

DOI: 10.24888/2500-1957-2024-1-18-33

УДК
372.851

**ПРОЯВЛЕНИЕ СИНЕРГИИ ИССЛЕДОВАНИЯ
МНОГОЭТАПНЫХ МАТЕМАТИКО-ИНФОРМАЦИОННЫХ
ЗАДАНИЙ НА ОСНОВЕ МЕТОДА ПАРАМЕТРИЗАЦИИ**

Смирнов Евгений Иванович
д.п.н., профессор;
старший научный сотрудник
smiei@mail.ru
г. Ярославль

Ярославский государственный педагогический университет им. К.Д. Ушинского
Южный математический институт – филиал Владикавказского научного центра РАН, Северо-Кавказский центр математических исследований ВЦ РАН

Уваров Артем Дмитриевич
к.ф.-м.н., доцент
smiei@mail.ru
г. Ярославль

Ярославский государственный педагогический университет им. К.Д. Ушинского

Тихомиров Сергей Александрович
к.ф.-м.н., доцент
satikhomirov@mail.ru
г. Ярославль

Ярославский государственный педагогический университет им. К.Д. Ушинского

Аннотация. В настоящей статье метод параметризации будет использоваться для исследования площади многогранной поверхности цилиндра Шварца. Применяется симбиоз математического и компьютерного моделирования как многофункциональный контрпример определения обобщённого конструкта сложного знания – понятия площади поверхности как «проблемной зоны» адаптации обобщённого конструкта для школьной математики. *Цель исследования* – построить технологию обучения математике в школе, ведущую к проявлению синергии в ходе освоения сложных систем и знаний методом параметризации компонентов обобщённого конструкта. *Методы исследования:* реализуются методы наглядного моделирования, фундирования опыта личности, методы параметризации компонентов обобщённого конструкта сложного знания, математическое и компьютерное моделирование, синергетический и личностно-деятельностный подходы. *Результаты:* построена модель содержания и структуры современной математики; метод параметризации охарактеризован как механизм выявления сущности обобщённых конструктов сложных систем и знаний; разработана структурно-функциональная модель освоения синергии математики на основе адаптации современных достижений в науке; впервые разработана и реализована технология обучения математике базисным методом параметризации в ходе изучения многогранной поверхности цилиндра Шварца.

Ключевые слова: обучение математике, метод параметризации, синергия исследовательских процессов, наглядное моделирование.

Введение

Перспектива решения проблем цифровизации российского школьного математического образования может быть связана с внедрением таких средств, как комплексы многоэтапных математико-информационных заданий, основанные на решении

вопросов адаптации сложных систем и знаний (в том числе, современных достижений в науке). При этом в условиях создания насыщенной и вариативной информационно-образовательной среды достижение эффективности и синергии обучения математике (в том числе – формирование математико-цифровой грамотности) в контексте парадигмы интеграции науки и образования способно актуализироваться в ходе поисковой и исследовательской деятельности каждого обучающегося. Таким образом, исследование обобщённых конструкторов сложного знания в контексте фундирования содержания школьной математики создаёт прецедент развития креативного мышления и учебной мотивации каждого обучающегося. Процесс освоения при этом сложных систем и знаний проецирует разные уровни актуализации форм, методов и средств полифункциональной и многоэтапной когнитивной деятельности обучающихся. *Проблема исследования:* как построить технологию обучения математике сложного знания и реализовать фактор параметризации обобщённых конструкторов сложных систем и знаний с эффектом проявления синергии в контексте множественного целеполагания и открытости цифровой образовательной среды. Решение данной проблемы реализуется развёртыванием многообразия проявления сущности обобщённого конструктора сложного знания методами математического и компьютерного моделирования и организации педагогического сопровождения роста креативного потенциала каждого обучающегося. Спектр освоения «проблемных зон» школьной математики возможно связать с ростом достижений и приложений математики к реальной жизни, наукам и технологиям. Такая парадигма способна дать мощный мотивационный заряд к изучению математических дисциплин, реально развивать интеллектуальные операции мышления каждого школьника в ходе освоения и адаптации этих новых достижений, опирающихся на методологию «вскрытия» сущности обобщённых конструкторов сложного знания и актуализацию эффектов понимания. В настоящем исследовании будет разработана технология адаптации обобщённых конструкторов сложного знания применительно к математико-информационному анализу понятия площади поверхности, связанной с цилиндром Шварца.

Методология, методы и материалы

Тенденция на развитие творческого потенциала каждого школьника становится необходимым атрибутом современного математического образования, особенно с расширением возможностей его цифровизации и нарастания актуальных потребностей современного нелинейного и вероятностного мира (Dvoryatkina, 2021; Dvoryatkina S., Smirnov E., 2021; Кашапов, 2021; Морен, 2007). Определённым фактором актуализации многообразия подходов и перспектив организации поисковой и исследовательской деятельности школьников является знакомство с современными движущими силами, тенденциями и динамикой развития математики как науки (Кузнецова, Напалков, Смирнов, Тихомиров, 2020) (рис. 1). Почти каждое школьное понятие, процедура или концепт (представленное, как правило, на наглядно-описательном уровне) фундируются обобщённым конструктором сложного математического знания, освоение которого и является базисом для эффекта понимания; тем самым определяются «проблемные зоны» школьной математики, если освоение их сопровождается ещё эмоциональным откликом на прикладной эффект, наглядно-цифровыми моделями сложного знания, диалогом культур в исследовании «проблемных зон», равно как и учётом личностных предпочтений и интересов школьников.

Педагогическая практика и наличие методологических и теоретических оснований показывают, что эффективность образовательных систем в современном математическом образовании всецело зависит от их открытости, явной динамики нелинейного развития, множественности целеполагания и вариативности содержательных конструкторов, насыщенности информационно-образовательной среды и создания условий актуализации мотивационных запросов обучающихся.

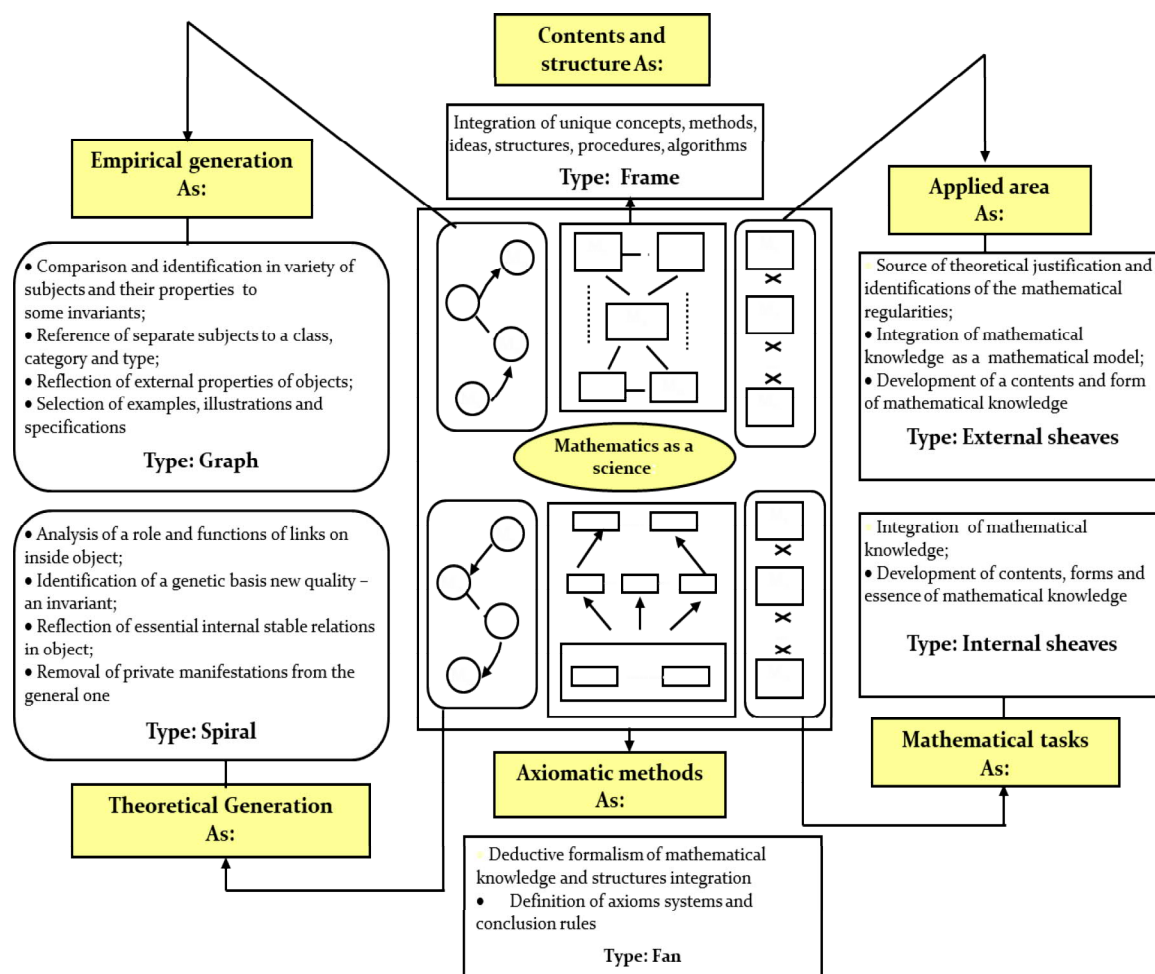


Рис. 1. Тенденции и движущие силы развития современной математики

Известный французский философ Э. Морен оперирует необходимостью серьёзной реформы мышления: «Реформа мышления представляет собой ключевую антропологическую и историческую проблему. Никогда в истории человечества ответственность за мышление и за культуру не имела такого решающего значения, как сегодня. Сложное мышление – это не замена простоты сложностью, а осуществление непрерывного диалогического движения между простым и сложным» (Морен, 2005). Близкие идеи высказывает немецкий учёный К. Майнцер, отмечая реальную возможность перехода от линейного мышления к мышлению нелинейному (Майнцер, 2009). Нелинейность порождает ситуации взрывного эффекта флуктуаций, когда система проходит через состояния неустойчивости и высокой энтропии, проявляя существенную зависимость от начальных условий: малые флуктуации способны породить разрушительные последствия.

Методология сложности в неравновесных системах постнеклассической рациональности базируется на следующих принципах:

- неравновесные системы способны производить порядок и уменьшать внутреннюю энтропию за счёт открытости и свободной энергии внешних систем (Пригожин, 2021);
- никакие внутренние процессы не могут снижать энтропию, но способны лишь увеличивать её. Отрицательная энтропия может попасть в систему только извне (второй закон термодинамики);
- связь симметрии и (топологической, структурной и конфигурационной) энтропии атомных систем имеет место: чем выше симметрия, тем ниже энтропия (Ю.Л. Войтеховский);

– синергетика утверждает, что развитие открытых и сильно неравновесных систем (а значит, «образовательных систем») протекает путём нарастающей сложности и упорядоченности (Haken, 1996).

Различные типы самоорганизации личности (образно-геометрический, знаково-символический, вербальный, конкретно-деятельностный, дигитальный) в процессе освоения сложных систем и знаний способны проявить синергию математического образования, актуализируя при этом внутренние атрибуты (механизмы) адаптации. Таким механизмом может стать запуск «фактор-импульса» самоорганизации личности процессами фундирования и наглядного моделирования в ходе освоения и адаптации сложного знания (Дворяткина, Смирнов, 2016):

– средствами актуализации обобщённых конструкторов сложного знания, фрактальных структур как содержательных зон бифуркации и целостности на все новых усложняющихся уровнях;

– средствами актуализации обобщённых правил и ценностей как аттракторов развития способностей и процессов понимания личности;

– диалога культур как средства развёртывания интегративных процессов, множественности целеполагания и когерентности способов поиска истины.

При этом нахождение «проблемных зон» в ходе освоения сложного математического знания включает механизмы самоадаптации личности и способствует переходу процессов развития в процессы саморазвития. Тогда эффект скачкообразного перехода на более высокие уровни освоения когнитивной деятельности обучающимися становится атрибутом процесса исследования нелинейных взаимодействий. Тем самым впервые намечается методологический переход от освоения обучающимися «зон ближайшего развития» Л.С. Выготского к актуализации «проблемных зон» самоорганизации и саморазвития. Таким образом, процессы выявления и исследования «проблемных зон» обучения математике сложного знания в ходе поисковой и исследовательской деятельности школьников позволяет интегрировать различные области наук, создаёт прецедент проявления синергии в процессе обучения математике.

Категория параметризации (метод, функциональная зависимость, моделирование, проектирование) используется в различных науках и технологиях: геометрия (Н.Ф. Четверухин, В.С. Полозов, Ю.Т. Лячек), САПР (С.Н. Абросимов, А.А. Лихачев, С. Weber (Vajna, Weber, Bley, Zeman, 2009)), теория графов, оптимальное управление, численные методы, компьютерные анимации, экономика, дидактика математики (Е.И. Смирнов (Абатурова, Смирнов, 2021), В.С. Секованов (Секованов, 2016)). Дефиниции подходов при этом существенно различаются. *Будем понимать под параметризацией математического объекта или процесса способ определения независимых параметров, их описание, связи и диапазон допустимых значений для выявления существенных связей и компонентов.* В математике это может быть параметризация геометрического чертежа, замена переменных в двойном интеграле, определение бифуркационных зон пространства решений уравнений и функциональных зависимостей и т.п. В настоящей статье метод параметризации будет использоваться для исследования площади многогранной поверхности цилиндра Шварца симбиозом математического и компьютерного моделирования как многофункциональный контрпример определения сложного знания – понятия площади поверхности как «проблемной зоны».

«Проблемная зона» математического образования – это ситуация актуализации и вскрытия противоречий и проблем когнитивной деятельности в области содержательных, процессуальных и личностно-адаптационных компонентов обучения математике, нацеленная на поиск и исследование сущностей её сложных учебных элементов.

Нами определён перечень *характеристик «проблемной зоны»* обучения математике:

– неадекватность построения общей конструкции и невозможность переноса связей и процедур в направлении от частного к общему;

МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ И ИНФОРМАТИКЕ В СИСТЕМЕ ОБЩЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

– необходимость множественности целеполагания и возможностей математического и компьютерного моделирования обобщённого конструкта сложного знания в контексте обозримости этапов адаптации обобщённой сущности;

– необходимость разнообразных поисковых проб с использованием информационных технологий (варьирование условий и параметров функционирования «проблемной зоны», экспериментальные срезы, сравнительный анализ конкретных проявлений, компьютерное моделирование и т.п.);

– стохастичность, множественность и фрагментарность результатов исследования «проблемной зоны»; характерность появления «побочных» продуктов.

При этом выявляются критерии проявления синергии «проблемных зон»:

– единство и многообразие связей обобщённого конструкта сложного знания; проявление прикладной и нелинейной составляющей проблемы;

– множественность целеполагания задач и исследовательских действий, непредсказуемости возможных результатов, выявление аттракторов и когерентность межпредметных связей, нахождение точек бифуркации и бассейнов притяжения;

– возможность наглядного моделирования и симбиоза математического и компьютерного моделирования на фоне выявления эвристических моментов и эстетической красоты математических действий;

– развёртывание математических конструктов в направлении вскрытия сущности явлений и процедур на основе возможности проявления эмерджентности новых связей и выявления механизмов самоорганизации;

– открытость цифровой образовательной среды с проявлением эффектов доступности и воспроизводимости математических структур на основе наглядного моделирования и фундирования опыта личности.

Таким образом, становление цифрового образовательного пространства в обучении математике в школе может быть основано на проектировании процессов исследования синергии сложных систем и знаний как в освоении содержания (метод параметризации), так и в росте креативного потенциала каждого обучающегося.

Результаты

Метод параметризации в обучении математике как способ адаптации сущности обобщённых конструктов сложных систем и знаний является важным компонентом создания предпосылок для переходов на более высокие ступени освоения учебного предмета. Это создаёт базу для интеграции и актуализации математического и компьютерного моделирования на основе множественности целеполагания, развёртывания этапов и иерархий в направлении фундирования опыта исследовательской деятельности обучающихся (Абатурова, Смирнов, 2021), выявления бифуркационных переходов и бассейнов притяжения в исследуемых процессах, педагогической поддержки ситуаций когерентности информационных потоков (в том числе, в условиях сетевого взаимодействия), поиска и анализа побочных решений с использованием информационных технологий. В работе (Осташков, Смирнов, Белоногова, 2016) выявлены и охарактеризованы этапы проявления синергии математического образования: подготовительный, содержательно-технологический, оценочно-коррекционный и обобщающе-преобразующий, а также корреляция с выявлением сущности (рис. 2):

Нам представляется следующая *последовательность введения инструментальных составляющих параметризации* в процесс освоения обобщённых конструктов сложного знания:

– диагностика личностных предпочтений и креативного потенциала обучающихся в способах и модальностях освоения и восприятия математического и информационного содержания процесса исследования обобщённого конструкта сложного знания;

– определение критериев отбора, объёма, структуры и содержания «проблемных зон» в освоении математики, обладающих потенциалом уровневой сложности и возможностями проявления синергии;

– публичное обсуждение и выявление закономерностей развёртывания депозитария образцов и примеров решения научных проблем (на эталонном и ситуативном уровнях) с проявлением синергии сложного знания; реализация симбиоза математического и компьютерного моделирования в цифровой образовательной среде; создание надситуационной активности школьников в освоении математики сложного знания (выявление и популяризация образцов творческого поведения и его результатов, стимулирование ситуации успеха; работа в малых группах и диалог культур; толерантность к неопределённости; готовность к дискуссиям и множественности решений проблемы);



Рис. 2. Граф согласования процессов проявления сущности учебного элемента и синергии обучения математике

– актуализация атрибутов и параметров проявления синергии в исследовательской деятельности с анализом и синтезом, учёт особенностей и построение этапов решения научной проблемы; множественность целеполагания и опыта решения микропроблем освоения обобщённых конструкторов сложного знания в режиме “warming up” и создание ситуаций эмоционального отклика на прикладной эффект (эмоциональное переживание, прогноз, рефлексия, наглядное моделирование, инсайт, верификация решения, перенос);

– когерентность взаимодействия и актуализации диалога культур и методов исследования «проблемной зоны» коррелирует с результатами проектирования этапности, параметризации и вариативности проявлений сущности обобщённых конструкторов сложного знания;

– постановка гипотезы, сбор и разнообразие форм и методов представления информации, выявление закономерностей, аналогий, ассоциаций, динамики исследуемых процессов, явлений и фактов; получение побочных продуктов, проверка адекватности и валидности решения сложных задач математико-информационными методами на основе освоения статистических пакетов и офисных редакторов, малых средств информатизации, систем Web-поддержки.

Ниже представлена *структурно-функциональная модель* адаптации обобщённых конструкторов сложного знания (современных достижений в науке) к освоению математики с синергетическим эффектом (рис. 3).

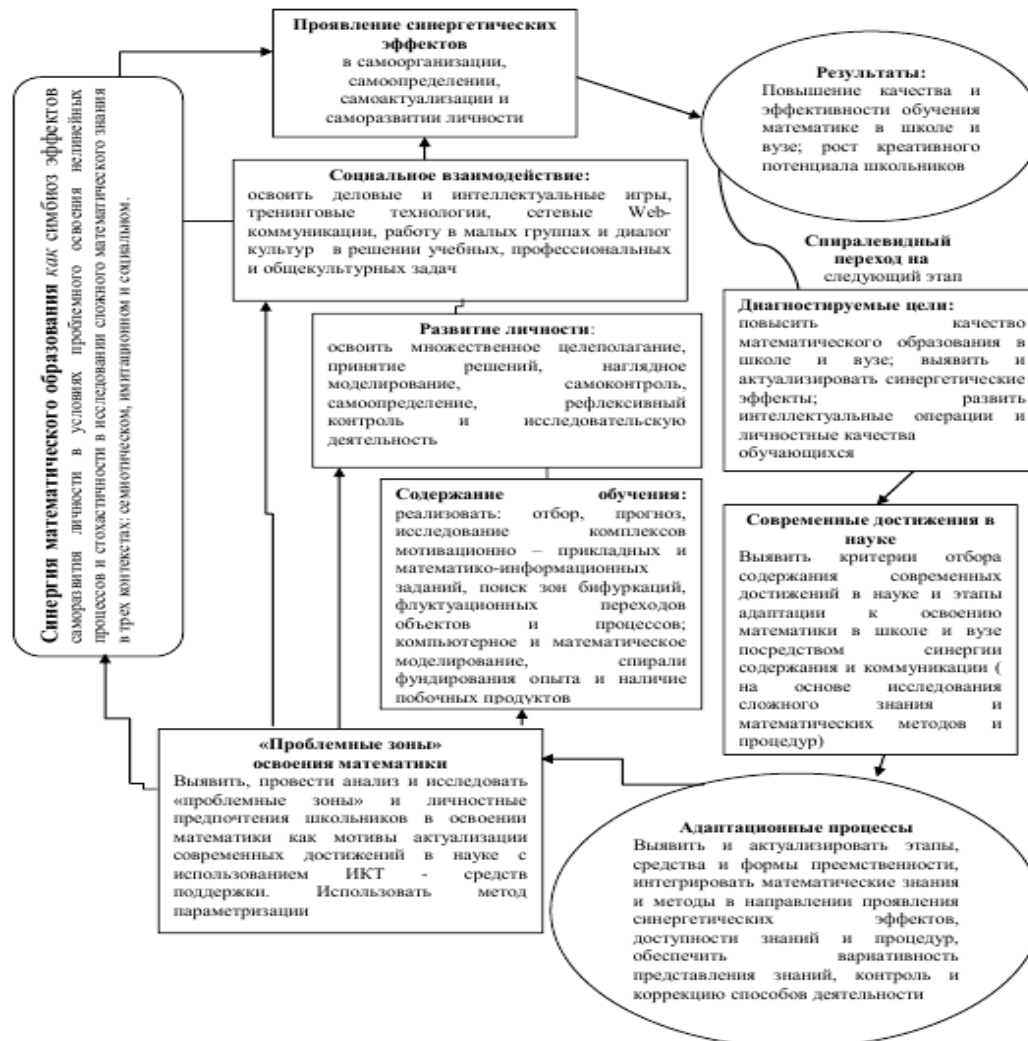


Рис. 3. Структурно-функциональная модель адаптации современных достижений в науке к освоению математики методом параметризации

Понятие площади поверхности является одним из важнейших в школьной геометрии. Однако, начиная с классического контрпримера Г. Шварца (о возможной бесконечности боковой многогранной поверхности цилиндра) (Schwarz, 1890) и замечаний Б. Мандельброта (о точке бифуркации упомянутой поверхности) (Мандельброт, 2002), проявление сущности базового понятия в его характеристиках не анализировалось в её полноте. Отметим также работы А.Г. Школьника (Школьник, 1936) и В.Н. Дубровского (Дубровский, 1978). Тем не менее только в работах Е.И. Смирнова и А.Д. Уварова (см., например, (Смирнов, Богун, Уваров, 2016)) удалось выявить математические закономерности и фрактальные характеристики поведения площадей многогранных поверхностей цилиндра Шварца. Пусть высота цилиндра разделена на m равных отрезков и в каждый слой вписан правильный n -угольник. Соответственно все нечётные слои повернуты на угол $\frac{\pi}{n}$ (рис. 4). Теперь ясно, что площадь этого цилиндра вычисляется по формуле,

$$S = 2\pi R \sqrt{R^2 \frac{\pi^4}{4} q^2 + H^2}, \quad (1)$$

где

$$q = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \frac{m}{n^2}. \quad (2)$$

Таким образом, площадь S цилиндра Шварца высоты H и радиуса R полностью определяется пределом (2) (рис. 4).

Применим *метод параметризации* рассматривая методологические (μ), содержательные (α) и процессуальные (β) параметры динамики изменения площади многогранной поверхности цилиндра Шварца, вскрывающие латентные существенные связи понятия площадь поверхности.



Рис. 4. Многогранная поверхность цилиндра Шварца

В качестве *методологических параметров* исследования определим: математическое моделирование (планиметрия и стереометрия, функции и графики, числовые и функциональные ряды, уравнения и неравенства, фрактальная геометрия и функциональный анализ) и компьютерное моделирование (компьютерные среды Qt Creator, GeoGebra, Maple, программирование (Python, Java, C# и др.).

Содержательные и процессуальные параметры

1. Параметр α_1 – углы при вершинах треугольников. Задача: какова динамика роста площади S при стремлении m и n к бесконечности в условиях, когда все грани многогранной поверхности цилиндра Шварца в предельном процессе остаются подобными треугольниками (или, что равносильно, углы при вершинах граней сохраняются)?

Рассмотрим часть слоя цилиндра Шварца радиуса $R = 1$ и высоты $H = 1$ (рис. 5).

Треугольник ABC со сторонами a, a, b . – это один из подобных экземпляров многогранной поверхности, причём угол $AOD = \frac{\pi}{n}$. Тогда получим:

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} b = \lim_{m,n \rightarrow \infty} 2 \frac{\pi}{n} \text{ на основе замечательного предела } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = 1.$$

При этом получим, что длина боковой стороны должна иметь вид:

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} a = \lim_{m,n \rightarrow \infty} \frac{q}{n}, \quad (3)$$

где q – вещественная константа. Найдём длину стороны AC в прямоугольном треугольнике ACE :

$$AC = \sqrt{AE^2 + CE^2}, \quad (4)$$

длину CE в прямоугольном треугольнике CDE (CD – высота цилиндра):

$$CE = \sqrt{CD^2 + ED^2}. \quad (5)$$

Тогда получим $ED = 1 - OE$, $OE = \cos \frac{\pi}{n}$ и $CD = \frac{1}{m}$.

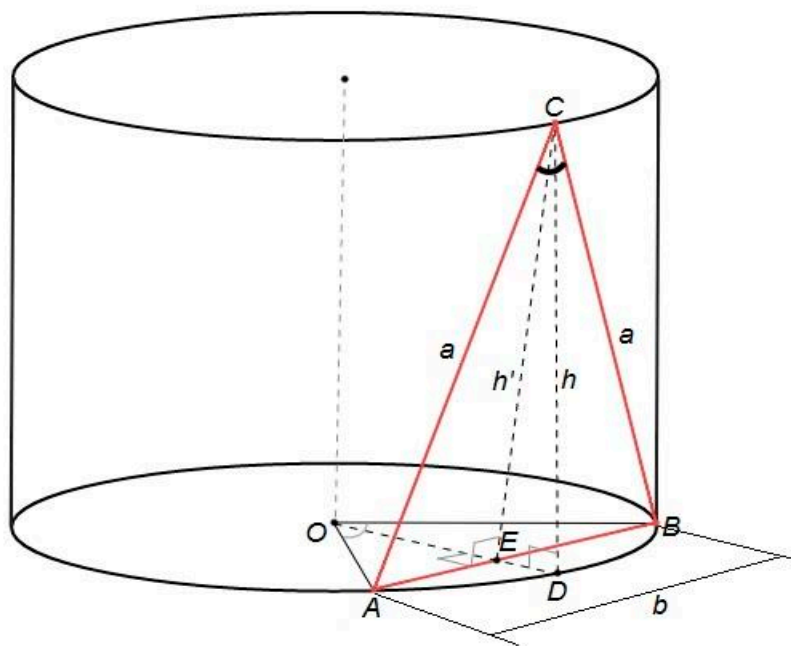


Рис. 5. Треугольник разбиения в многогранной поверхности цилиндра Шварца

В итоге имеем равенство

$$\alpha = \sqrt{\sin^2 \frac{\pi}{n} + \frac{1}{m^2} + (1 - \cos \frac{\pi}{n})^2}. \quad (6)$$

Последнее выражение с учётом соотношения (3) при $m, n \rightarrow \infty$ имеет вид:

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\pi^2}{n^2} + \frac{1}{m^2}} = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \frac{q}{n}. \quad (7)$$

Очевидно, что из формулы (7) следует равенство пределов

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} m^2 = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{q^2 - \pi^2}.$$

Окончательно имеем соотношение:

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} m = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \lambda \cdot n, \quad (8)$$

где $\lambda = \frac{1}{\sqrt{q^2 - \pi^2}}$.

Тогда площади S многогранных поверхностей цилиндра Шварца стремятся к площади исходного цилиндра так, что соотношения (8), (2) и (1) означают, что грани остаются подобными. При этом $q \in (\pi, +\infty)$. $q \in (\pi, +\infty)$ и для $q = \pi$ получаем вырожденный треугольник с развёрнутым углом при вершине ($m = \infty$).

2. Параметр α_2 – углы между гранями с общим основанием. Задача: при каких соотношениях между m и n при стремлении их к бесконечности углы между гранями с общим основанием в разных слоях остаются постоянными?

Рассмотрим два слоя цилиндра Шварца радиуса $R = 1$ и высоты $H = 1$ (рис. 6).

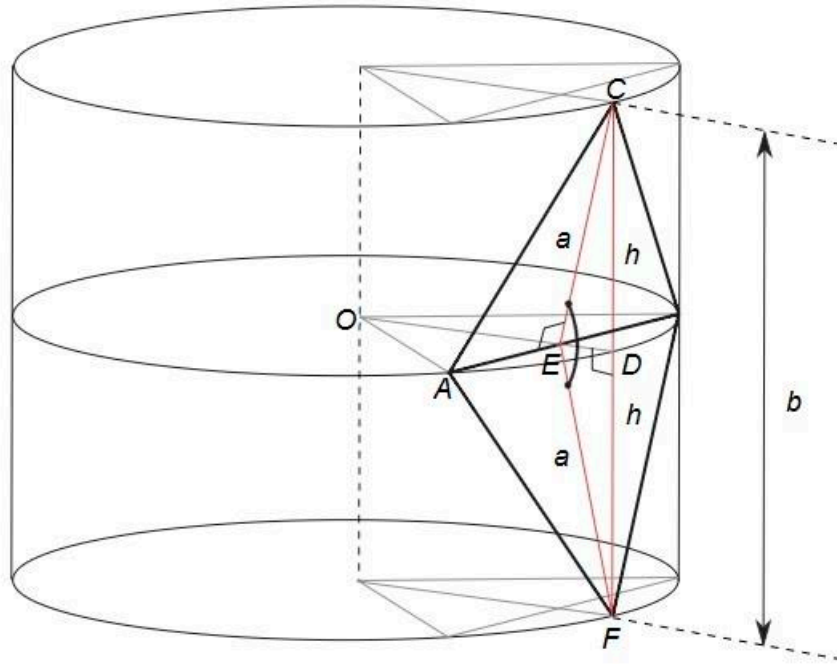


Рис. 6. Угол между треугольниками с общим основанием в разных слоях

Поскольку треугольники вида CEF – равнобедренные со сторонами a, a, b , то углы CEF остаются постоянными при $m, n \rightarrow \infty$, когда треугольники CEF будут подобными при $m, n \rightarrow \infty$.

При этом длина боковой стороны должна при этом условии иметь следующий вид (ввиду $b = 2h = \frac{2}{m}$, $b = 2h = \frac{2}{m}$):

$$a = \frac{c}{m}, \quad (9)$$

где c – некоторая фиксированная константа.

Тогда учитывая равенства $ED = 1 - OE$, $CD = \frac{1}{m}$ и формулы (5) и (9) имеем:

$$a = \sqrt{\frac{1}{m^2} + (1 - \cos \frac{\pi}{n})^2}. \quad (10)$$

Таким образом, формула (10) при $m, n \rightarrow \infty$ принимает вид:

$$c = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + 4m^2 \sin^4 \frac{\pi}{2n}} = \lim_{m, n \rightarrow \infty} ma. \quad (11)$$

Истинная площадь боковой поверхности получается, когда $c = 1$ и $0 = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \frac{m}{n^2}$.

Если же $q = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \frac{m}{n^2}$, то возможна ситуация, когда $c > 1$ и площадь многогранной боковой поверхности цилиндра Шварца может принимать все значения (в том числе ∞), превышающие значение площади реальной боковой поверхности цилиндра и соответствующие данному предельному значению угла между гранями.

3. Параметр β_1 – первая бифуркация при логистическом отображении (β_{11} – параметр изменения площади цилиндра Шварца; β_{12} – параметр изменения угла между гранями цилиндра Шварца). Задача: когда возникает первая бифуркация площадей многогранных поверхностей цилиндра Шварца (при каком значении угла между гранями с одинаковым основанием), если $m = f^n(a_0) \cdot n^2$ и $m, n \rightarrow \infty$, где $f(a_0) = \chi a_0(1 - a_0)$ –

логистическое отображение? Следующая таблица показывает, что $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(a_0) \cdot n^2 = \infty$. Расчёт проводится с использованием кросс платформенной среды Qt Creator.

Таблица 1

m	n
180896	600
215346	620
196380	640
239673	660
232351	680
274504	700
248544	720
301297	740
290238	760
340834	780
306844	800
369964	820
354557	840
414334	860
371282	880
445673	900
425307	920
495004	940
441856	960
528426	980

Эта таблица построена по следующим данным: $x = 3,56799$ и $600 \leq n \leq 980$. Из нее видно, что $m \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Рассмотрим теперь бифуркационную диаграмму на рис. 7 (практически повторяющую сценарий П. Ферхюльста).

На рис. 7 на правой вертикали имеем значения площади многогранной поверхности соответственно формуле (1), при этом диапазон для n от 500 до 1000, $0,7 \leq x \leq 3,9$ и $a_0 = 0,2$, при этом на левой вертикали имеем значения угла между гранями с общим основанием: $\alpha = 2 \cdot \arctg\left(\frac{1}{1 - \cos\frac{\pi}{n}} \cdot m\right)$.

Можно сделать следующие выводы:

А) при $x < 1$ угол α равен 180 градусам при $n \rightarrow 1000$, площадь многогранной поверхности равна 2π (площадь обычного цилиндра), однако цилиндр Шварца невозможно построить. Суть проблемы в том, что $m = 0$ при $x < 1$, и отображение $f(a_0) = xa_0(1 - a_0)$ имеет две неподвижные точки $a_0 = 0, a_0 = 1 - \frac{1}{x}$. Точка $a_0 = 0$ является устойчивой для $x < 1$, так как её мультипликатор $|f'(a_0)| = |x - 2xa_0| < 1$.

В) при $1 < x < 3$ точка $a_0 = 1 - \frac{1}{x}$ будет устойчивой неподвижной точкой и её мультипликатор $|2 - x| < 1$, так, что $m = \left(1 - \frac{1}{x}\right) \cdot n^2$ – монотонно возрастает на интервале (1;3). Соответственно имеем монотонное уменьшение угла α при росте S .

С) при $x > 3$ точка $a_0 = 1 - \frac{1}{x}$ возникает дихотомия. Поэтому в качестве первой бифуркации находим угол $\alpha = 33,8643^\circ$ для $m = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot n^2$, так что $S = 21,5936$.

Если $3 < x < 3,57$ позиционируется каскад бифуркаций удвоения периода.

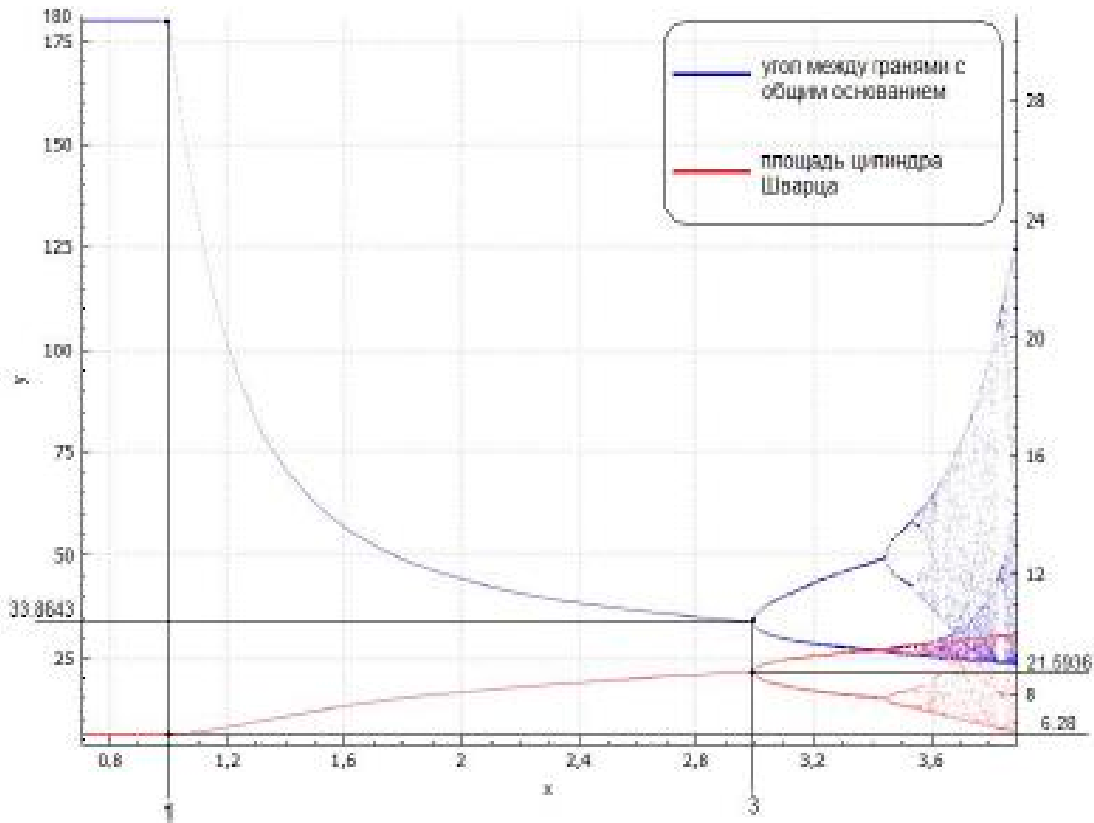


Рис. 7. Бифуркационная диаграмма динамики роста углов и площадей цилиндра Шварца

Задачи

Приведём список задач, решение которых в дальнейшем представляется перспективным для продолжения инновационных исследований в отношении цилиндра Шварца.

1. **Параметр α_3 .** Вывести формулу для нахождения площади нерегулярного цилиндра Шварца. Рассмотреть нерегулярный цилиндр Шварца, когда все нечётные слои повернуты на угол $\frac{\pi}{n} + \beta$, где $\beta = k \cdot \frac{\pi}{n}$ и $0 \leq k \leq 1$.

2. **Параметры β_{2i} ($i = 1, 2, \dots, n$); β_{3j} ($j = 1, 2, \dots, m$).** Рассмотрим многогранные поверхности цилиндра Шварца (рис. 8), когда k – число от нуля до единицы для каждого слоя. Тогда общая сумма параметров равна 1, а высота каждого слоя различная



Рис. 8. Нерегулярный цилиндр Шварца со случайными параметрами

3. **Процессуальный параметр β_4 .** Выявить закономерности роста площадей нерегулярного цилиндра Шварца по сравнению с ростом площадей регулярного цилиндра Шварца; рассмотреть позицию, когда $m = \lambda n^2$ и $\lambda \rightarrow \infty$. Используя информационные технологии, визуализировать сравнительный рост площадей многогранных поверхностей.

4. Процессуальный параметр β_5 Формулы (8) и (11) являются, соответственно, предельными формулами для равенства:

$$m = \frac{1}{\sqrt{q^2 \left(1 - \cos^2 \frac{\pi}{n}\right) + 2 \cos \frac{\pi}{n} - 2}} \quad (12)$$

и равенства

$$m = \frac{\sqrt{c^2 - 1}}{1 - \cos \frac{\pi}{n}}. \quad (13)$$

Поскольку $m \in N$, равенства (13) и (14) не могут выполняться для любых $n \in N$. Существует ли подпоследовательность последовательности натуральных чисел, для каждого члена которой равенства (12) и (13) выполняются?

5. Параметры α_{4j} , α_{5j} , α_{6j} ($j = 1, 2, \dots, m$). Построить математические и компьютерные модели для разбиения высоты цилиндра Шварца на слои в соответствии с формулами:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + m &= \frac{m(m+1)}{2}, \\ 1^2 + 2^2 + \dots + m^2 &= \frac{m(m^2+3m+2)}{6}, \\ 1 + 3 + 5 + \dots + (2m-1) &= m^2. \end{aligned}$$

6. Параметры α_7 . Рассмотреть случай, когда сдвиг по каждому слою n -угольника происходит на $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ градусов. Найти площади многогранных поверхностей и построить таблицы сравнения с регулярным случаем. Построить компьютерные модели.

7. Пусть в предыдущем случае $m = 1$ и $n \rightarrow \infty$. Найти при каждом значении параметров предельную линейчатую поверхность. Построить компьютерные модели и вывести уравнения поверхностей.

Заключение

Современный мир диктует лавинообразную востребованность современных математических достижений в науке, технике, технологиях и социальной жизни: достижений фрактальной геометрии (Б. Мандельброт, Р.М. Кроновер, К.Д. Falconer, М. Барнслоу и др.), теории хаоса и катастроф (А.Н. Колмогоров, В.И. Арнольд, Р. Том), теории кодирования и шифрования (К. Шеннон, Р. Хэмминг, Д. Хаффман, Л.С. Хилл и др.), нечёткие множества и fuzzy-logic (Л. Заде, А. Кофман и др.), теории обобщённых функций (Л. Шварц, Л.В. Соболев, И.М. Гельфанд и др.), теории клеточных автоматов (Дж. фон Нейман, Н. Винер, Дж. Конвей, П. Челмен и др.) и т.п. Адаптация этих обобщённых конструктов сложных систем и знаний к школьной математике становится настоятельной потребностью интеграции науки и образования. При этом возможен рост креативного потенциала каждого школьника в условиях высокой мотивации, учёта личностных предпочтений обучающегося и уровневой вариативности сложного знания в насыщенной цифровой образовательной среде. Одним из механизмов адаптации современных достижений в науке к школьной математике и запуска фактора импульса поисковой и исследовательской деятельности школьников может стать реализация метода параметризации обобщённых структур сложных систем и знаний.

Список литературы

- Абатурова В.С., Смирнов Е.И. Математическая грамотность как результат освоения обучающимися современных достижений в науке // Ярославский педагогический вестник. 2021. № 6. С. 29–37. DOI: 10.20323/1813-145X-2021-6-123-29-37
- Дворяткина С.Н., Смирнов Е.И. Оценка синергетических эффектов интеграции знаний и деятельности на основе компьютерного моделирования // Сборник научных трудов I

- Международной научной конференции «Конвергентные когнитивно-информационные технологии» и XI Международной научно-практической конференции «Современные информационные технологии и ИТ-образование». М.: МГУ, 2016. С. 35–42.
- Дубровский В.Н. В поисках определения площади поверхности // Квант. 1978. № 5. С. 31–34.
- Кашапов М.М. Функции экспликации в условиях профессионализации мышления // Вестник Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова. 2021. том 15. № 1. С. 100-109. DOI: 10.18255/1996-5648-2021-1-100-109
- Кузнецова И.В., Напалков С.В., Смирнов Е.И., Тихомиров С.А. Введение в проектную деятельность. Синергетический подход / под ред. Е.И. Смирнова. Саратов: Вузовское образование, 2020. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/92644.html> (дата обращения: 11.03.2024).
- Майнцер К. Сложносистемное мышление. Материя, разум, человечество. Новый синтез. М.: «Книжный дом «Либроком», 2009.
- Мандельброт Б.Б. Фрактальная геометрия природы. М.: Ин-т компьютерных исследований, 2002.
- Морен Э. Метод. Природа Природы. М.: Прогресс–Традиция, 2005.
- Морен Э. Образование в будущем: семь неотложных задач. В кн.: Синергетика образования. М.: Прогресс-Традиция. 2007. С. 24–96.
- Николис Г., Пригожин И. Познание сложного. М.: УРСС, 2021.
- Осташков В.Н., Смирнов Е.И., Белоногова Е.А. Синергия образования в исследовании аттракторов и бассейнов притяжения нелинейных отображений // Ярославский педагогический вестник. 2016. №6. С.146-155.
- Секованов В.С. Элементы теории дискретных динамических систем. Санкт-Петербург: Лань, 2016.
- Смирнов Е.И., Богун В.В., Уваров А.Д. Синергия математического образования: Введение в анализ. Ярославль: Канцлер, 2016.
- Школьник А.Г. Цилиндр Шварца. Сборник статей по элементарной и началам высшей математики // Математическое просвещение. Сер. 1. Вып. 7. 1936. С. 37–41.
- Dvoryatkina S., Khizhnyak A., Smirnov E., Shcherbatykh S., Zhuk L. Open Innovation Model of Student's Research Activities (Running title: Open Innovation Model). Journal of Teacher Education for Sustainability. 2021. Vol. 23. No. 2. P. 82–95. DOI: 0.2478/jtes-2021-0018.
- Dvoryatkina S., Smirnov E., Uvarov A. Manifestation Technology of non-linear Dynamics Synergetic Effects of Schwartz Cylinder's Areas. Communications in Computer and Information Science. 2021. Vol. 1204. P. 14-25.
- Haken H. Principles of Brain Functioning. A Synergetic Approach to Brain Activity. Behavior and Cognition. Berlin: Springer, 1996.
- Schwarz H.A. Sur une définition erronée de l'aire d'une surface courbe. Gesammelte Mathematische Abhandlungen. 1890. No. 1. P. 309–311.
- Vajna S., Weber C., Bley H., Zeman K. CAx für Ingenieure. Eine praxisbezogene Einführung. 2. Auflage. Berlin: Springer Berlin Heidelberg, 2009.

**THE MANIFESTATION OF SYNERGY IN THE STUDY OF
MULTI-STAGE MATHEMATICAL AND INFORMATION TASKS
BASED ON THE PARAMETERIZATION METHOD**

Smirnov E. I. Dr. Sci. (Pedagogy), professor, Senior Researcher smiei@mail.ru Yaroslavl;	Yaroslavl State Pedagogical University named after K.D. Ushinsky; Southern Mathematical Institute (branch) Vladikavkaz Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences; North Caucasus Center mathematical research VSC RAS
Uvarov A. D. PhD (Mathematics), associate professor smiei@mail.ru Yaroslavl	Yaroslavl State Pedagogical University named after K.D. Ushinsky
Tikhomirov S. A. PhD (Mathematics), associate professor satikhomirov@mail.ru Yaroslavl	Yaroslavl State Pedagogical University named after K.D. Ushinsky

Abstract. In this paper, the parametrization method will be used to study the area of the polyhedral surface of the Schwarz cylinder. The symbiosis of mathematical and computer modeling is used as a multifunctional counterexample for defining a generalized construct of complex knowledge – the concept of surface area as a "problem zone" for adapting a generalized construct for school mathematics. *The purpose of the study* is to build a technology for teaching mathematics at school, leading to the manifestation of synergy during the development of complex systems and knowledge by parameterizing the components of a generalized construct. *Research methods* – methods of visual modeling, foundation of personal experience, methods of parameterization of components of a generalized construct of complex knowledge, mathematical and computer modeling, synergetic and personal-activity approaches are implemented. *Results* – a model of the content and structure of modern mathematics is constructed; the parameterization method is characterized as a mechanism for identifying the essence of generalized constructs of complex systems and knowledge; a structural and functional model for mastering the synergy of mathematics based on the adaptation of modern achievements in science is developed; For the first time, the technology of teaching mathematics by the basic parameterization method was developed and implemented during the study of the polyhedral surface of the Schwarz cylinder.

Keywords: teaching mathematics, parameterization method, synergy of research processes, visual modeling.

References

- Abaturova, V. S., Smirnov, E. I. (2021). Mathematical literacy as an effect of student's mastering of modern achievements in science. *Yaroslavl Pedagogical Bulletin*, 6(123), 29–37. DOI: 10.20323/1813-145X-2021-6-123-29-37 (In Russ., abstract in Eng.)

- Dubrovskij, V. N. (1978). V poiskah opredeleniya ploshchadi poverhnosti. *Kvant*, 5, 31–34. (In Russ).
- Dvoryatkina, S. N., Smirnov, E. I. (2016). Ocenka sinergeticheskikh effektiv integracii znanij i deyatel'nosti na osnove komp'yuternogo modelirovaniya [Assessing the synergistic effects of integrating knowledge and activities based on computer modeling]. *Sbornik nauchnyh trudov I Mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii «Konvergentnye kognitivno-informacionnye tekhnologii» i XI Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoy konferencii «Sovremennye informacionnye tekhnologii i IT-obrazovanie»*. (pp. 35-42). Moscow:MGU. (In Russ).
- Dvoryatkina, S., Khizhnyak, A., Smirnov, E., Shcherbatykh, S., Zhuk, L. (2021). Open Innovation Model of Student's Research Activities (Running title: Open Innovation Model). *Journal of Teacher Education for Sustainability*, 23(2), 82–95. DOI: 0.2478/jtes-2021-0018.
- Dvoryatkina S., Smirnov E., Uvarov A. (2021). Manifestation Technology of non-linear Dynamics Synergetic Effects of Schwartz Cylinder's Areas. *Communications in Computer and Information Science*, 1204, 14-25.
- Haken, H. (1996). *Principles of Brain Functioning. A Synergetic Approach to Brain Activity. Behavior and Cognition*. Berlin: Springer.
- Kashapov, M. M. (2021). Funkcii eksplikacii v usloviyah professionalizacii myshleniya. *Vestnik Yaroslavskego gosudarstvennogo universiteta im. P.G. Demidova*, 15(1), 100-109. DOI: 10.18255/1996-5648-2021-1-100-109
- Kuznecova, I. V., Napalkov, S. V., Smirnov, E. I., Tihomirov, S. A. (2020). *Vvedenie v proektnuyu deyatel'nost'. Sinergeticheskij podhod*. Pod red. E.I. Smirnova. Saratov: Vuzovskoe obrazovanie. [Elektronnyj resurs]. Rezhim dostupa: <http://www.iprbookshop.ru/92644.html> (data obrashcheniya: 11.03.2024).
- Majncner, K. (2009). *Slozhnosistemnoe myshlenie. Materiya, razum, chelovechestvo. Novyj sintez*. Moscow: «Knizhnyj dom «Librokom». (In Russ).
- Mandel'brot, B. B. (2002). *Fraktal'naya geometriya prirody*. Moscow: Institut komp'yuternyh issledovanij. (In Russ).
- Moren, E. (2005). *Metod. Priroda Prirody*. Moscow: Progress–Tradiciya. (In Russ).
- Moren, E. (2007). *Obrazovanie v budushchem: sem' neotlozhnyh zadach*. Sinergetika obrazovaniya. Moscow: Progress-Tradiciya. Pp. 24–96. (In Russ).
- Nikolis, G., Prigozhin, I. (2021). *Poznanie slozhnogo*. Moscow: URSS. (In Russ).
- Ostashkov, V. N., Smirnov, E. I., Belonogova, E. A. (2016). Sinergiya obrazovaniya v issledovanii attraktorov i bassejnov prityazheniya nelinejnyh otobrazhenij. *Yaroslavskij pedagogicheskij vestnik*, 146-155. (In Russ).
- Schwarz, H. A. (1890). Sur une définition erronée de l'aire d'une surface courbe. *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*, 1, 309–311.
- Sekovanov, V. S. (2016). *Elementy teorii diskretnykh dinamicheskikh sistem*. Sankt-Peterburg: Lan'. (In Russ).
- Shkol'nik, A. G. (1936). Cilindr Shvarca. Sbornik statej po elementarnoj i nachalam vysshej matematiki. *Matematicheskoe prosveshchenie*, 1(7), 37–41. (In Russ).
- Smirnov, E. I., Bogun, V. V., Uvarov, A. D. (2016). *Sinergiya matematicheskogo obrazovaniya: Vvedenie v analiz*. Yaroslavl': Kancler. (In Russ).
- Vajna, S., Weber, C., Bley, H., Zeman, K. (2009). *Sax für Ingenieure. Eine praxisbezogene Einführung. 2. Auflage*. Berlin: Springer Berlin Heidelberg.

Статья поступила в редакцию 11.03.2024
Принята к публикации 18.03.2024