

DOI: 10.24888/2500-1957-2022-2-31-41

УДК
372.851**ПРОБЛЕМА СИСТЕМАТИЧЕСКИХ ОШИБОК В ОСВОЕНИИ
ТЕМЫ «ПЛОЩАДЬ» ПО РЕЗУЛЬТАТАМ МОНИТОРИНГА
НА ПЛАТФОРМЕ «УЧИ.РУ»****Москаленко Ольга Борисовна**
методист
Olga.b.moskalenko@yandex.ru
г. Москва

Образовательная платформа «Учи.ру»

Аннотация. В начальной школе учащиеся знакомятся с рядом величин, одной из которых является площадь. В рамках этой темы изучаются способы сравнения и измерения площадей фигур, понятие квадратного сантиметра и другие единицы измерения площади, а также правило нахождения площади прямоугольника по известным длинам его сторон. В 2021-2022 учебном году задачи на тему «Площадь» были предложены ученикам 4 и 6 классов в рамках мониторинга на платформе «Учи.ру». Каждую из этих задач решали более 30 тысяч учащихся. Анализ результатов мониторинга, полученных на столь большой выборке, позволяет, во-первых, отличить систематические ошибки учащихся от случайных, а во-вторых, рассматривать в качестве основного фактора влияния методики изложения темы «Площадь» в учебниках для начальной школы. Это ставит проблему о выявлении тех дефектов методики обучения, которые привели к совершению учащимися систематических ошибок в задачах мониторинга. Цель данной работы состоит в том, чтобы выяснить, представлены ли в учебниках для начальной школы все составляющие, необходимые для успешного решения задач мониторинга, и если представлены, то в какой мере. В статье рассматриваются три УМК из Федерального перечня. В результате для каждого из них обоснована необходимость применения учителем дополнительных упражнений к тем, что представлены в учебнике, а также предложены источники, в которых содержатся недостающие упражнения. Кроме того, отмечена проблема недостатка часов на освоение этой темы и предложены изменения в планировании, которые позволили бы включить дополнительные задания для освоения темы «Площадь».

Ключевые слова: площадь фигуры, измерение площади, площадь прямоугольника, сравнение площадей, освоение способа действий, методика.

Благодарности: автор выражает благодарность профессору, д.ф.-м.н. Алексею Владиславовичу Боровских за консультации и ценные замечания при подготовке статьи, а также компании «Учи.ру» и лично Дарье Вячеславовне Островской и Марии Владимировне Ярошевич за содействие в получении и обработке данных мониторинга.

Введение

В школьном курсе математики ученики знакомятся с понятием площади в конце второго или в третьем классе в зависимости от программы. В дальнейшем, еще до начала курса геометрии, к теме «Площади» возвращаются по мере усложнения изучаемых арифметических операций и овладения действиями с буквенными выражениями. Вводятся различные единицы измерения площади, формулы для вычисления площадей прямоугольника и квадрата, способы нахождения площади треугольника.

МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ И ИНФОРМАТИКЕ В СИСТЕМЕ ОБЩЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

Методике изучения темы «Площадь» в начальной школе посвящено множество работ. В них можно найти как описание, так и анализ и существующих, и новых методик, а также содержания учебников. К сожалению, в большинстве этих работ авторы ориентируются не на реальные результаты освоения учащимися темы «Площадь», а на требования, перечисленные в стандартах (например, достижение предметных и метапредметных навыков, указанных в ФГОС НОО).

Однако, есть работы, в которых авторы соотносят предлагаемую методику с результатами учащихся. В частности, А.Д. Вещева и Н.С. Александрова (Вещева, 2021) приводят результаты эксперимента по применению материала «Магнитная математика» для решения задач по теме «Площадь» в 3 классе. В работе показано, что дети, которые работали с этим материалом, продемонстрировали более высокий уровень освоения умения находить площадь фигуры методом разбиения на равные мерки по сравнению с учащимися из контрольной группы.

Т.В. Захарова и Н.В. Басалаева (Захарова, 2019) приводят результаты эксперимента по внедрению системы разноуровневых заданий при изучении темы «площадь». В эксперименте приняли участие 124 ученика начальной школы. Значительный прогресс в освоении понятия «площадь» был зафиксирован у группы учеников, которые обучались с применением этой системы задач. Сами задачи или ссылки на них авторы в статье не приводят.

Не умаляя значения перечисленных экспериментальных результатов, отметим, что полученные данные не позволяют сделать вывод о том, какие пробелы остаются у младших школьников после изучения понятия «площадь», и почему они возникают. Такое понимание позволило бы учителю выбирать методику для того, чтобы ликвидировать эти пробелы.

В нашей работе использованы данные тестирования, проводимого на платформе «Учи.ру». Возможность получить данные не о десятках, а о десятках тысяч школьников позволяет зафиксировать не только статистику правильных или неправильных ответов, но обнаружить неправильные ответы, которые являются систематическими. Это ставит проблему выявления причин этих систематических ошибок: имея возможность отличить систематические неправильные ответы от случайных, мы можем реконструировать причины этих ошибок, порожденные дефектами методики обучения. Тем самым удастся получить результаты, ранее не выявлявшиеся ввиду малости выборки.

В частности, оказалось, что задачу о площади сложной фигуры решили 41% учащихся 4 класса и 27% учащихся 6 класса. Чем обусловлен такой низкий процент верных ответов? Какие пробелы остаются у учащихся после изучения темы «Площадь» и являются причинами выявленных типичных ошибок? Эти вопросы составляют проблему исследования, описанного в данной статье.

Методология исследования

Диагностика проходила в рамках мониторинга знаний по математике на платформе Учи.ру (URL: <http://www.uchi.ru/>) в 2021–2022 учебном году. Мониторинг проходил в формате компьютерного тестирования, рассчитанного на 20 минут. Тест содержал от 11 до 13 задач в зависимости от класса. В одной из задач для 4-го класса ученикам нужно было найти площадь фигуры, изображенной на рис. 1. Варианты ответов для этой задачи предложены не были, получившееся значение нужно было вписать самостоятельно.

Апробация заданий мониторинга проходила в формате видеосвязи: ученики видели задания на экране и озвучивали по нашей просьбе ход решения каждой задачи. Практически все ученики 4 класса, которые справлялись с задачей о площади сложной фигуры, ожидаемо выбирали один из двух способов решения. Первый заключался в том, чтобы найти искомую площадь как сумму площадей трех прямоугольников, составляющих исходную фигуру (рис. 2). Для второго способа сначала требовалось достроить данную фигуру до прямоугольника, затем найти площадь этого «большого» прямоугольника и вычесть из неё «лишнюю» площадь (рис. 3).

В ходе мониторинга этот вариант задачи решали более 30 000 четвероклассников. Несколько самых популярных ответов указаны на диаграмме (рис. 4).

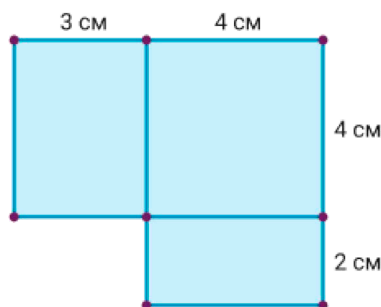


Рис. 1. Задача из мониторинга для 4 класса

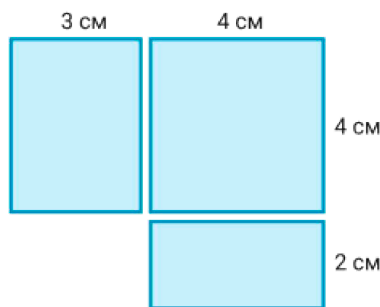


Рис. 2. Нахождение площади искомой фигуры как суммы площадей трех прямоугольников

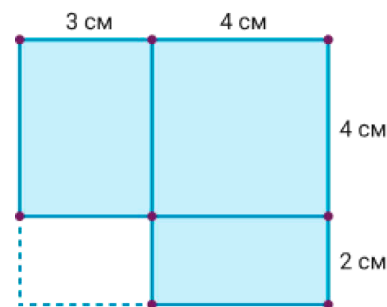


Рис. 3. Нахождение площади искомой фигуры как разности площадей двух прямоугольников

Рассмотрим каждый из них.

1. Ответ «36» верный, его дали около 41% учеников.
2. Ответ «13» – это самый популярный неправильный ответ (его дали 8% участников).
3. Следующий сектор по часовой стрелке соответствует 7,5% учеников, которые не вписали никакого ответа.
4. Ответ «42» дали 7,1% участников.
5. Ответ «26» встречался в 4,2% случаев.
6. Ответ «96» получился у 3,5% учеников.
7. Остальные ответы носили более случайный характер.

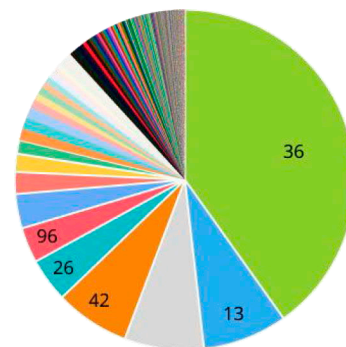


Рис. 4. Ответы учащихся 4 класса

Возникает вопрос: достаточно массовый (ведь даже 3-4% от 30 тысяч – это около тысячи человек) неверный ответ означает наличие системного дефекта в образовании. Его нельзя оправдать ни тем, что кто-то у кого-то списал, ни тем, что кто-то кому-то подсказал. С другой стороны, вряд ли представленные ответы для такой элементарной, с точки зрения взрослого, задачи можно найти в Интернете: там бывает искаженная информация, но очевидный для всех абсурд там «не выживает». Поэтому можно сделать вполне обоснованный вывод, что перед нами – собственные ответы учащихся, которые дали их, исходя из их собственных представлений о площади и решении геометрических задач.

Теперь нужно понять, исходя из каких соображений можно получить эти ответы. Варианты получения верного ответа уже перечислены выше, отсутствие ответа мы анализировать не будем, а вот реконструкция систематических неверных ответов дает достаточно интересные результаты.

Ответ «13». Такое число на самом деле получается, если сложить все числа, указанные на рисунке к задаче.

Ответ «42». Это значение соответствует площади «большого» прямоугольника (рис. 3).

Ответ «26». Такой ответ получится, если вычислить периметр предложенной фигуры.

Ответ «96». Это – произведение всех чисел, указанных на рисунке к задаче.

В аналогичном, но чуть более сложном тесте для 6-го класса нужно было найти площадь фигуры, показанной на рис. 5.

Несколько самых часто встречающихся ответов для этой задачи представлены на рис. 6. Диаграмма построена на основе ответов более 30 000 учеников. Рассмотрим каждый из ответов.

1. Ответ «27» верный, его дали 24% учеников.
2. Ответ «80» дан в 14% случаев. Такой ответ получается, если перемножить все числа, указанные на рисунке.
3. 13% учеников не дали никакого ответа.

МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ И ИНФОРМАТИКЕ В СИСТЕМЕ ОБЩЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

4. Ответ «14» получился у 7,5% учеников. Такое значение соответствует сумме всех чисел на рисунке.

5. Ответ «35» дан в 4% случаев. Это значение площади «большого» прямоугольника, включающего в себя исходную фигуру.

6. Ответ «28» дали 3,9% учеников, он соответствует периметру предложенной фигуры.

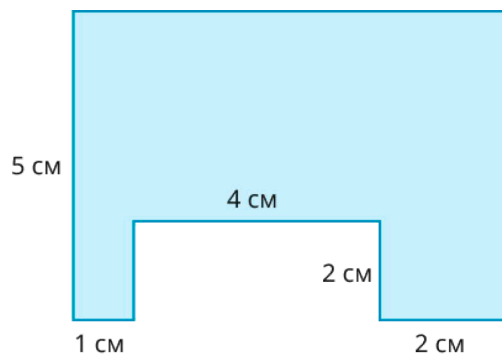


Рис. 5. Задача из мониторинга для 6 класса

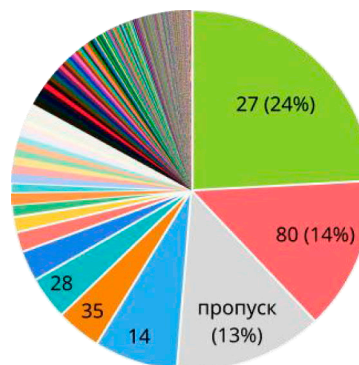


Рис. 6. Ответы учащихся 6 класса

Результаты анализа показывают, что самые частые неверные решения можно отнести к одному из трех типов:

- попытка выполнить одну из известных арифметических операций (сложение или умножение) со всеми числами, указанными на рисунке к задаче;
- нахождение периметра данной фигуры вместо площади;
- нахождение площади более простой фигуры.

Для решений 2 и 3 типа дети составляют арифметические операции, опираясь на чертеж к задаче. Они не просто выбирают некоторое действие с числами, а находят периметр или площадь фигуры, изображенной на рисунке, хоть это и не то, о чем спрашивается. Причем, если нахождение площади более простой фигуры – это упрощение задачи, то нахождение периметра заданной фигуры – это задача, сравнимая по трудности с исходной (как оказалось в результате опроса учителей, дети часто не осваивают различие периметра и площади, и просто путают эти два понятия, в нашем случае предпочитая периметр как более простую арифметическую операцию: сложение проще умножения).

К первому же типу относятся решения, в ходе которых не прослеживается связь арифметического действия и данного чертежа. И в 4-м, и в 6-м классе самыми частыми неправильными ответами были те, которые получаются именно таким способом.

Являются ли обнаруженные дефекты следствием «нерадивости» учащихся или они оказываются закономерным следствием методических ошибок при составлении учебников и программ? Опять же, достаточно большая статистика (тысячи человек) и устойчивость результата позволяет в качестве основной гипотезы считать вторую.

Опираясь на эту гипотезу, мы проанализировали, как изложена эта тема в учебниках для начальных классов из Федерального перечня и какие лакуны в них (или в соответствующих методиках) обеспечивают появление соответствующих ошибок.

Следует обратить внимание на то, что представленные задачи являются достаточно специализированными: в общей схеме решения задачи (чтение условия, выделение математических данных, составление схемы отношений между этими данными, формулировка по схеме математической задачи, ее решение, интерпретация результата на схеме и формулировка ответа, (Боровских, 2022) учащимся фактически остается только движение между схемой, представленной в виде чертежа и математической задачей. И данные, и отношения между ними уже представлены на чертеже, а выполнение арифметических операций не составляет труда.

Таким образом, единственная операция, которую должен совершить ученик – это по чертежу написать арифметическое выражение. Что же является необходимым для того, чтобы сделать это? Здесь имеется три составляющих:

а) владение понятием площади как величины (то есть то, что может быть больше или меньше, может сравниваться), характеризующей плоскую фигуру и не меняющейся при разрезании и перескладывании частей в другую фигуру;

б) понимание способа измерения площади фигуры как покрытие ее эталонными фигурами;

в) понимание отношения между длинами и площадями (на основании использования опять же эталонных фигур).

Итак, наш вопрос сфокусировался на том, отражено ли в учебниках и в методике освоение всех трех позиций а)-б)-в) и если отражено, то в какой мере?

В качестве основания для ответа на вопрос «в какой мере», взята типология осуществляемых учащимися образовательных действий, сформулированная Б.Д. Элькониным (Эльконин, 2020). Первый тип (результативное действие) характерен для ситуации, когда учащийся решает конкретно-практическую задачу, пытаясь воспроизвести результат по образцу и имея целью получить результат – ответ (желательно совпадающий с ответом в учебнике). Второй тип (учебное действие) появляется, когда акцент смещается с результата на способ действия, а учащийся переходит от вопроса «что сделать?» к вопросу «как сделать?». В рамках этого типа происходит освоение способа действия. Третий тип (игровое действие) связан с опробованием этого способа в решении разных задач (с достаточно широким спектром вариаций в формулировке задачи, в идеале – с нацеленностью на решение *любой* задачи соответствующего типа), и исследованием границ применения способа. Наконец, четвертый тип (продуктивное действие) «собирает вместе» предыдущие три, так что учащийся, как и в первом типе действия, получает результат, но не как попало, а, во-первых, определенным способом, а во-вторых, зная, что в данных условиях этот способ применим и гарантированно даст верное решение задачи.

Исходя из этой типологизации, мы и будем выявлять, где в освоении понятия площади как величины, измерения этой величины и установлении отношения между длиной и площадью авторы учебников и методик остановились на «результативном» действии, где предполагают «учебное действие», а где даже доходят до «игрового» или «продуктивного».

Результаты

Рассмотрен материал, представленный по теме «Площадь» в учебниках из трёх УМК: «Школа России» (Моро, 2021), «Начальная школа XXI века» (Рудницкая, 2021) и «Перспектива» (Дорофеев, 2019). Выбор этих учебников обоснован двумя соображениями. Во-первых, эти учебники включены в Федеральный перечень учебников (URL: <https://fpu.edu.ru/>), а во-вторых, 94% учеников четвертого класса, проходивших мониторинг на платформе «Учи.ру», отметили, что занимаются по одному из них.

Согласно методическим рекомендациям к УМК «Школа России» (Волкова, 2019) и «Перспектива» (Дорофеев, 2018), понятие площади нужно вводить как некоторое свойство объектов, по которому их можно сравнить между собой. Начинают с предметов, которые можно сравнить на глаз. Далее предлагаются фигуры, которые на глаз сравнить не получается, но можно сравнить наложением.

Способ наложения упоминается авторами лишь для того, чтобы ввести понятие площади и указать на узкие рамки применения этого способа, подводя учащихся к идее об измерении площади фигур разбиением на равные мерки. Сам этот способ *не становится* предметом освоения. В главах учебников (Моро, 2021; Дорофеев, 2019), посвященных теме «Площадь», *не предусмотрены* упражнения для того, чтобы дети могли опробовать этот способ в разных ситуациях и выяснить границы этого способа. Речь идет о задачах, в которых нужно модифицировать способ наложения, предварительно разрезав фигуры на части и перегруппировав их.

Стоит отметить, что задачи на разрезание фигур встречаются в учебниках время от времени, но в них *не требуется* сравнивать площади полученных фигур (хотя это – ещё

один способ сравнения площадей). Многие из таких заданий помечены как задачи повышенной сложности, что может ограничивать число тех, кто за них берется. Несколько задач на сравнение площадей фигур наложением с предварительной перегруппировкой их частей содержатся в последующих главах, относящихся к другим темам. Такие задачи регулярно встречаются в учебниках тех же УМК для более старших классов. В целом, такие задания способствуют развитию пространственного мышления, которое должно быть обеспечено, в соответствии с ФГОС начального общего образования, но *не обеспечивают* систематического подхода для освоения способа разрезания при изучении площади, а тем более – для определения границ этого способа.

Учащиеся, которые занимаются по программе «Начальная школа XXI века», согласно методическому пособию (Рудницкая, 2018) к этому УМК, начинают изучение площади сразу с понятия квадратного сантиметра (то есть освоение понятия площади как величины пропускается, а сразу начинается с измерения). На первом занятии в соответствии с текстом учебника (Рудницкая, 2021) дети знакомятся и с другими единицами площади. Для измерения площадей фигур применяется палетка. По программам же «Школа России» и «Перспектива» измерение площадей разбиением на равные мерки проходятся на втором уроке по теме «Площадь». Все учебники содержат задания, в которых нужно посчитать количество единичных квадратов в фигурах, уже разбитых на квадратные мерки, или выполнить такое разбиение самостоятельно. Некоторые фигуры требуется мысленно разрезать и перегруппировать для того, чтобы измерить площадь таким способом.

Если в «Школе России» и «Начальной школе XXI века» сразу рассматриваются квадратные мерки, то «Перспектива» содержит задачи, в которых нужно выбрать мерки подходящей формы из предложенных, вычислить площади фигур, используя разные мерки, и сравнить их количество. Решая такие задачи, дети, по задумке авторов учебника, обнаруживают, что при выборе разных мерок для фигур одинаковой площади, число этих мерок может быть разным. И наоборот, если количество мерок совпадает для двух фигур, это еще не означает, что площади фигур равны. Таким образом, как предполагается, достигается понимание зависимости числового значения площади от выбора единиц измерения и важности выбора одинаковых единиц измерения для сравнения площадей.

Столь быстрый переход на процедуру измерения площади, минуя формирование самого понятия площади, фактически формирует у учащихся один из главных ошибочных стереотипов, состоящий в том, что площадь – это арифметическая операция, а не геометрическое понятие. И, соответственно, когда они встречаются с задачей об определении площади, они думают (как мы видим) не о геометрическом объекте, а о том, «что на что здесь нужно умножить».

Но даже и в освоении процедуры измерения, как оказывается мы обнаруживаем явные пробелы. Так, в рассматриваемых учебниках *не уделяется* внимание задачам, в которых ученику нужно было бы самостоятельно выбрать мерку для фигуры, предварительно не разбитой на какие-либо мерки, или объяснить, какие мерки использовать можно, а какие нельзя. Такие упражнения позволили бы сделать вывод о том, что не любые мерки подходят, а есть ограничения в том, как можно производить разбиение: мерку можно использовать лишь тогда, когда она покрывает всю фигуру без наложений и зазоров. Ввиду отсутствия таких задач, *не происходит* ни сосредоточения на способе – то есть выражении площади через мерку, ни исследование границ способа разбиения фигур на равные мерки.

Далее дети знакомятся со способом вычисления площади прямоугольника через произведение длин его сторон. В задачах на эту тему требуется вычислить площадь прямоугольников по известным длинам его сторон.

В этих задачах дети начинают оперировать не количеством единичных квадратов, а длинами сторон прямоугольника. При этом в учебниках *не предложено* ситуаций для выяснения того, почему количество единичных квадратов, уместяющихся вдоль его стороны, совпадает с длиной этой стороны (квадраты укладываются вдоль всей стороны без зазоров и наложений). Если предварительно не были установлены свойства разбиения на равные мерки, то связь между количеством единичных квадратов вдоль одной стороны и ее длиной

будет не очевидной. Она может не осмысляться учащимися, а приниматься со слов учителя как данность.

Отметим ещё один момент: операция разбиения фигуры на элементарные квадраты является базовой операцией измерения и поэтому она должна быть доведена до уровня *умственного действия* (Гальперин, 1969), то есть учащийся должен научиться совершать её в уме. А для этого необходимо и определенное время, и специальные упражнения. Например, подошли бы упражнения, в которых сетка из единичных квадратов изображена не полностью и требует дополнения (рис. 7). Вообще без формирования умственных действий задачи, в которых требуются операции типа «достроить»/«отрезать» часть фигуры и т.п. оказываются нерешаемыми: ведь достроить или отрезать нужно сначала в уме, а потом уже на чертеже!

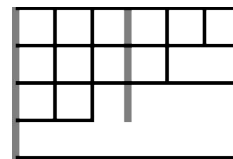


Рис. 7. Пример задания на дополнение сетки единичных квадратов

Следует отметить, что обнаруженные нами проблемы учащихся с вычислением площадей нестандартных фигур не являются новыми. Почти 40 лет назад все эти проблемы обсуждались в классической монографии М. Вертгеймера (Вертгеймер, 1987). В главе о «площади параллелограмма» автор обсуждает ситуацию, когда детям, выучившим доказательство формулы для площади параллелограмма (длина основания на высоту) предъявляют параллелограмм, «поставленный на бок», для которого формальное доказательство неприменимо. Он отмечает, что если ребенок применяет заученный прием к новой задаче, не понимая, что он в данном случае не уместен, то это говорит либо о непонимании самого приема, либо о неспособности выявить существенное различие между решаемой и первоначальной задачами.

Там же приводится пример рассуждений учащегося, который находится в процессе формирования такого понимания: «Длина фигуры повсюду одна и та же, и это должно быть связано с постепенным увеличением площади! Параллельные ряды малых квадратов прилегают друг к другу и взаимно равны; таким образом они заполняют всю фигуру. У меня есть совершенно одинаковые по длине ряды, которые вместе образуют целую фигуру». Далее происходит подсчет рядов единичных квадратов (а) и количества квадратов в каждом ряду (b). Уже имея представление о смысле операции умножения, ребенок сможет уяснить, что количество квадратов действительно можно вычислить как произведение ab . У некоторых детей такое понимание умножения ещё не сформировалось и формируется как раз в процессе решения подобных задач. Поэтому для них важно разобрать подробно, как происходит подсчет квадратов по рядам, отмечая функции каждого сомножителя. Отметим, что рассмотренные нами учебники *не содержат* заданий, направленных именно на установление функций сомножителей. Когда достигнуто понимание формулы для нахождения площади прямоугольника, у ученика появляется возможность увидеть, что эту формулу невозможно применить в неизменном виде (например, для нахождения площади на рис. 5, ведь формула эта получилась благодаря таким особенностям формы прямоугольника, каковыми новая фигура не обладает). Так у ребенка появляется структура решения, и он делает дальнейшие шаги не произвольно, а в соответствии с этой структурой.

Итак, для того, чтобы связь вычисления площади прямоугольника с операцией умножения оказалась *продуктивной*, то есть могла использоваться не только в знакомых, стереотипных ситуациях, но и в новых, ранее не встречавшихся (как, например, задача, предложенная на мониторинге или задачи PISA), необходимы упражнения, в которых учащиеся должны составлять из единичных квадратов ряды, а из рядов – фигуры, отмечая, сколько квадратов в каждом ряду и сколько всего рядов. В процессе такой деятельности дети будут опираться на понимание смысла операции умножения и её применимости в том или ином случае. Только добившись такого понимания, можно говорить о том, что представленный способ действия перешел в разряд продуктивного действия, а не остался заученной инструкцией. Именно продуктивность действия позволит детям модифицировать способ для того, чтобы находить площадь сложной фигуры, состоящей из нескольких прямоугольников.

Ответы на задачу мониторинга (рис. 5), которые получаются перемножением всех чисел на чертеже, свидетельствуют о том, что учащиеся применяют заученный метод (перемножение), но не понимают, какое структурное и функциональное значение имеют в этом произведении множители при вычислении площади прямоугольника. Нет понимания того, какое существенное свойство прямоугольника позволяет находить площадь с помощью перемножения.

Кроме того, для успешного решения задачи учащемуся нужны навыки деления целого на части и реорганизации этих частей. Требуется понимать, что при движении частей фигуры площади этих частей не меняются, также как не изменится и площадь всей фигуры после перегруппировки её частей. Поэтому на первых уроках изучения площади важно восполнять недостаток задач на разрезание и перегруппировку фигур, который наблюдается в рассмотренных УМК.

Таким образом, мы увидели, что объем упражнений для освоения каждого способа сравнения площадей разный в разных учебниках, но ни в одном учебнике он *не достаточен* для освоения изучаемых способов действий. Однообразие заданий и их ограниченное количество не дают возможности для того, чтобы опробовать новые способы и перевести их в разряд умственных действий. Работа по подбору такого материала для занятий остается фактически за учителем. При этом учитель сильно ограничен в количестве часов, отведенных на изучение темы «Площадь», и поэтому неясно, может ли он в таких условиях хоть как-то исправить ситуацию.

Обратим внимание ещё на один момент: опрос учителей показал, что результаты, полученные нами в результате анализа мониторинга, абсолютно адекватны. Учителя подтверждают, что дети такого типа задачи решать не могут, поскольку в программе освоению понятия площади отведено очень небольшое время, за которое невозможно не только освоить это понятие, но и даже научиться различать понятия «площадь» и «периметр», из-за чего дети эти понятия просто путают (что, как мы уже отмечали, объясняет еще две выявленных нами типичных ошибки: вычисление периметра вместо площади и сложение всех данных, имеющихся в условии задачи).

В процессе настройки мониторинга на платформе «Учи.ру» учителю необходимо было указать УМК, по которому учится класс. Попытка соотнести результаты мониторинга с указанным учителем УМК в четвертом классе показала следующие результаты: из тех учащихся, которые учатся по УМК «Школа России», с задачей на нахождении площади сложной фигуры справились 41%, а из учащихся по УМК «Учусь учиться» (Петерсон, 2021) — 60%. При этом количество учеников, которые занимаются по этим УМК, сильно отличается: учащихся по УМК «Школа России» было на 2 порядка больше, чем по УМК «Учусь учиться». Тем не менее, выборка остается существенной и для УМК «Учусь учиться» и составляет несколько тысяч учеников. Поэтому мы обратили внимание на некоторые особенности изложения темы «Площадь» в методических рекомендациях к учебнику по математике Л.Г. Петерсон (Петерсон, 2016) для 2 класса.

Как и в рассмотренных ранее учебниках, способ измерения площади подсчетом равных мерок вводится как альтернатива способу наложения тогда, когда наложение не дает результатов. При этом отдельно оговаривается необходимость создания проблемной ситуации для того, чтобы дети обосновали выбор квадратов (а не, например, овалов или кругов) в качестве подходящей мерки. Как и в учебнике Г.В. Дорофеева (Дорофеев, 2019), несколько задач направлены на то, чтобы установить связь: чем меньше мерка, тем больше раз она уложится в фигуре. Мерки при этом используются разной формы.

Отметим, что в отличие от других рассмотренных УМК, в учебнике Л.Г. Петерсон уроки на темы «Умножение», «Компоненты умножения», «Связь между компонентами умножения», непосредственно предшествуют теме «Площадь прямоугольника». Уяснив смысл сомножителей, дети переносят его на умножение при нахождении площади прямоугольника. При этом учащиеся ещё не знают таблицы умножения и вычисляют значение произведения суммированием одинаковых слагаемых. При нахождении площади прямоугольника эти слагаемые обозначают количество единичных квадратов в одной полосе или в одном столбце, а количество слагаемых соответствует количеству этих полос или

столбцов. Такой подход, по-видимому, в большей мере способствует тому, что у учащихся формируется, с одной стороны, понимание структурного отношения длины и площади, а с другой стороны, связь между операцией умножения и вычислением площади прямоугольника.

В дальнейшем учащиеся систематически возвращаются к решению задач о площади прямоугольника при изучении других тем, в частности, для выяснения смысла компонентов деления, применения переместительного свойства умножения и распределительного свойства умножения относительно сложения. При этом учащиеся имеют дело не только с прямоугольниками, но и с фигурами, состоящими из нескольких прямоугольников.

Заключение

В данной работе на основании анализа систематических ошибок учащихся и их причин выявлена необходимость включения дополнительных упражнений для освоения темы «Площадь» в начальных классах ввиду недостатка таких задач в учебниках.

Такие задания могут быть составлены учителями, могут содержаться в тех же учебниках, но в последующих параграфах, или могут быть заимствованы из других учебных пособий. Одним из ресурсов таких задач могут быть и образовательные платформы, в частности, «Учи.ру».

В качестве примера уже имеющегося пособия может выступать «Математика и конструирование» из УМК «Школа России» (Волкова, 2021). Пособие содержит разнообразные задания, способствующие расширению геометрических представлений, развитию пространственного мышления и воображения. В пособие включены как задания, в которых нужно произвести предметное действие (вырезать, разрезать, перегнуть), так и задания, в которых подобные действия нужно произвести в уме. В сборнике содержатся и более сложные задания, в частности, и нахождение площадей сложных фигур.

Ясно, что для включения дополнительных заданий на уроках требуется и дополнительное время. В среднем, на освоение способа сравнения площадей наложением, способа измерения площадей разбиением на равные мерки и способа измерения площади прямоугольника как произведения длин его сторон, суммарно отводится 4 часа. Можно предположить, что увеличение количества часов на эти темы или систематическое обращение к ним по мере расширения у учеников представлений о свойствах арифметических операций (как это реализовано в учебнике Л.Г. Петерсон) позволит учителю включить достаточный материал для того, чтобы перечисленные способы действий стали действительно освоенными, а сами действия перешли в разряд продуктивных.

Список литературы

- Боровских А.В. О понятии математической грамотности // Педагогика. 2022, Т. 86. № 3. С. 33-45.
- Вертгеймер М. Продуктивное мышление. М.: Прогресс, 1987.
- Вещева А.Д., Александрова Н.С. Формирование у третьеклассников умения находить площадь геометрических фигур (на примере «Магнитной математики») // Педагогика и психология в XXI веке: современное состояние и тенденции исследования: сборник материалов IX Всероссийской научно-практической конференции студентов, магистрантов, аспирантов, молодых педагогов, Киров, 22 апреля 2021 г. Киров: Межрегиональный центр инновационных технологий в образовании, 2021. С. 151-158.
- Волкова С.И. Математика и конструирование. 3 класс: учеб. пособие. М.: Просвещение, 2021.
- Волкова С.И., Степанова С.В., Бантова М.А., Бельтюкова Г.В. Математика. 3 класс. Методические рекомендации к учебнику М.И. Моро. ФГОС. М.: Просвещение, 2019.
- Гальперин П.Я. О методе поэтапного формирования умственных действий // Вопросы психологии. 1969. №1.
- Дорофеев Г.В., Бука Т.Б., Миракова Т.Н. Математика. 3 класс: учебник. В 2 частях. ФГОС. М.: Просвещение, 2019.
- Дорофеев Г.В., Миракова Т.Н. Математика. 3 класс. Методические рекомендации. Пособие для учителей. ФГОС. М.: Просвещение, 2018.

- Захарова Т.В., Басалаева Н.В. Из опыта работы учителя по формированию понятия величины «площадь» у младших школьников на уроках математики // Глобальный научный потенциал. 2019. №10. С. 62 – 64.
- Моро М.И., Бельтюкова Г.В., Бантова М.А., Волкова С.И. Математика. 3 класс. Учебник. В 2 частях. ФГОС. М.: Просвещение, 2021.
- Петерсон Л.Г. Математика. 2 класс: учебное пособие. В 3 частях. ФГОС. М.: Просвещение/Бином, 2021.
- Петерсон Л.Г. Математика. 2 класс. Методические рекомендации к учебному пособию. ФГОС. М.: Ювента, 2016.
- Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта начального общего образования [Электронный ресурс]: приказ Министерства просвещения России от 31 мая 2021 г. № 286. Доступ из справочно-правовой системы «Гарант.ру». URL: <https://www.garant.ru/products/ipo/prime/doc/400807193> (дата обращения: 18.02.2022).
- Рудницкая В.Н., Юдачева Т.В. Математика. 2 класс: учебник. В 2-х частях. ФГОС. М.: Вентана-Граф, 2021.
- Рудницкая В.Н., Юдачева Т.В. Математика. 2 класс: методическое пособие. Москва: Вентана-Граф, 2018.
- Учи.ру [Электронный ресурс]: интерактивная образовательная онлайн-платформа. URL : <https://uchi.ru/> (дата обращения: 18.02.2022)
- Федеральный перечень учебников [Электронный ресурс]: Министерство просвещения Российской Федерации. URL: <https://fpu.edu.ru/> (дата обращения: 18.02.2022).
- Эльконин Б.Д. Строение действия и периодизация Д.Б. Эльконина // Деятельностный подход в образовании: монография. Книга 3 / Составитель В.А. Львовский. М.: Некоммерческое партнерство «Авторский Клуб», 2020. С. 104-117.

**ANALYSIS OF MISTAKES MADE BY STUDENTS IN THE
PROBLEMS ASKING FOR AN AREA OF A COMPOSITE SHAPE
OFFERED DURING THE ASSESSMENT HELD ON THE ONLINE
LEARNING PLATFORM “UCHI.RU”**

Moskalenko O. B. | Online learning platform “Uchi.ru”
curriculum developer
Olga.b.moskalenko@yandex.ru
Moscow

Abstract. In the primary school, students are introduced to different measures, including area. They learn how to compare areas of two figures in different ways, how to measure areas by dividing figures in equal parts. A square centimeter is introduced as well as other units of area measurement. By the end of the 3d grade, students learn the rule of finding the area of a rectangle as a product of its sides' lengths. In 2021-2022 school year problems about the area of a compound figure were included in the assessment held on the educational platform “Uchi.ru”. More than 30 thousand students solved each of the problems. Analysis of the results of the assessment based on such a big number of answers allows us, firstly, to distinguish between the systematic and random mistakes, and secondly, consider the methodology underlying the textbooks' contents as the main factor influencing these results. This poses a problem of finding the disadvantages in the methodology that lead to the mistakes we observed during the diagnostics. The goal of this article is to find out whether all the concepts needed to solve the area problem included in the assessment are covered in the textbooks and to which extent. The article considers three teaching methodic

complexes recommended by the Ministry of Education of the Russian Federation. For each of them including of additional practice material is shown to be necessary for mastering all the methods taught within the “Area” topic. The lack of time devoted to this topic in the approximate curriculum plans is also admitted. In the conclusion, the resources for additional exercises are offered as well as the changes that can be made to the curriculum plan to enable teachers to include those exercises when teaching the area concept.

Keywords: area of a shape, area measurement, area of rectangle, comparison of the areas, mastering the method, methodology.

References

- Borovskikh, A. V. (2022). The Concept of Mathematical Literacy. *Pedagogika*, 86(3), 33-45. (In Russ., abstract in Eng.)
- Dorofeev, G. V. (2018). *Matematika. 3 klass. Metodicheskie rekomendatsii. Posobie dlya uchiteley. FGOS*. Moscow: Prosveshchenie. (In Russ.)
- Dorofeev, G. V. (2019). *Matematika. 3 klass. Uchebnik. V 2-kh chastyakh. FGOS*. Moscow: Prosveshchenie. (In Russ.)
- El'konin, B. D. (2020). Stroenie deystviya i periodizatsiya D.B. El'konina. *Deyatel'nostnyy podkhod v obrazovanii: Monografiya. Kniga 3* (pp. 104-117). Moscow: Nekommercheskoe partnerstvo «Avtorskiy Klub». (In Russ.)
- Federal'nyy perechen' uchebnikov. Retrieved from <https://fpu.edu.ru/> (In Russ.)
- Gal'perin, P. Ya. (1969). O metode poetapnogo formirovaniya umstvennykh deystviy. *Voprosy psihologii*, 1. (In Russ.)
- Interactive online learning platform “Uchi.ru”. (2012). Retrieved from <https://uchi.ru/> (In Russ.)
- Moro, M. I., Bel'tyukova, G. V., Bantova, M. A., Volkova, S. I. (2021). *Matematika. 3 klass. Uchebnik. V 2-kh chastyakh. FGOS*. Moscow: Prosveshchenie. (In Russ.)
- Peterson, L. G. (2016) *Matematika. 2 klass. Metodicheskie rekomendatsii k uchebnomu posobiyu*. Moscow: Yuventa. (In Russ.)
- Peterson, L. G. (2021) *Matematika. 2 klass. Uchebnoe posobie. V 3-kh chastyakh. FGOS*. Moscow: Prosveshchenie/Binom. (In Russ.)
- Prikaz Ministerstva prosveshcheniya Rossii ot 31 maya 2021 g. № 286. Ob utverzhdenii federal'nogo gosudarstvennogo obrazovatel'nogo standarta nachal'nogo obshchego obrazovaniya Retrieved from <https://www.garant.ru/products/ipo/prime/doc/400807193> (In Russ.)
- Rudnitskaya, V. N., Yudacheva, T. V. (2018). *2 klass. Metodicheskoe posobie*. Moscow: Ventana-Graf. (In Russ.)
- Rudnitskaya, V. N., Yudacheva, T. V. (2021) *Matematika. 2 klass. Uchebnik. V 2-kh chastyakh. FGOS*. Moscow: Ventana-Graf. (In Russ.)
- Veshcheva, A. D., Aleksandrova N. S. (2021). Formirovanie u tret'eklassnikov umeniya nakhodit' ploshchad' geometricheskikh figur (na primere «Magnitnoy matematiki»). *Sbornik materialov IX Vserossiyskoy nauchno-prakticheskoy konferentsii studentov, magistrantov, aspirantov, molodykh pedagogov* (pp. 151-158). Kirov: Mezhregional'nyy tsentr innovatsionnykh tekhnologiy v obrazovanii. (In Russ.)
- Volkova, S. I. (2019). *Matematika. 3 klass. Metodicheskie rekomendatsii k uchebniku M.I. Moro. FGOS*. Moscow: Prosveshchenie. (In Russ.)
- Volkova, S. I. (2021). *Matematika i konstruirovaniye. 3 klass. Uchebnoe posobie*. Moscow: Prosveshchenie. (In Russ.)
- Wertheimer, M. (1987). Productive thinking. Moscow: Progress. (In Russ.)
- Zakharova, T. V., Basalaeva N. V. (2019). From the Teachers’ Experience of Teaching the Concept of “Area” to Younger School Students in the Lessons of Mathematics. *Global Scientific Potential*, 10, 62 – 64. (In Russ., abstract in Eng.)