DOI: 10.24888/2500-1957-2023-4-46-54

УДК 372.851

ТЕХНОЛОГИЯ ОБУЧЕНИЯ ВЫЧИСЛЕНИЮ ПРОИЗВОДНЫХ СЛОЖНЫХ ФУНКЦИЙ

Ганичева Антонина Валериановна
к. ф.-м. н., доцент
tgan55@yandex.ru
г. Тверь
Тверская государственная сельскохозяйственная академия

Ганичев Алексей Валерианович
alexej.ganichev@yandex.ru
г. Тверь
Тверской государственный технический университет

Аннотация. Статья относится к предметной области информатизации технологий обучения. Разработан новый метод алгоритмизации процесса вычисления производных сложных функций. В результате рассмотрения характерных ошибок обучаемых при вычислении сложных производных сделан вывод о необходимости использования инновационной технологии обучения решению задач данного класса. Для вычисления производных сложных функций элементарные функции разбиты на два класса, различающихся применяемыми алгоритмами. Метод обучения вычислению производных сложных функций описан с помощью двух видов алгоритмов. Практическая реализация рассмотрена на конкретных примерах. Отдельно рассмотрен вопрос вычисления производной степенно-показательной функции, требующий применения алгоритмов обоих видов. Сформулированы основные ситуации, вызывающие трудности практической реализации классического метода. Рассмотрены преимущества предложенного метода по сравнению с классическим методом. Разработанный метод и алгоритмы можно использовать для вычисления производных сложных функций в рамках реализации данной цифровой технологии обучения на компьютерах.

Ключевые слова: алгоритм, символ, цепочка, аргумент, фрагмент, строки алгоритма, ошибки вычисления.

Введение

Одной из важнейших тем в курсе «Математика» является тема «Производная сложной функции». Эта тема, как отмечают авторы работы (Пинчук, 2015) имеет большое образовательное значение и является недостаточно разработанной в методическом плане, она формирует математическую грамотность обучающихся (Батолина, 2017). Тема «Производная сложной функции» является трудной в математическом образовании учащихся. Задача разработки новых методик освоения данной темы является актуальной. Новые подходы к обучению вычисления студентами производных сложных функций связаны с элементами формализации процесса вычисления сложных производных (таблицы, схемы). Дальнейшим развитием данных подходов является алгоритмизация вычислений.

Целью данной работы является разработка метода вычисления производных сложных функций путем алгоритмизации набора элементарных действий (мнемонических правил).

Для реализации поставленной цели следует решить следующие задачи:

1) разработать набор мнемонических правил вычисления;

2) разработать алгоритмы вычисления;

3) представить примеры реализации разработанного метода;

4) привести результаты практической реализации разработанного метода.

Обзор литературы

Данную тему автор статьи (Чуприна, 2017) считает ключевой и предлагает для ее усвоения студентами посредственного уровня подготовки новую методику, при которой результаты вычисления производной сложной функции оформляются в виде специальной таблицы. В работе (Алейникова, 2016) автором отмечаются трудности при изучении студентами темы «Производная сложной функции» и предложена методическая схема ее изучения. Методика обучения студентов нахождению производных сложных функций рассмотрена в статье (Махнев, 2015). В работах (Шабалина, 2023; Табачкова, 2014) для изучения производной сложной функции предлагается использовать кейс-технологии обучения и цифровые технологии (например, ситуационный анализ). Статья (Дмитриев, 2017) посвящена разработке программного продукта, который позволяет оперировать математическими выражениями в аналитической (символьной форме), вычислять производные и неопределенные интегралы элементарных функций. Для разъяснения техники дифференцирования сложной функции нескольких переменных в работе (Баранова, 2017) предлагается графическая схема, при помощи которой изображается зависимость исходной функции от ее конечных аргументов и разработаны простые правила, позволяющие по виду схемы составить общую формулу. В монографии (Евтушенко, 2013) изложен общий подход к дифференцированию сложных функций, возникающих в многошаговых процессах, и показано, что из найденных результатов следуют формулы быстрого автоматического дифференцирования.

Подход к разработке математического шаблона вычисления производных сложных функций рассмотрен в статье (Ганичева, 2023). Предлагаемая работа является дальнейшим продолжением изложенного подхода и доведения его до строго формализованных алгоритмов.

Основная часть

1. Метод обучения вычислению производных сложных функций

Сложная функция – это функция, аргумент которой тоже является функцией. Общий вид сложной функции:

$$y = f\left(u\left(v(\dots(w(x))\dots)\right)\right). \tag{1}$$

Здесь $u,\ v, \dots,\ w$ – промежуточные аргументы, x – основной аргумент.

Будем считать, что все рассматриваемые в данной статье функции дифференцируемы в области определения.

Нахождение производной сложной функции является для многих обучаемых достаточно сложной задачей и не вызывает у них положительных эмоций. Поэтому многие обучаемые допускают большое количество ошибок при ее решении. В частности, обучаемые плохо воспринимают сложные записи и интуитивно стараются их упростить. Так, для функции $\mathrm{y} = \sin(\cos(e^{2x+3}))$ записывается ошибочное значение производной в виде

$$y' = \sin x \cdot (-\cos x)\, e^x \cdot 2.$$

Разработанный в данной статье метод позволяет устранить подобные ошибки.

В данной работе предлагается алгоритмизировать процесс вычисления производных сложных функций с привлечением элементов игрового подхода для решения задачи. Такой подход стимулирует интерес обучаемых к освоению сложного материала.

При вычислении производных сложных функций можно все элементарные функции разбить на 2 класса.

В первый класс попадают функции:

$e^x,\ a^x, \sin x, \cos x,\ tgx,\ ctgx,\ scx,\ \csc x,\ \arcsin x,\ \arccos x,\ arctgx,\ arcctgx,\ log_a x,\ \ln x.$

Во второй класс отнесем степенную функцию x^n. Сначала рассмотрим метод для первого класса функций.

Алгоритм 1.

Каждое действие будем записывать в отдельную строку. В дальнейшем цепочкой будем называть последовательность символов.

1. В первой строчке записывается функция y; нумеруем (слева направо) обозначения внутренних функций.

2. Двигаемся по цепочке, представляющей запись функции y, слева направо. Встречаем обозначение функции y (строка 1 или 3 табл. 1). Будем называть это обозначение определяющим. Вычеркиваем его.

3. В следующей строке записываем первый фрагмент производной $y' = u_1$, ставим символ «$y' =$» и записываем символ функции согласно таблице 1:

Таблица 1. Символы функций

y	e	a	sin	cos	tg	ctg	sc
y'	e	a	cos	$-sin$	$\frac{1}{cos^2}$	$-\frac{1}{sin^2}$	$tguscu$
y	$arcsin$	$arccos$	$arctg$	$arcctg$	log_a	ln	csc
y'	$\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$	$\frac{1}{1+u^2}$	$-\frac{1}{1+u^2}$	$\frac{1}{u}$	$\frac{1}{u}$	$-ctgucscu$

Отметим, что процесс отыскания производной многошаговый, u_1 – фрагмент вычисления y' на первом шаге.

После знака функции в строке для u_1 записывается соответствующий аргумент функции y, т.е. вся цепочка из первой строки, следующая в y за определяющим обозначением.

4. При движении слева направо в этой строке перемножаются все константы, встретившиеся перед символами функций или перед x в первой строке.

5. При этом если верхняя цепочка

1) представляет собой показательную функцию с основанием «a», то после записанной во второй строке цепочки ставится цепочка lna;

2) аналогично для логарифмической функции по основанию «a» ставится цепочка $log_a e$;

3) для функций sc во второй строке записываются две функции tg и sc – обе с аргументом из верхней строки, представляющим собой цепочку, стоящую после символа sc;

4) для функции csc во второй строке записываются две функции – ctg и csc – с аргументом из верхней строки, представляющим собой цепочку, стоящую после символа csc.

6. Если после вычеркивания в правой части в записи y остается только $ax+b$, $a,\ b = const$, то к правой части приписывается произведение всех констант из п. 4 и переход на 9 (конец).

В противном случае вычеркивается символ самой левой невычеркнутой функции, который будет теперь определяющим, переход на 7.

7. Полагаем $k = k+1$, во второй строке слева будет $y' = u_k$. К записанной справа цепочке приписывается символ «·» (умножение). Затем записывается знак функции из таблицы согласно определяющему обозначению и цепочка из первой строки, следующая в y за данным определяющим обозначением или стоящая в показателе, если определяющее обозначение это e или a, или в знаменателе, если это ln или log_a. Переход к пункту 3.

8. Арифметическое преобразование ответа: знаки «–» и произведение констант ставятся вначале, четное количество знаков «–» их ликвидирует, при нечетном - остается один «–». При получении в ответе тригонометрических функций используются их преобразования согласно свойствам тригонометрических функций.

9. Конец вычисления производной.

Рассмотрим теперь этот метод для сложных функций, содержащих в качестве вспомогательных аргументов степенные функции.

Алгоритм 2.

1. Пункт 1 тот же, что и для первого класса.

2. Если при движении слева направо по цепочке, представляющей функцию *y*, после знака «=» стоит левая скобка, это указывает на то, что имеем степенную функцию $y = (v)^n$. На первом шаге будем записывать v как v_1.

Движемся до конца цепочки *y*, фиксируем значение *n* и работаем по формуле:

$$y' = u_1 = n \cdot (v_1)^{n-1}. \tag{2}$$

3. Далее анализируем цепочку v_1. Движемся слева направо по цепочке v_1. Здесь используются пп. 4 – 7 Алгоритма 1, но вместо *y* рассматривается v. из п. 2 Алгоритма 2.

Полученные цепочки умножаются на правую часть (2).

4. Если внутри v_1 перед знаком функции появятся левые скобки, то движемся слева направо по цепочке v_1 и ищем фрагмент типа $(w)^m$, содержащейся внутри *v*. Здесь имеется в виду, что *v*=*v*(*s*) и $s = (w)^m$. Обозначим w через v_2.

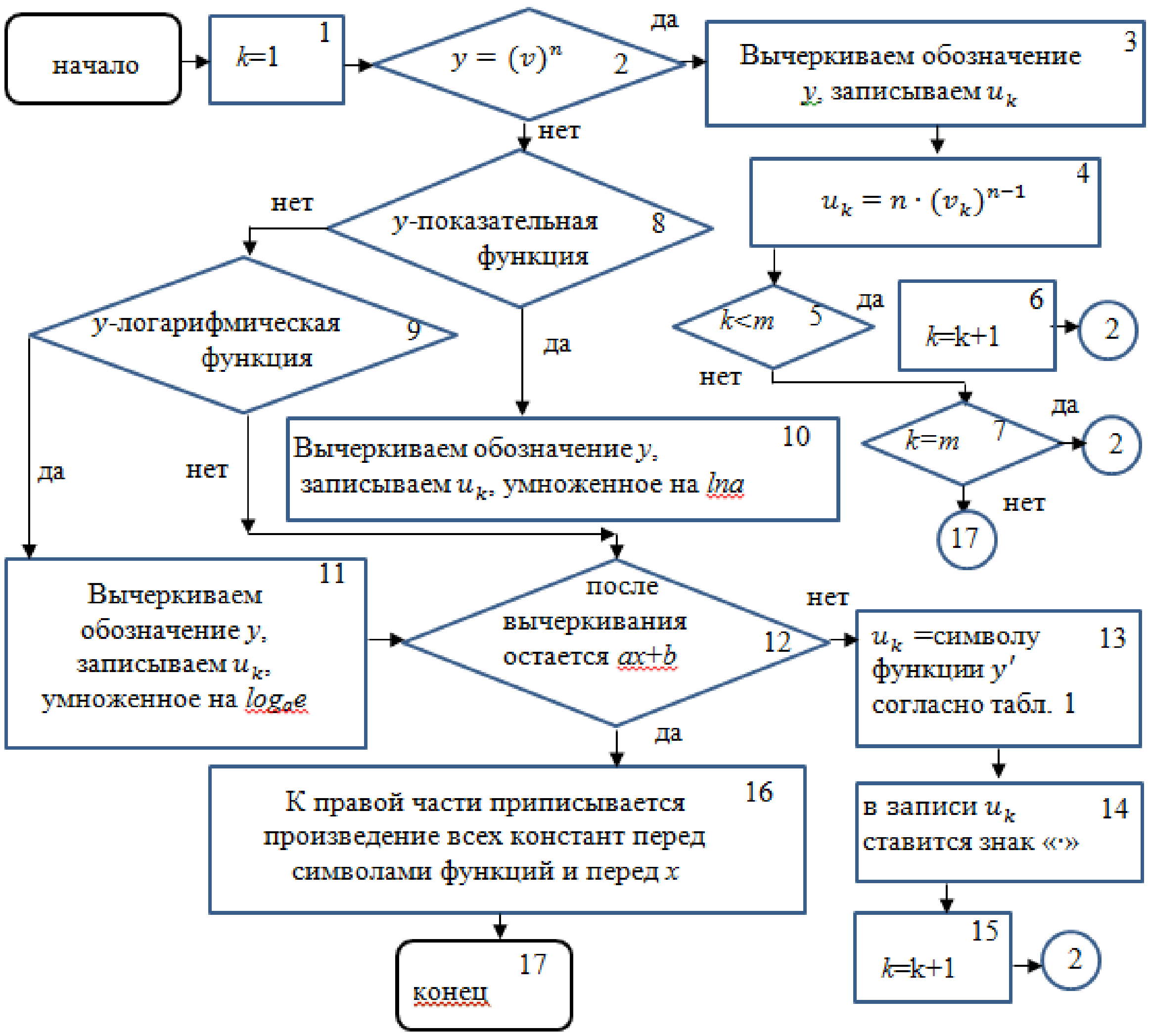

Рис. 1. Блок-схема обобщенного алгоритма

5. Умножаем y' на $m(v_2)^{m-1}$. Далее переходим к п. 3 Алгоритма 2, но вместо v_1 теперь рассматриваем цепочку v_2.

6. Конец вычислений определяется согласно п.6 Алгоритма 1.

Если аргументы функций, образующих сложную функцию, на данном шаге, в свою очередь, представляют собой произведение, сумму, разность, частное сложных функций, то в этом случае каждый из таких аргументов надо преобразовать согласно формулам производных суммы, разности, произведения и частного, соответственно. Затем к каждой из полученных функций применяются Алгоритмы 1 и 2.

При этом для упрощения выкладок случаи, когда аргумент равен произведению, сумме или сумме произведений функций рассматривать не будем.

Приведем блок-схему обобщенного алгоритма (рис. 1).

2. Примеры реализации разработанного метода

Практическую реализацию рассмотрим на конкретных примерах.

Пример 1 (рассмотрен в п. 1). Найти производную функции

$$y = sin(cos(e^{2x+3})).$$

В данном примере имеются только функции первого класса, поэтому используем Алгоритм 1. Запишем шаги алгоритма, полагая, что определяющие обозначения вычеркиваются.

1. $y = \sin(\cos(e^{2x+3}))$.
2. $y = \sin(\cos(e^{2x+3}))$.
3. $y' = u_1 = \cos(\cos(e^{2x+3}))$.
6. $y = \sin(\cos(e^{2x+3}))$.
7, 3. $y' = u_2 = \cos(\cos(e^{2x+3})) \cdot (-\sin(e^{2x+3}))$.
6. $y = \sin(\cos(e^{2x+3}))$.
7, 3. $y' = u_3 = \cos(\cos(e^{2x+3})) \cdot (-\sin(e^{2x+3})) \cdot e^{2x+3}$.
6. Константа 2 (стоит множителем перед *x*)
8. $y' = -2 \cdot \cos(\cos(e^{2x+3})) \cdot \sin(e^{2x+3}) \cdot e^{2x+3}$.
9. Конец.

Пример 2. Найти производную функции $y = (\sin(\ln(\cos(x^2+1))))^2$.

В данном примере имеются функции первого и второго класса, поэтому используем Алгоритмы 1 и 2.

1. $y = (\sin(\ln(\cos(x^2+1))))^2$ Алгоритм 2.
2. $y = (\sin(\ln(\cos(x^2+1))))^2$.
3. $y' = 2(\sin(\ln(\cos(x^2+1))))^{2-1} = 2(\sin(\ln(\cos(x^2+1))))$.
6. (Алгоритм 1) $v = 2\sin(\ln(\cos(x^2+1)))$.
7, 3. $v' = u_2 = 2\cos(\ln(\cos(x^2+1))) \cdot$
6. (Алгоритм 1) $v = 2\sin(\ln(\cos(x^2+1)))$.
7,3. $v' = u_3 = 2\cos(\ln(\cos(x^2+1))) \cdot \dfrac{1}{\cos(x^2+1)}$.
6. (Алгоритм 1) $v = 2\sin(\ln(\cos(x^2+1)))$.
7,3. $v' = u_4 = 2\cos(\ln(\cos(x^2+1))) \cdot \dfrac{1}{\cos(x^2+1)} \cdot (-\sin(x^2+1))$.
6. (Алгоритм 1) $v = 2\sin(\ln(\cos(x^2+1)))$.
7,3. $v' = u_5 = 2\cos(\ln(\cos(x^2+1))) \cdot \dfrac{1}{\cos(x^2+1)} \cdot (-\sin(x^2+1)) \cdot 2x$.
6,8. (Алгоритм 1) $y' = -2 \cdot 2\cos(\ln(\cos(x^2+1))) \cdot \dfrac{\sin(x^2+1)}{\cos(x^2+1)} \cdot x$,

$y' = -4 \cdot x \cdot \cos(\ln(\cos(x^2+1))) \cdot tg(x^2+1)$.

9. Конец вычисления производной.

3. Производная степенно-показательной функции

Это функция вида

$$y = v(x)^{r(x)},$$

где $v(x)$ и $r(x)$ - непрерывные функции и $v(x) > 0$. Тогда

$$y' = v(x)^{r(x)} \left[r'(x)v(x) + r(x) \cdot \frac{v'(x)}{v(x)} \right]. \tag{3}$$

Интересен случай, когда $v(x)$ и $r(x)$ являются сложными функциями. В этом случае к ним применяются Алгоритмы 1 и 2. После этого полученные выражения для $v'(x)$ и $r'(x)$ подставляются в формулу 3. Например, если $v(x)$ равна функции y из Примера 1, а $r(x) = x$, то имеем степенно-показательную функцию

$$y = v(x)^{r(x)} = (\sin(\cos(e^{2x+3})))^x.$$

К функции $u(x)$ применяем Алгоритм 1, $v'(x) = 1$.

Отсюда находим

$$y' = (\sin(\cos(e^{2x+3})))^x \cdot (\ln(\sin(\cos(e^{2x+3}))) - \\ - \frac{2x \cdot \cos(\cos(e^{2x+3})) \cdot (-\sin(e^{2x+3}) \cdot e^{2x+3})}{\sin(\cos(e^{2x+3}))}.$$

В данном случае выражение получается громоздкое. Учащиеся не должны бояться таких выражений. Потому что, в частности, такого рода выражения описывают окружающую действительность.

4. Результаты практической реализации разработанного метода

Исследования проводились в Тверской государственной сельскохозяйственной академии при изучении курса математики на инженерном, экономическом и технологическом факультетах для очной, заочной и очно-заочной форм обучения во время практических занятий, связанных с индивидуальной работой учащихся после объяснения и решения нескольких типовых задач у доски.

В качестве критериев усвоения учебного материала рассматривались общее количество сделанных ошибок в группе, процент усвоения и среднее время решения задач данной сложности. Под сложностью понимается количество внутренних функций.

Проведем статистические данные по результатам проверки работы студентов с использованием классического правила вычисления производных сложных функций (назовем его кратко КП) и предложенного авторами, использующего мнемонические правила, который назовем методом мнемонических правил (сокращенно ММП).

В табл. 2, 3 систематизированы для примера данные обучения по теме вычисления производных сложных функций группы инженеров дневного отделения (25 человек):

Таблица 2. Результаты усвоения темы

Сложность задачи	Общее количество ошибок КП	Процент усвоения КП	Общее количество ошибок ММП	Процент усвоения ММП
1	3	88	0	100
2	4	84	0	100
3	4	84	2	92
4	6	76	2	92
5	8	68	4	84

Таблица 3. Время решения задач

Сложность задачи	Среднее время решения КП (мин)	Среднее время решения ММП (мин)
1	1,5	0,3
2	2	0,4
3	6	1,1
4	10	1,5
5	15	3

Заключение

В статье разработан новый метод вычисления производных сложных функций. Его основу составляет алгоритмизация набора элементарных действий (мнемонических правил).

Основные результаты работы заключаются в следующем:

1) выделены два класса функций с точки зрения особенностей вычисления производных;

2) для каждого из вида функций разработаны алгоритмы вычисления производных сложных функций;

3) алгоритмы представлены в виде наборов мнемонических правил и блок-схемы;

4) показаны примеры вычисления производных сложных функций разработанным методом;

5) приведены результаты практической реализации разработанного метода.

Можно отметить следующие преимущества предложенного метода по сравнению с традиционным:

1) во время показа метода на доске с устным пояснением 50 % обучаемых усваивали метод сразу, 45 % - после повторного решения одного-двух подобных примеров;

2) метод алгоритмизирован.

Недостаток метода – при самостоятельном изучении метод трудно воспринимается по сравнению с разбором соответствующих примеров у доски с преподавателем.

Рассмотренные метод и алгоритмы его реализации можно использовать для машинного вычисления производных сложных функций. Разработанный в статье метод прошел успешную апробацию на студентах очного и заочного обучения в Тверской государственной сельскохозяйственной академии в течение 2021-2023 годов.

Список литературы

Алейникова Н.Ю. К вопросу об изучении темы «производная» в курсе алгебры и начал математического анализа // Вестник Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина. Сер. «Педагогика». 2016. № 37. С. 204-207.

Баранова Е.С., Попов А.М. Разъяснение техники дифференцирования сложной функции нескольких переменных // Системный анализ и аналитика. 2017. № 4 (5). С. 64-71.

Батолина Ю.В. Производная как фактор развития математической грамотности на уроках математики // Студенческая наука и XXI век. 2017. № 15. С. 204-205.

Ганичева А.В. Технология задачных конструкций для обучения математическим дисциплинам // Continuum. Математика. Информатика. Образование. 2023. №3. С. 69-77. DOI: 10.24888/2500-1957-2023-3-69-77.

Дмитриев В.М. Символьное вычисление неопределенных интегралов и производных элементарных функций // Гагаринские чтения: материалы XLIII Международной молодежной научной конференции. М: Изд-во МАИ, 2017. С. 716-717.

Евтушенко Ю.Г. Оптимизация и быстрое автоматическое дифференцирование: монография. М: Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН. 2013. 144 с.

Махнев А.С. Методика обучения студентов нахождению производных сложных функций // Преподавание математики, физики, информатики в вузах и школах: проблемы содержания, технологии и методики: материалы Всероссийской научно-практической конференции. Глазов: «Глазовская типография». 2015. С. 89-90.

Пинчук И.А., Тимошенкова Н.И. Методические рекомендации изучения производной в старших математических классах // Проблемы современной науки и образования. 2015. № 4 (34). С. 6-7.

Табачкова М.Ю., Борискина И.П. Интерактивные методы обучения в математике // Интеграция образования. 2014. Т. 18. № 3 (76). С. 65-70. DOI: 10.15507/Inted.076.018.201403.065.

Чуприна И.А. Методика преподавания производной сложной функции // Актуальные научные исследования в современном мире. 2017. № 11-14 (31). С. 52-55.

Шабалина М.Ф., Михайлов И.Р., Бабенко А.С. Изучение производных сложной функции с использованием кейс-технологии обучения и цифровых технологий // Белкинские чтения: материалы Всероссийской научно-методической конференции. Кострома: Изд-во Костромской ГУ, 2023. С. 49-52.

TECHNOLOGY OF LEARNING TO CALCULATE DERIVATIVES OF COMPLEX FUNCTIONS

Ganicheva A. V.
PhD (Physical and mathematical sciences), Associate Professor
tgan55@yandex.ru
Tver
Tver State Agricultural Academy

Ganichev A. V.
alexej.ganichev@yandex.ru
Tver
Tver State Technical University

Abstract. The article relates to the subject area of informatization of learning technologies. A new method of algorithmization of the calculation of derivatives of complex functions has been developed. As a result of the consideration of the characteristic errors of the trainees when calculating complex derivatives, the conclusion is made about the need to use innovative technology for teaching solving problems of this class. To calculate the derivatives of complex functions, elementary functions are divided into two classes, differing in the algorithms used. The method of teaching the calculation of derivatives of complex functions is described using two types of algorithms. Practical implementation is considered on concrete examples. The issue of calculating the derivative of a power-exponential function, which requires the use of algorithms of both types, is considered separately. The main situations causing difficulties in the practical implementation of the classical method are formulated. The advantages of the proposed method in comparison with the classical method are considered. The developed method and algorithms can be used to calculate derivatives of complex functions as part of the implementation of this digital learning technology on computers.

Keywords: algorithm, symbol, chain, argument, fragment, algorithm strings, calculation errors.

References

Aleynikova, N. Yu. (2016). On the question of studying the topic «derivative» in the course of algebra and the principles of mathematical analysis. *Bulletin of the Yelets State University named after I.A. Bunin*. Ser. «Pedagogy», 37, 204-207. (In Russ.)

Baranova, E. S., Popov, A. M. (2017). Explanation of the technique of differentiation of a complex function of several variables. *System analysis and analytics*, 4 (5), 64-71. (In Russ.)

Batolina, Yu. V. (2017). Derivative as a factor in the development of mathematical literacy in mathematics lessons. *Student Science and the XXI century*, 15, 204-205. (In Russ.)

Chuprina I. A. (2017). Methodology of teaching a derivative of a complex function. *Actual scientific research in the modern world*, 11-14 (31), 52-55. (In Russ.)

Dmitriev, V. M. (2017). Symbolic computation of indefinite integrals and derivatives of elementary functions. *Gagarin readings: Proceedings of the XLIII International Youth Scientific Conference.* Moscow: Publishing House of MAI, 716-717. (In Russ., abstract in Eng.)

Evtushenko Yu. G. (2013). Optimization and fast automatic differentiation: monograph. *M: Computing Center named after. A.A. Dorodnitsyn RAS*, 144. (In Russ.)

Ganicheva, A. V. Ganichev A. V. (2023). Technology of problem constructions for teaching mathematical disciplines. *Continuum Maths. Informatics*, 3, 69-77. DOI: 10.24888/2500-1957-2023-3-69-77. (In Russ., abstract in Eng.)

Makhnev A. S. (2015). Methods of teaching students to find derivatives of complex functions. *Teaching mathematics, physics, computer science in universities and schools: problems of content, technology and methodology: materials of the All-Russian scientific and practical conference*, Glazov: «Glazov Printing House», 89-90. (In Russ.)

Pinchuk I. A., Timoshenkova N. I. (2015). Methodological recommendations for studying the derivative in senior mathematics classes. *Problems of modern science and education*, 4 (34), 6-7. (In Russ., abstract in Eng.)

Shabalina M. F., Mikhailov I. R., Babenko A .S. (2023). Studying derivatives of a complex function using case-based learning technology and digital technologies. *Belkin readings: materials of the All-Russian Scientific and Methodological Conference. Kostroma: Publishing House of Kostroma State University*, 49-52. (In Russ.)

Tabachkova M. Yu., Boriskina I. P. (2014). Interactive teaching methods in mathematics. *Integration of education*, 18, 3 (76), 65-70. DOI: 10.15507/Inted.076.018.201403.065

Статья поступила в редакцию 29.11.2023
Принята к публикации 14.12.2023