занятиям математикой которых произошёл ранее (победители олимпиад и лучшие из учащихся специализированных школ и классов). В том числе, фактически все школьники, добившиеся успехов на заключительных этапах ВсОШ, получают высшие баллы на ЕГЭ и становятся, одновременно, победителями вузовских олимпиад. И хотя олимпиады РСОШ играют большую роль в профориентации выпускников школ, в контексте нашей позиции следует отметить, что несмотря на наименование и статус

---

<sup>3</sup> Приказ Министерства просвещения РФ от 27 ноября 2020 года №678

олимпиад, имена их участников предсказуемы. Поэтому ни олимпиады «местного значения» (городские / областные конкурсы, игры, дистанционные олимпиады и проч.), ни статусные вузовские олимпиады не рассматриваются нами как действенный инструмент привлечения и вовлечения школьников к занятиям математикой.

В качестве **ведущей технологической составляющей** модели предлагаем выделить всероссийскую олимпиаду школьников в силу её массовости на начальных этапах – школьном (порядка 2 млн. участников) и муниципальном (порядка 500 000 участников), где олимпиада играет в основном роль мотивирующего мероприятия; высокого содержательного уровня на региональном этапе (порядка 8 000 участников), и научно-творческого характера на заключительном этапе (в котором участвуют около полутысячи наиболее талантливых юных математиков страны).

Для успешного выполнения ВсОШ своих целей обязательным требованием является поддержание высокого уровня содержания на всех ее этапах. Задания регионального и заключительного этапов олимпиады по математике разрабатываются Центральной предметно-методической комиссией всероссийской олимпиады школьников по математике (ЦПМК), начальных этапов ВсОШ – муниципальными и региональными методическими комиссиями. К сожалению, не во всех территориях комиссии могут быть сформированы из высококвалифицированных в области олимпиадной математики специалистов. Для решения этой проблемы в последние годы осуществляется обмен комплектами заданий между регионами, а также составление Образовательным центром Сириус при поддержке ЦПМК комплектов заданий школьного этапа ВсОШ, которые могут использоваться территориями.

Одной из главных проблем реализации модели остается, как показывает анализ результатов проведения олимпиад 2015-2022 годы, низкий уровень базовой школьной подготовки учащихся, не позволяющий многим, даже потенциально сильным участникам, продемонстрировать свои способности (близким является пример из филологии: плохо владея азбукой, молодой человек не сможет за отведённое время придумать рассказ, даже обладая литературным даром). Вследствие чего не может быть успешно решена задача выявления школьников, обладающих математическими способностями. Кажется, что частично эта проблема может быть снята использованием в олимпиадной практике класса задач, не требующих глубоких знаний «обычной» школьной математики (задачи на логику, построение конструкций, и т.д.). Но, математика – едина, и математическое мышление базируется на культуре рассуждения, прививаемой, в том числе, при качественном учебном процессе. И в олимпиадах успехов добиваются школьники, обладающие этой культурой. Следовательно, обязательным звеном работы с одаренными учащимися является повышение уровня их общешкольной подготовки. В качестве подтверждения приведём результаты Пригласительного этапа всероссийской олимпиады, носящего открытый характер (проведён совместно Образовательным центром Сириус и ЦПМК весной 2022 года). Для удобства сравнения показаны усреднённые цифры по группам классов (Таблица 1). Сопоставление данных демонстрирует снижение результатов по мере включения в задания задач, требующих культуры математического мышления (а именно: использования алгебраического аппарата, навыков комбинаторных подсчётов и т.п.).

*Таблица 1.*

*Пригласительный этап ВсОШ, 2022 год*

Классы	Процент решивших хотя бы 2 задания из 8	Процент решивших хотя бы 6 заданий из 8
4 – 6	74	14
7 – 8	50	3
9 – 10	30	1

Выше мы указали на ошибочность предположения о том, что задачу факультативной и кружковой работы со школьниками можно возлагать на каждого учителя, ведущего общую учебную подготовку по математике, в силу того, что изучение и выполнение стандартных

## МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ И ИНФОРМАТИКЕ В СИСТЕМЕ ОБЩЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

алгоритмических действий не раскрывает творческий потенциал учащегося. К этому следует добавить, что в математических олимпиадах, уже начиная с муниципального уровня, основу заданий составляют *доказательства*, то есть логические рассуждения, обосновывающие справедливость или ложность тех или иных утверждений. И для выявления учащихся, обладающих математическими способностями, необходима индивидуальная работа с ними, включающая оценку правильности предлагаемых школьниками рассуждений, что требует от самого педагога умения проводить такие рассуждения, то есть умения решать олимпиадные задачи.

Опыт многих регионов страны показывает, что наиболее успешно работа по поиску математически способных школьников проводится в тех городах, в которых функционируют либо сильные математические лицеи и школы с качественной кружковой работой, либо сильные городские центры дополнительного образования. К работе в этих структурах, помимо лучших учителей, привлекаются преподаватели из высшей школы, а также студенты из числа победителей олимпиад, которые с интересом готовы работать с мотивированными юными математиками на своей «малой родине». Этот опыт получил признание в стране. В настоящее время, согласно нормативным документам ВСОШ, *студенты*, добившиеся в школьные годы высоких результатов на олимпиадах, могут быть активно вовлечены в олимпиадный процесс, в том числе входить в состав ЦПМК, жюри всероссийской олимпиады школьников. Поэтому **субъектами** учебного процесса кроме наиболее выдающихся учителей и педагогов высшей школы, педагогов системы дополнительного образования, могут являться студенты-олимпиадники. Несмотря на то, что талантливые выпускники школ стремятся не только получить качественное образование в ведущих университетах, но и найти затем интересную творческую работу в столицах, до окончания университета для них важно выступать в роли «научных волонтеров», передавать знания юным математикам своей родной школы или своего города. Ярким примером является многолетняя работа со школьниками в «Ярославском центре телекоммуникаций и информационных систем в образовании» студента МФТИ Максима Дидина, победителя Международной математической олимпиады.

Профессиональный рост субъектов учебного процесса может осуществляться на курсах повышения квалификации, на площадках математических олимпиад и командных математических турниров. В том числе, в рамках уже зарекомендовавших себя профильных смен в Образовательном центре Сириус и его региональных филиалах, сезонных профильных школ, проводимых в ряде регионов, а также командных турниров юных математиков: Кубок Колмогорова, Южный математический турнир, Уральский турнир юных математиков и др. К сожалению, не используется в полной мере ресурс педагогов, прошедших такую подготовку. Регионам следует активней привлекать их к работе в качестве педагогов-наставников для других учителей. Такое наставничество будет эффективней, если оно будет осуществляться не массово (чтением онлайн-курсов), а индивидуально с наиболее перспективными молодыми учителями, преподавателями центров дополнительного образования.

Таким образом, объектом учебно-организационной модели работы с математически одаренными школьниками являются неоднородные группы учащихся: проявляющие способности в области математики, имеющие высокую мотивацию (интерес) к занятиям математикой / потенциально одаренные учащиеся. Субъектами учебного процесса выступают педагоги, для которых занятия олимпиадной математикой профессионально и лично-значимо: в известный круг лидеров (школьных учителей, специалистов системы дополнительного образования и вузовских преподавателей) включаются педагоги, «ведомые» наставниками, а также студенты-олимпиадники, имеющие опыт оценивания олимпиадных работ. Технологическим компонентом модели, обеспечивающим выявление, мотивацию и профориентацию одаренных школьников, выступают этапы ВСОШ, каждый из которых решает свою задачу: школьный и муниципальный – привлечение детей к занятиям математикой; муниципальный и региональный – выявление школьников, обладающих математическими способностями и их профориентация; региональный и заключительный – отбор одаренных школьников.

**Предметно-математическое содержание модели**

Эффективность работы учебно-организационной модели в значительной степени определяется её предметно-математическим содержанием, которое на каждом этапе реализации должно зависеть от возрастных психофизиологических и когнитивных особенностей возрастной группы, творческого потенциала участников, спортивно-конкурсных целей олимпиады. Качество заданий предполагает их научную корректность: четкость формулировок, строгость решений, а также эстетическую привлекательность.

Опишем стилистику и тематику олимпиадных задач для разных возрастных групп с позиций возрастной психофизиологии.

**4-6 класс.** Указанному возрасту свойственно наглядно-образное мышление, ребенку важно оперировать известными предметами и явлениями. Желателен игровой или ситуационно-описательный жанр заданий без перехода на формально-математический язык. Школьники успешно справляются с нахождением примеров, включающих небольшое число объектов, с построением логических конструкций, содержащих малое число логических шагов.

К таковым относятся задачи на взвешивания, числовые ребусы, задачи на истинные или ложные высказывания. А также задачи на построение конструкций, обладающих указанными свойствами (числовых, геометрических), включая задачи на разрезания. Возможно включение в задания тем «Чётность» и «Делимость» в случае, если все участники олимпиады изучали эти темы на факультативе. Для этой возрастной группы олимпиадные задания должны решать, в первую очередь, задачу мотивации (формирования интереса).

Приведём примеры задач школьного этапа (Агаханов, 2020), муниципального этапа (Агаханов, 2021), содержание которых отвечает поставленным требованиям.

Логическая задача: *«Петя, Вася и Коля играли в футбол. Один из них разбил мячом стекло. У них спросили: «Кто это сделал?» Петя сказал: «Вася», Вася сказал: «Коля», а Коля ответил: «Не я». Кто разбил стекло, если один из ребят сказал неправду, а двое – правду?»* Решение. *«Предположим, что Петя разбил стекло. Тогда Петя и Вася сказали неправду. Значит, этот случай невозможен. Предположим, что Коля разбил стекло. Тогда Петя и Коля сказали неправду. И этот случай невозможен. Предположим, что Вася разбил стекло. Тогда Петя и Коля сказали правду, а Вася – неправду. Значит, этот случай возможен. Таким образом, стекло разбил Вася».*

Числовая задача: *«Найдите все решения ребуса: ТУК + ТУК + ТУК + ТУК + ТУК = СТУК. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным буквам – разные цифры».*

Решение. *«Вычтем из обеих частей равенства число ТУК. Получим: ТУК + ТУК + ТУК + ТУК = С000. То есть  $4 \cdot \text{ТУК} = C \cdot 1000$ . Разделив на 4, получаем:  $\text{ТУК} = C \cdot 250$ . Число ТУК – трехзначное, поэтому  $C < 4$ . Проверка показывает, что цифры  $C = 1$  (тогда ТУК = 250) и  $C = 3$  (тогда ТУК = 750) подходят, а цифра  $C = 2$  не подходит (тогда ТУК = 500 имеет одинаковые цифры). Задача имеет два ответа:  $250+250+250+250+250=1250$  и  $750+750+750+750+250=3750$ ».*

Отметим, что даже при соблюдении сформулированных требований по стилистике заданий, они могут решать задачу выявления логических способностей (эта и последующие задачи приведены по книге (Агаханов, 2019)):

*«Малыш и Карлсон по очереди достают из мешка конфеты, начинает Карлсон. При этом каждый берёт на одну конфету больше или меньше, чем перед этим взял другой, не брать конфеты при своём ходе нельзя. Тот, после хода которого общее количество съеденных конфет делится на 10, проигрывает и покупает торт другому. Сможет ли сладкоежка Карлсон получить торт?» (С. 97-98)*

Решение. *«Если кто-то предыдущим ходом съел 1 конфету, то следующий своим ходом должен съесть 2 конфеты. Карлсон выигрывает таким образом: вначале он съедает 1 конфету, Малыш съедает 2 конфеты, и тогда Карлсон съедает 3 (!) конфеты. Теперь Малыш должен съесть 2 конфеты, а не 4 ( $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ ), и после этого Карлсон каждым своим ходом съедает 1 конфету. Он выигрывает, так как  $1+2+3+2+1+2+1+2+1+2+1+2 = 20$ , а последний ход сделал Малыш». Заметим, что без неожиданного второго хода Карлсон проиграл бы, так как  $1+2+1+2+1+2+1 = 10$ .*

**7-8 класс.** В этом возрасте развивается абстрактное мышление ребенка, он способен и должен оперировать отвлеченными понятиями и категориями, готов к осуществлению многоходовых логических конструкций, более того, такая неявная множественность ходов (сродни квесту) способна увлечь, побуждая к рассуждению и проверке. Привлекательны для подростков задачи, обладающие некоторым ореолом магии – «цепляющие» внимание и вдохновляющие красотой (той красотой, о которой писали А. Пуанкаре и М.В. Ломоносов – отточенность и безупречность логических построений, возвышенная гармония найденных доказательств, ясность и «божественная» простота решений) (Шеврин, 1995).

По сравнению с 4-6 классом происходят изменения заданий, основанные на расширении понятийного аппарата в арифметике (отрицательные числа, дроби, модуль, признаки делимости, проценты); а также формирования алгебраического обобщения понятия числа (буквенные выражения, функции, графики) и понятия доказательства утверждений (первоначально в геометрии). Логическая структура заданий уступает место алгебраической в связи с приобретением учащимися новых знаний (тождественные преобразования, формулы сокращённого умножения), а также возрастает сложность заданий в связи с возможностью выполнения более сложных логических шагов (метод от противного, принцип Дирихле, и т.д.). Решения задач предполагают теперь сочетание нескольких логических шагов и требуют от участника пользования аппаратом математической деятельности:

*«Числа от 1 до  $2n$  разбили на две группы по  $n$  чисел и числа в группах перемножили. Может ли разность этих произведений равняться числу 55555?» (С. 156)*

*Решение.* «Предположим, что найдётся такое  $n$ , что числа от 1 до  $2n$  можно разбить требуемым образом. Разность двух произведений может равняться нечётному числу 55555 только в случае, если одно из произведений чётно, а другое – нечётно. Последнее возможно только если все входящие в него сомножители – нечётны. А среди чисел от 1 до  $2n$  ровно  $n$  нечётных. Значит, все чётные числа вошли в первое произведение, а нечётные – во второе, так как произведение чётных чисел больше ( $2 > 1, 4 > 3, \dots$ ). Итак, выполняется равенство  $2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n - 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n - 1) = 55555$ . Заметим, что  $2n > 12$ , так как  $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 < 55555$ . Но тогда среди чётных множителей присутствуют множители 6 и 12, а среди нечётных – число 9. Значит, оба произведения, а, следовательно, и их разность, должны делиться на 9. Но число 55555 на 9 не делится. Значит, разность не может равняться числу 55555». В решении используются делимость, метод от противного, чётность, сравнение чисел.

Усложнениям подвергаются комбинаторные задачи, решаемые с применением не только одной идеи.

*«Каких семизначных чисел без нулей в записи больше: тех, у которых сумма цифр равна 15, или тех, у которых сумма цифр равна 48?» (С. 152)*

*Решение.* «Обозначим группу чисел с суммой цифр, равной 15, через  $M$ , а с суммой цифр 48 – через  $N$ . Заметим, что  $15 + 48 = 63 = 9 \cdot 7$ . Это означает, что каждому числу  $A$  из  $M$ , не имеющему в записи цифр 0 и 9, соответствует число  $B$  из  $N$ , получаемое из  $A$  заменой каждой цифры  $a$  на  $b = 9 - a$ . При этом разным числам из  $M$  соответствуют разные числа из  $N$ , и полученные числа не имеют в записи цифр 0 и 9. Итак, оба множества имеют одинаковое количество чисел без нулей и девяток.

Осталось сравнить количества чисел в  $M$  и  $N$ , имеющих в своей записи девятки. Из того, что  $15 = 9 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$  следует, что в первом множестве таких чисел 7 – по количеству позиций в семизначном числе, на которых может стоять цифра 9. Но из равенства  $48 = 9 + 7 + 7 + 7 + 6 + 6 + 6$  следует, что даже чисел с девяткой и цифрами 6 и 7 – больше, так как при фиксированном положении девятки количество вариантов расположения трёх шестёрок на оставшихся позициях равно 20. Значит, чисел с суммой цифр 48 больше».

**9-11 класс.** В этом возрасте происходит формирование абстрактно-аналитического мышления: исследование функций, единое восприятие разных разделов математики (например, применение тригонометрии, координатных методов при решении геометрических задач). Соответственно изменяется структура заданий: в них включаются неравенства, задачи, использующие свойства квадратного трёхчлена, тригонометрических функций,

прогрессий, задачи на комбинации геометрических фигур. Конструктивно-логические рассуждения уступают место вычислительной комбинаторике. На более высоких этапах дополняемых использованием более сложных логических шагов: принцип крайнего, инварианты, решение задач тематики «оценка + пример».

Содержание заданий направлено теперь, в первую очередь, не на мотивирование учащегося к занятиям математикой, а на выявление среди группы мотивированных школьников тех, кто обладает математическими способностями, на раскрытие их потенциала.

Следующее задание демонстрирует единство математической культуры. Приведённая задача имеет как чисто алгебраическое решение, так и решение с применением геометрической интерпретации на координатной плоскости.

*«Квадратный трёхчлен  $f(x)$  таков, что каждое из уравнений  $f(x) = x - 1$  и  $f(x) = 2 - 2x$  имеет ровно одно решение. Докажите, что трёхчлен  $f(x)$  не имеет корней» (С. 149).*

*Первое решение.* «Пусть  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . По условию дискриминанты трёхчленов  $f_1(x) = f(x) - (x - 1)$  и  $f_2(x) = f(x) - (2 - 2x)$  равны нулю:  $D_1 = (b - 1)^2 - 4a(c + 1) = 0$  и  $D_2 = (b + 2)^2 - 4a(c - 2) = 0$ . Отсюда следует, что  $0 = 2D_1 + D_2 = 3b^2 + 6 - 12ac$ , то есть дискриминант  $D = b^2 - 4ac$  трёхчлена  $f(x)$  равен  $-2$  – отрицателен». Заметим, что даже после нахождения двух дискриминантов, школьники, как правило, выполняют привычное для них действие: вычитают из одного другой. После чего возникают сложности в понимании того, как использовать полученное равенство  $-6b - 3 + 4a = 0$ .

*Второе решение.* «Графики  $y = x - 1$  и  $y = 2 - 2x$  – это прямые, являющиеся сторонами вертикальных углов с вершиной в точке  $A(1; 0)$ , лежащей на оси  $Ox$ . Из того, что уравнения  $f(x) = x - 1$  и  $f(x) = 2 - 2x$  имеют по одному корню, следует, что график  $y = f(x)$  касается этих прямых, то есть сторон либо вертикального угла, расположенного выше оси  $Ox$ , либо ниже. Значит, он вписан в один из этих двух углов. В обоих случаях график  $y = f(x)$  не пересекает ось  $Ox$ ».

Творческий потенциал школьника выявляет следующая задача, имеющая красивое решение.

*«Две команды играют в футбол до 10 голов (встреча прекращается, как только одна из команд забьёт 10 голов). В процессе игры ведётся протокол, в который вносится счёт после каждого изменения счёта, например,  $0 : 0$ ,  $0 : 1$ ,  $0 : 2$ ,  $1 : 2$ , ...,  $5 : 10$ . Сколько различных протоколов может получиться?» (С. 97)*

*Решение.* «Продолжим итоговый протокол до счёта  $10 : 10$ , считая, что далее голы забивала только проигравшая команда. Назовём такой протокол полным. Легко понять, что каждому итоговому протоколу соответствует единственный полный протокол (у них общая часть до первого появления 10). Тогда любой итоговый протокол получается из полного, если убрать мячи, забитые проигравшей командой после того, как команда победитель забила 10 голов. А количество полных протоколов равно  $C_{20}^{10} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot \dots \cdot 1}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 1} = 184756$ , так как это число способов выбрать 10 мячей, забитых первой командой из всех 20 мячей, забитых обеими командами в полном протоколе».

### **Новизна и доступность заданий**

Ценность математических задач заключается в их эффективности в выявлении математических способностей, то есть способностей построения моделей и их логического изучения. Тем самым обязательным требованием, предъявляемым к заданиям олимпиад, является их **новизна** (здесь мы говорим не об абсолютной новизне заданий, а о незнакомстве участников соответствующего этапа олимпиады с предлагаемыми задачами). Объём знаний является при этом только инструментом для оформления найденного решения, но не помогает в поиске самого решения, то есть осуществления **открытия** (поиск решения сложной задачи математической олимпиады сродни научному исследованию).

Актуальным является и второе требование: задания, предлагаемые на олимпиаде, должны быть **доступны** всем участникам и не должны использовать материал, выходящий за рамки школьной программы (разумеется, это требование не относится к сложным заданиям заключительного этапа ВсОШ, участие в котором принимают лучшие школьники, ставшие

## МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ И ИНФОРМАТИКЕ В СИСТЕМЕ ОБЩЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

победителями предыдущих этапов олимпиады – задания для них могут решаться в том числе с опорой на знания, приобретённые в профильных математических школах).

**Сложность** заданий должна определяться уровнем участников олимпиады. Подростковому возрасту свойственным является стремление к успеху, достижению признания, равно как снижению мотивации способствует полная неудача. В соответствии с этим определяется уровень сложности заданий олимпиады: большинство участников должны справиться с 1-2 самыми простыми заданиями, в то время как с самыми сложными – единицы.

Не менее важным мотивирующим фактором математических олимпиад является эстетическая привлекательность их заданий. **Красоту** задач могут оценивать не только профессиональные математики, но и сильные школьники. По окончании заключительного этапа ВсОШ по математике на протяжении многих лет проводится опрос участников по определению наиболее понравившейся им задачи. Как правило, таковой оказывается сложная задача, которая высоко оценивалась и жюри, а конъюнктурные соображения – голосование за задачу, которую участник смог решить, уходят на второй план. Красивым может оказаться и рассуждение, приводящее к решению задачи. Несмотря на сложность чёткого описания красоты применительно к математике, можно попытаться привести его. Красивыми считаются задачи (теоремы – «сложные задачи»), в которых сформулирован неожиданный факт, нередко носящий при этом достаточно общий характер, доказательство которого включает в себя не длинное рассуждение с большим числом выкладок или логических шагов, а достаточно короткое неожиданное – не встречавшееся ранее рассуждение.

Итак, проведенное исследование показывает, что предметно-математическое содержание олимпиад определяет эффективность работы с одаренными школьниками при соблюдении следующих условий:

- задания для каждой возрастной категории участников должны быть соотносимы с выполняемыми задачами по поиску, мотивации, отбору и профориентации:

задачи для учащихся 4-6 классов должны опираться на жизненный, либо читательский опыт ребенка, в условии оперировать понятными и известными объектами действительности, тем самым удивляющими и своей «нестандартностью» вовлекающими большую группу детей, кроме этого, доступными в решении 1-2 задач для большинства участников; олимпиада для этого возраста выполняет задачу привлечения к занятиям математикой, а именно – поиска и мотивации одаренных учащихся;

задачи для учащихся 7-8 классов должны опираться на сформированный понятийно-терминологический аппарат и элементы математической деятельности, свойственные базовым разделам математики, они должны обладать выраженной новизной (для участника) условия и решения; олимпиада для этого возраста, выполняя задачи поиска и мотивации, должна осуществлять отбор учащихся, способных к математическому творчеству;

задания для учащихся 9-11 классов должны включать задачи, требующие устойчивых навыков оперирования приобретёнными знаниями и умениями, и выявляющие способность к абстракции, к построению математической модели текстового задания; они должны обладать выраженной новизной (для участника) условия и решения; олимпиада для этого возраста, помимо отбора учащихся, способных к математическому творчеству, должна решать задачи их профориентации.

### **Выводы**

Подводя итог, выделим главное. Решение поставленной государством задачи подготовки квалифицированных кадров для развития современных высокотехнологичных отраслей, требует дальнейших шагов по модернизации не только высшей школы, но также нашего школьного образования, включая систему дополнительного образования. Внимание должно быть уделено разработке и внедрению системы поиска и профессиональной ориентации большой группы учащихся, способных к обучению в сильных университетах, готовящих специалистов в области математики и информационных технологий.

Для достижения этих целей предлагается новая учебно-организационная модель.

В качестве ведущей *технологической составляющей* модели предлагаются зарекомендовавшие себя математические олимпиады, в первую очередь всероссийская олимпиада школьников по математике, в силу её массовости на начальных этапах и высокого научного уровня на заключительных.

В качестве *субъектов* модели – специалистов, реализующих функционирование модели – не только лучшие педагоги систем общего и дополнительного образования, но и студенты, становившиеся победителями олимпиад.

В качестве *объектов* модели – большая группа школьников, потенциально обладающих способностями в области математики и информатики.

Ключевым звеном, как в формировании мотивации школьников, так и в выявлении их творческого потенциала является *содержание олимпиадных заданий*. Они должны обладать новизной, доступностью для участников олимпиады, эстетической привлекательностью, как условий задач, так и их решений.

### Список литературы

- Агаханов Н. Х., Марчукова О. Г., Подлипский О. К. О современных тенденциях в подготовке школьников к математическим олимпиадам // Вопросы образования. 2021 № 4. С. 266–284.
- Агаханов Н.Х., Подлипский О.К. Муниципальные олимпиады Московской области по математике. М.: МЦНМО, 2019.
- Агаханов Н.Х., Подлипский О.К. Муниципальный этап XLVII Всероссийской олимпиады школьников по математике в Московской области // Математика в школе. 2021. № 3. С. 6-16.
- Агаханов Н.Х., Подлипский О.К. О методах решения олимпиадных задач // Математика в школе. 2020. № 8 С. 11-24.
- Агаханов Н.Х., Подлипский О.К. Школьный этап XLVI Всероссийской олимпиады школьников по математике в Московской области // Математика в школе. 2020. № 4. С. 24-31.
- Богоявленская Д.Б., Шадриков В.Д., Бабаева Ю.Д., Брушлинский А.В. и др. Рабочая концепция одаренности. М., 2003 (2-е изд. расш. и перераб.). URL: <https://lib.ipran.ru/paper/20480094> (дата обращения: 03.03.2022).
- Васильев Н.Б., Егоров А.А. Задачи всесоюзных математических олимпиад. М.: Наука, 1988.
- Гальперин Г.А., Толпыго А.К. Московские математические олимпиады. М.: Просвещение, 1986.
- Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В. Ленинградские математические кружки. Киров, 1994.
- Дураков Б.К., Кравцова О.В., Майер В.Р., Подуфалов Н.Д., Семенова Д.В. О содержании школьного математического образования и тестировании остаточных знаний по математике // Педагогика. 2022. №5. С. 57-69.
- Колмогоров А.Н. Математика – наука и профессия. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит, 1988.
- Ладочкин М.В., Фоминова О.В. Особенности работы с одаренными детьми по математике в 7-8 классах основной школы // Учебный эксперимент в образовании. 2018. №3 (87). С. 44-50. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=35630359> (дата обращения: 15.03.2022)
- Медников Л.Э., Шаповалов А.В. Мир математики в задачах. МЦМНО, 2017.
- Пермякова М.Ю., Кириллова О.А. О некоторых особенностях подготовки, учащихся к олимпиадам по математике // Мир науки, культуры, образования. 2019. С.101-103.
- Пермякова М.Ю., Перфильева А.В. Олимпиады по математике как одна из форм внеурочной деятельности в рамках реализации государственных стандартов // Мир науки. Педагогика и психология. 2020. Т.8. №1.
- Сергеева Т.Ф., Мамий Д.К., Пронина Н.А. Сетевая проектная школа как модель организации проектной и исследовательской деятельности с математически одаренными учащимися // Научно-методический журнал «CONTINUUM. Математика.

- Информатика. Образование». Елец. 2021. № 4 (24). С. 60-67. URL: <https://continuum-journal.ru/media/docs/articles/2021/4/05.pdf> (дата обращения: 16.04.2022).
- Фомин Д.В., Кохась К.П. и др. Санкт-Петербургские математические олимпиады. 1961-1993. СПб.: Лань, 2007
- Шадрин В.Ю. Математическая одаренность школьника как социально-педагогический феномен // Успехи современного естествознания. 2008. № 2. С. 84-85. URL: <https://natural-sciences.ru/ru/article/view?id=9457> (дата обращения: 14.05.2022)
- Шеврин Л.Н. Об эстетичности математики // Известия Уральского государственного университета. 1995. № 4. С. 25-45.
- Agakhanov N.H., Marchukova O.G., Podlipskii O.K. (2021) O sovremennykh tendentsiyakh v podgotovke shkol'nikov k matematicheskim olimpiadam [On the Current Trends in Math Olympiad Training for School Students]. Voprosy obrazovaniya / Educational Studies Moscow, № 4, pp. 266-284. <https://doi.org/10.17323/1814-9545-2021-4-266-284>.

### ABOUT THE MODEL OF WORK WITH MATHEMATICALLY GIFTED SCHOOL STUDENTS

<b>Agakhanov N. Kh.</b> Dr. Sci. (Physics - Mathematics), associate professor nazar_ag@mail.ru Dolgoprudny	Moscow Institute of Physics and Technology
<b>Marchukova O. G.</b> Dr. Sci. (Pedagogy), associate professor vera-nadegda@bk.ru Tumen	Tumen State Institute for the Development of Regional Education

**Abstract.** In the context of the development of modern branches of science and production in our country, the training of highly qualified specialists in the field of information technology and mathematics becomes an urgent goal. It is necessary to improve the work on the search, professional orientation and training of young people with abilities in the field of mathematics, both in higher education and in the system of general education. The article highlights the current state of this work and reveals the need for its withdrawal beyond the framework of a general education school. The ways of development and modernization of the system of work with schoolchildren with mathematical abilities are proposed the role of the content of mathematical olympiads is considered not only in solving the issue of selecting gifted schoolchildren, but also in shaping the motivation of students to study mathematics and their initial career guidance. The need for changes is revealed: in the system of search and selection of students with abilities in the field of mathematics; as part of a group of teachers working with motivated and capable students; in the list of olympiads that solve the problem of identifying talented students; in formulating the goals of mathematical olympiads; in the development of the content of the olympiads adequately formulated goals. In order to implement these changes, new approaches to working with schoolchildren are proposed. An educational and organizational model for solving the problems of searching, motivating, selecting and vocational guidance for a wide group of students with abilities in the field of mathematics is described.

**Keywords:** mathematically gifted schoolchildren, mathematical abilities, mathematical olympiads, content of olympiad problems.

## References

- Agakhanov, N. H., Marchukova, O. G., Podlipskii, O. K. (2021). On the Current Trends in Math Olympiad Training for School Students. *Educational Studies Moscow*, 4, 266–284. <https://doi.org/10.17323/1814-9545-2021-4-266-284>. (In Russ).
- Agakhanov, N. Kh., Podlipsky, O. K. (2019). *Municipal'nye olimpiady Moskovskoj oblasti po matematike*. Moscow: MTSNMO. (In Russ).
- Agakhanov, N. Kh., Podlipsky, O., K. (2021). Municipal stage of the XLVII All-Russian Olympiad for Schoolchildren in Mathematics in the Moscow Region. *Mathematics at School*, 3, 6-16. (In Russ., abstract in Eng.)
- Agakhanov, N. Kh., Podlipsky, O. K. (2020). On methods for solving olympiad problems. *Mathematics at school*, 8, 11-24. (In Russ., abstract in Eng.)
- Agakhanov, N. Kh., Podlipsky, O. K. (2020). School stage of the XLVI All-Russian Olympiad for Schoolchildren in Mathematics in the Moscow Region. *Mathematics at School*, 4, 24-31. (In Russ., abstract in Eng.)
- Agakhanov, N. Kh., Marchukova, O. G., Podlipskii O. K. (2021). *O sovremennykh tendentsiyakh v podgotovke shkol'nikov k matematicheskim olimpiadam* [On the Current Trends in Math Olympiad Training for School Students]. *Voprosy obrazovaniya / Educational Studies*, 4, 266-284. <https://doi.org/10.17323/1814-9545-2021-4-266-284>. (In Russ).
- Bogoyavlenskaya, D. B., Shadrikov, V. D., Babaeva, Yu. D., Brushlinsky, A. V. etc. (2003). *Rabochaya koncepciya odarennosti* (2-e izd. rassh. i pererab.). Moscow. URL: <https://lib.ipran.ru/paper/20480094>. (In Russ).
- Durakov, B. K., Kravtsova, O. V., Mayer, V. R., Podufalov, N. D., Semenova, D. V. (2022). On the content of school mathematical education and testing of residual knowledge in mathematics, *Pedagogy*, 5, 57-69. (In Russ., abstract in Eng.)
- Fomin, D. V., Kokhas, K. P. et al. (2007). *Sankt-Peterburgskie matematicheskie olimpiady. 1961-1993*. Sankt- Petersburg: Lan. (In Russ).
- Galperin, G. A., Tolpygo, A. K. (1986). *Moskovskie matematicheskie olimpiady*. Moscow: Education. (In Russ).
- Genkin, S. A., Itenberg, I. V., Fomin, D. V. (1994). *Leningradskie matematicheskie kruzhenki*. Kirov. (In Russ).
- Kolmogorov, A. N. (1988). *Matematika – nauka i professiya*. Moscow: Science. (In Russ).
- Ladoshkin, M. V., Fominova, O. V. (2018). Peculiarities of work with gifted children in mathematics in grades 7-8 of basic school. *Educational experiment in education*, 3(87), 44-50. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=35630359>. (In Russ., abstract in Eng.)
- Mednikov, L. E., Shapovalov, A. V. (2017). *Mir matematiki v zadachah*. Moscow: MTSNMO. (In Russ).
- Permyakova, M. Yu., Kirillova, O. A. (2019). On some features of the preparation of students for olympiads in mathematics. *World of science, culture, education*, 101-103. (In Russ).
- Permyakova, M. Yu., Perfilieva, A. V. (2020). Olympiads in mathematics as one of the forms of extracurricular activities in the framework of the implementation of state standards, *World of Science. Pedagogy and psychology*, 8(1). (In Russ., abstract in Eng.)
- Sergeeva, T. F., Mamiy, D. K., Pronina, N. A. (2021). Network design school as a model for organizing design and research activities with mathematically gifted students. *CONTINUUM. Maths. Informatics. Education*, 4(24), 60-67. (In Russ., abstract in Eng.)
- Shadrin, V. Yu. (2008). Mathematical giftedness of a schoolchild as a socio-pedagogical phenomenon. *Successes of modern natural science*, 2, 84-85. (In Russ., abstract in Eng.)
- Shevrin, L. N. (1995). On the aesthetics of mathematics. *Proceedings of the Ural State University*, 4, 25-45. (In Russ., abstract in Eng.)
- Vasiliev, N. B., Egorov, A. A. (1988). *Zadachi vsesoyuznykh matematicheskikh olimpiad*. Moscow: Science. (In Russ).