DOI: 10.24888/2500-1957-2024-1-59-75

УДК 378.147+519.21

НУЖНО ЛИ ИЗУЧАТЬ ФОРМУЛУ БАЙЕСА В КУРСЕ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ?

Спиридонов Михаил Яковлевич
к.ф.-м.н., доцент
avt428212@ mail.ru
г. Москва

Московский политехнический университет

Аннотация. Теория вероятностей, без всякого сомнения, является разделом математики, причём довольно обширным и активно развивающимся. Аксиоматическое построение теории вероятностей, отвечающее всем математическим канонам, было предложено А.Н. Колмогоровым ещё в 1933 году. Аксиоматика Колмогорова получила практически всеобщее признание, придала теории вероятностей стиль, принятый в современной математике, и тем самым вывела теорию вероятностей в разряд математических дисциплин. Теперь применение математических методов к решению вероятностных (как и других естественно-научных) задач должно осуществляться в два этапа: сначала строим математическую модель изучаемого явления (в аксиоматике Колмогорова, это вероятностное пространство), а затем действуем в рамках математической модели, строго придерживаясь математического формализма. Собственно, теория вероятностей как математическая наука начинается только после выбора вероятностного пространства. Однако и по сей день широко распространена традиционная (берущая начало из XVII–XIX вв.) методика обучения нахождению вероятностей событий, в которой описывать вероятностное пространство даже не предполагается, особенно в опытах с неравновероятными исходами. Поэтому в такой парадигме вынужденно приходится случайным событиям и операциям над ними давать только словесные (языковые, литературные) характеристики, а условные вероятности, присутствующие в теоремах умножения, в формулах полной вероятности и Байеса, определять на интуитивном (типа «здравого смысла») уровне в соответствии с содержательными представлениями о них. В математической теории вероятностей события и операции над ними трактуются на языке теории множеств: события – это подмножества пространства элементарных событий, операции над ними – это объединение, пересечение, дополнение множеств. Математическое определение условной вероятности требует её вычисления через вероятность произведения событий. Поэтому в математической науке теоремы умножения, формулы полной вероятности и Байеса оказываются невостребованными: в них так или иначе вероятность произведения событий выражается через условную вероятность, то есть, вопреки теории, всё поставлено «с ног на голову». Последнее и даёт однозначный ответ на вопрос, вынесенный в заглавие статьи. В данной работе для поиска вероятностей событий предлагается использовать метод последовательных испытаний, который полностью отвечает математическим основаниям теории вероятностей, удобен в изложении и восприятии (особенно если уложен в образную структуру ориентированного графа), приводит к уменьшению объёма используемых формул и обладает ещё рядом преимуществ по сравнению с традиционной методикой обучения.

Ключевые слова: теория вероятностей, математическая дисциплина, аксиоматика Колмогорова, конечное вероятностное пространство, математическая модель, вероятности событий, метод последовательных испытаний.

Введение

Изучение курса теории вероятностей как в средней, так и в высшей школе начинается с рассмотрения с**а**мого простого случая – задач, в которых случайные явления имеют конечное количество возможных элементарных исходов. Собственно, попытки применения математических методов к исследованию именно такого сорта задач (первоначально связанных, в основном, с азартными играми) способствовали возникновению теории вероятностей. В период её активного развития, с середины XVII в. по начало XX в., были введены некоторые фундаментальные понятия и установлены многие важные факты, относящиеся к случайным событиям и случайным величинам. Однако в этот период теория вероятностей не имела строгого математического оформления и рассматривалась большей частью как чисто эмпирическая наука, имеющая полуинтуитивное и неформальное обоснование. И только в 1933 году Андреем Николаевичем Колмогоровым в книге «Основные понятия теории вероятностей» (Колмогоров, 1974) было предложено аксиоматическое построение теории вероятностей, которое получило практически всеобщее признание и позволило охватить не только все классические разделы теории вероятностей, но и дать основу для развития её новых направлений, вызванных запросами естествознания. Благодаря аксиоматике Колмогорова теория вероятностей приобрела современный вид и окончательно стала восприниматься как один из разделов математики. (В других разделах математики – геометрия, математический анализ, теория множеств, математическая логика и др. – аксиоматический подход был принят раньше.)

В основе аксиоматики Колмогорова лежит понятие вероятностного пространства, которое призвано быть математической моделью (математическим описанием) изучаемого случайного явления. Строго говоря, теория вероятностей как математическая наука начинается только после выбора вероятностного пространства. С математической точки зрения, о событиях (как совокупностях элементарных исходов), об их вероятностях и связях между ними с помощью различных формул можно говорить только в рамках математической модели.

В средней школе при решении так называемых текстовых задач (например, на движение, на работу, на смеси или сплавы) в результате установления различных соотношений между заданными и искомыми величинами приходят, как правило, к системам уравнений и неравенств, которые решают, опираясь только на уже доказанные математические правила; эти полученные системы уравнений и неравенств и представляют собой математические модели рассматриваемых в задачах процессов. Казалось бы, точно так же надо действовать и при отыскании вероятностей событий: сначала, проанализировав условие задачи, построить (описать) отвечающее изучаемому случайному явлению вероятностное пространство (математическую модель явления), а уж затем оперировать вероятностными математическими методами и формулами.

Однако в широко распространённой сегодня реальной практике обучения нахождению вероятностей событий предпочитают по традиции, к сожалению, обходиться без подбора соответствующего вероятностного пространства, особенно в опытах с неравновероятными исходами. Аналогичная картина наблюдается и в известных руководствах по решению задач, например (Гмурман, 2005; Данко, 2003; Сборник задач, 2008). Здесь первые два издания даже рекомендовались министерством образования в качестве учебных пособий для студентов втузов. Подобная практика обучения несёт в себе существенные методические издержки, поскольку в этом случае теория вероятностей преподносится учащимся не как математическая дисциплина, а излагается «по старинке», фактически на языке XVII–XIX вв., обходясь эвристическими рассуждениями и манипулятивным использованием вероятностных формул, описывая случайные события лишь их словесными формулировками (а не в терминах теории множеств). Несовершенство таких методов обучения ярко (и не без доли сарказма) продемонстрировано в так называемом парадоксе Мизеса (Тутубалин, 1972, замечания к § 1). Спортсмен будет участвовать в каком-то из двух одновременно проходящих турнирах; в одном турнире он станет победителем (событие A) с вероятностью $0{,}9$, а в другом победит (событие B) с вероятностью $0{,}6$. События A и B, очевидно, несовместны. А так как вероятность суммы несовместных событий равна сумме их вероятностей (кто бы в этом посомневался?), то вероятность того, что спортсмен окажется победителем (событие $A+B$), получится равной $0{,}9+0{,}6=1{,}5$. И что может запретить подобное рассуждение, если события вводить, не описывая элементарных исходов опыта, а о вероятности говорить, не строя вероятностного пространства?

Дело доходит даже до того, что в ряде учебных курсов буквально отторгаются точные математические определения. Так, в математической (построенной на аксиоматике Колмогорова) теории вероятностей условная вероятность $\mathrm{P}(A|B)$ события A при условии (наступления) события B, $\mathrm{P}(B)\neq 0$, определяется формулой

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cdot B)}{\mathrm{P}(B)}, \tag{1}$$

а независимыми называются такие события A и B, для которых выполняется равенство

$$\mathrm{P}(AB)=\mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B). \tag{2}$$

Определения в математике (да и в любой другой науке) вводятся, как известно, для того, чтобы с их помощью что-то определять – выделять тот или иной объект из некоторой совокупности, проверять то или иное свойство, вычислять тот или иной параметр и т.д. Стало быть, подсчёт условной вероятности должен производиться по формуле (1), а независимость событий должна устанавливаться только на основе определения (2). Тем не менее в некоторых рекомендовавшихся министерством образования для использования в учебном процессе пособиях читаем буквально следующее: «На практике о независимости событий заключают по смыслу задачи» (Гмурман, 2004, глава третья, § 4); «В практических вопросах для определения независимости данных событий редко обращаются к проверке выполнения для них равенства (2). Обычно для этого пользуются интуитивными соображениями, основанными на опыте» (Гнеденко, 2011, § 7); «Однако в применениях мы часто условную вероятность $\mathrm{P}(A|B)$ будем вычислять исходя не из формулы (1), а из каких-либо других соображений» (Севастьянов, 2019, § 6); «Обычно независимость A и B, которую иногда называют теоретико-вероятностной, или статистической, независимостью (в отличие от причинной независимости реальных явлений), не устанавливается с помощью равенства (2), а постулируется на основе каких-либо внешних соображений» (Севастьянов, 2019, § 9).

В математической науке призыв обосновывать утверждения ссылками на интуицию или «внешние соображения» смотрится довольно странным. Кроме того, такого сорта аргументы крайне ненадёжны. Действительно, попробуйте, основываясь лишь на физической интуиции, определить, будут ли зависимы или независимы события $A=$ «вынута пика (карта пиковой масти)» и $B=$ «вынута дама» при извлечении наугад одной карты из колоды (Розанов, 2008, § 3, пример 1; Севастьянов, 2019, § 9, пример 4). Если колода не содержит «пустых» карт (типа джокеров), то есть состоит из 13 карт каждой из четырёх мастей (всего 52 карты), то события окажутся независимыми: $\mathrm{P}(A)=13/52=1/4$, $\mathrm{P}(B)=4/52=1/13$, $\mathrm{P}(AB)=1/52$, откуда следует справедливость соотношения (2). Если же в колоду добавить одну или несколько «пустых» карт (которые, казалось бы, никак не связаны ни с пиками, ни с дамами), то события A и B будут зависимы. Описанный эффект происходит потому, что условная вероятность $\mathrm{P}(A|B)=1/4$ не меняется от наличия или отсутствия в колоде «пустых» карт, а вот вероятности $\mathrm{P}(A)$ и $\mathrm{P}(B)$ уменьшаются с ростом количества «нейтральных» карт.

Почти во всех нынешних руководствах по решению задач формула (1) для условной вероятности если и используется по своему прямому назначению, то только в опытах с равновероятными исходами, где всё сводится к подсчёту количества исходов, благоприятствующих событиям A, B и AB, например (Феллер, 1984, гл. V, § 1, примеры; Ширяев, 2004, гл. I, § 3, пример 1). В целом же, определение (1) условной вероятности заменяют его прямым, непосредственным и тривиальным следствием в виде так называемой теоремы умножения

$$\mathrm{P}(A \cdot B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B|A),$$

которая показывает, что вероятность произведения (или вероятность совместного наступления, что то же самое) двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в ситуации, когда первое событие считается уже осуществившимся. В рамках математической теории никакой пользы от такой теоремы нет: она непригодна для подсчёта вероятности произведения событий, так как требует вычисления условной вероятности, которая, в свою очередь, выражается через вероятность произведения.

В качестве (опять-таки тривиальных) следствий теоремы умножения получают новые формулы, содержащие специальные события – гипотезы $\{H_k\}_{k=1}^{N}$, представляющие собой полную группу попарно несовместных событий с ненулевыми вероятностями.
Тогда: если A – произвольное событие, то имеют место формула полной вероятности:

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}\left(\sum AH_k\right) = \sum \mathrm{P}(AH_k) = \sum \mathrm{P}(H_k)\mathrm{P}(A|H_k)$$

и (при дополнительном условии $\mathrm{P}(A) \neq 0$) формулы Байеса

$$\mathrm{P}(H_j|A) = \frac{\mathrm{P}(H_j A)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{\mathrm{P}(H_j)\mathrm{P}(A|H_j)}{\sum \mathrm{P}(H_k)\,\mathrm{P}(A|H_k)},$$

где $j = 1,\ 2,\ \ldots,\ N$. Сказанное выше о математической бесполезности теоремы умножения относится в полной мере к формулам полной вероятности и Байеса. Роль этих формул вовсе не математическая: они помогают оценить вероятность произведения событий $\mathrm{P}(AB)$, вероятность события $\mathrm{P}(A)$ в соотнесении с гипотезами, апостериорные вероятности гипотез $\mathrm{P}(H_j|A)$, но при одном условии – исходные данные задачи позволяют считать понятными значения встречающихся в формулах условных вероятностей в соответствии с их содержательным смыслом. С помощью теоремы умножения можно в ряде случаев убедительно мотивировать приписывание вероятностей элементарным исходам при построении вероятностных математических моделей. Ну и конечно, все перечисленные здесь теоремы и формулы (вывод которых занимает буквально одну строку) полезно давать в качестве упражнений на практических занятиях.

Решение поднятых выше проблем видится только одно, причём безальтернативное: вернуть преподавание теории вероятностей в математическое русло. А именно, в каждой задаче на поиск вероятностей событий строить (или, по крайней мере, описывать) вероятностное пространство, то есть составлять математическую модель фигурирующего в условии задачи случайного явления, а далее действовать уже в рамках этой модели с соблюдением математического формализма. На этом пути в качестве инструментария как в методике преподавания, так и в практике решения задач предлагается использовать метод последовательных испытаний, который в полной мере отвечает аксиоматическому (по А.Н. Колмогорову) построению теории вероятностей.

Конечное вероятностное пространство

Конечное вероятностное пространство служит математической моделью случайных явлений с конечным количеством исходов. Описание полной конструкции конечного (и чуть шире – дискретного) вероятностного пространства можно найти, например, в изданиях (Боровков, 2023, гл. 1, § 1; Прохоров, 2020, гл. 2, § 1; Севастьянов, 2019, § 4; Феллер, 1984, гл. I, § 7; Ширяев, 2004, гл. I, § 1). Удивительно другое: почему-то в некоторых учебных изданиях оно отсутствует (Гмурман, 2004; Гнеденко, 2011).

Конечное вероятностное пространство состоит из следующих структурных элементов. Это конечное множество $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$, элементы которого интерпретируются как все возможные взаимно исключающие друг друга исходы некоторого опыта; множество Ω называется пространством элементарных событий (или элементарных исходов). Каждому исходу ω_k ставится в соответствие некоторое число p_k так, что выполняются два условия: $p_k \geq 0$ и $\sum p_k = 1$ (аксиомы неотрицательности и нормированности); эти числа интерпретируются как вероятности исходов: $p_k = \mathrm{P}(\omega_k)$. Случайным событием называется любое подмножество множества Ω. Вероятность события определяется как сумма вероятностей составляющих его (иначе говорят: благоприятствующих ему) исходов; при этом полагается $\mathrm{P}(\emptyset) = 0$, а само пустое подмножество трактуется как невозможное в данном опыте событие (так как оно не имеет ни одного благоприятствующего исхода). Если перечисленные выше условия выполнены, то пара $\{\Omega, \mathrm{P}\}$ вместе с алгеброй событий, состоящей из всех 2^n подмножеств множества Ω, представляет собой вероятностное пространство в смысле аксиоматики А.Н. Колмогорова.

Разумеется, все приведённые здесь понятия, аксиомы, определение вероятности события и разумность их принятия должны быть разъяснены учащимся на примерах с использованием частотной интерпретации вероятности. Тесная (если не сказать онтологическая) связь между относительной частотой w_A события A и его вероятностью $\mathrm{P}(A)$ обязательно должна найти отражение при изложении курса теории вероятностей. Именно устойчивость частот служит базой для применения вероятностных методов исследования, и только при её наличии имеет смысл говорить о вероятностях событий как количественной мере степени их объективной возможности: $w_A \approx \mathrm{P}(A)$. Понятие устойчивости частот введено Р. Мизесом (Мизес, 1930). Он предложил и отстаивал частотную концепцию вероятности, а саму вероятность события определял с помощью равенства $\mathrm{P}(A) = \lim_{N\to\infty} w_A$, исходя из того, что относительная частота по мере увеличения количества N опытов всё менее уклоняется от вероятности. Содержательную сторону понятия вероятности учащийся должен представлять себе, имея в виду исключительно её частотный смысл, а не на базе классического определения или как-нибудь иначе.

Ещё из школьного курса математики нам известно об аксиоматическом построении элементарной геометрии, впервые изложенном Евклидом в «Началах» (III век до н.э.), и что в качестве постулатов берут всем понятные, очевидные, бесспорные, а потому не нуждающиеся в доказательствах утверждения. И формально изложенная аксиоматика вещественных чисел «не кажется произвольным плодом фантазии», а «воспринимается как определённый итог духовного развития», поскольку предварительно (и в истории человечества, и в процессе обучения) были стадии перехода от сложения именованных величин к сложению абстрактных чисел, постепенного расширения множества чисел от натуральных до рациональных и вещественных, возникновения в процессе измерений отношения порядка «больше - меньше», иллюстрированного образом числовой прямой и т.д. (Зорич, 2019, гл. II, § 1). В теории вероятностей аксиомы, фундаментальные определения (например, безусловной и условной вероятностей события) необходимо мотивировать соответствующими свойствами частот, что покажет разумность принятия тех или иных аксиом и определений и естественность их «происхождения». Это же будет способствовать единению чисто математического (формализованного, теоретического) учебного материала с естественнонаучным (практическим, интуитивным).

Конструкцию конечного вероятностного пространства я поясняю на примере игрального кубика со стандартными очками на гранях или правильной треугольной пирамиды (правильного тетраэдра) с окрашенными в разные цвет**а** гранями. Возьмём для определённости кубик. Предположим, что по результатам его многократных подбрасываний установлено следующее: на каждые 100 опытов элементарные исходы 1, 2, 3, 4, 5, 6 (количество очков на верхней грани) выпадали в среднем 17, 6, 31, 7, 20, 19 раз соответственно, допуская незначительные отклонения в разных сериях испытаний. Здесь случайное явление (испытание, опыт, эксперимент и т.д.) заключается в подбрасывании кубика; оно имеет ровно шесть различных несовместных исходов, которые и образуют пространство элементарных событий

$$\Omega = \{\omega_1 = 1,\ \omega_2 = 2,\ \omega_3 = 3,\ \omega_4 = 4,\ \omega_5 = 5,\ \omega_6 = 6\}.$$

Приведённые результаты опытов показывают, что кубик в действительности не симметричен (возможно, сделан из неоднородных и/или различных материалов при внешней геометрически правильной форме), а относительные част**о**ты w_k элементарных исходов ω_k обладают свойством устойчивости и примерно равны $w_1 = 0{,}17$, $w_2 = 0{,}06$, $w_3 = 0{,}31$, $w_4 = 0{,}07$, $w_5 = 0{,}20$, $w_6 = 0{,}19$. Понятно, что част**о**ты неотрицательны и дают в сумме единицу: $w_k \geq 0$ и $\sum w_k = 1$; это и есть частотный аналог аксиом неотрицательности и нормированности для вероятностей элементарных исходов.

Рассмотрим, например, случайное событие $A =$ «выпало менее трёх очков». К его наступлению в результате подбрасывания кубика приводит появление элементарного исхода $\omega_1 = 1$ или исхода $\omega_2 = 2$ (благоприятствующие исходы); или событие A и определяется как подмножество пространства элементарных событий: $A = \{\omega_1,\ \omega_2\} \subset \Omega$. Относительная частота w_A события A высчитывается по общему правилу как отношение числ**а** тех опытов, где данное событие наступило, к их общему количеству:

$$w_A = \frac{17+6}{100} = 0{,}17 + 0{,}06 = w_1 + w_2.$$

Тем самым частота события находится сложением частот благоприятствующих исходов, что и привело к указанному выше определению вероятности события в структуре конечного вероятностного пространства.

Классическое определение вероятности является следствием общего определения вероятности события. Действительно, в случае равновероятности (равновозможности) всех n элементарных исходов ω_k опыта их вероятности $p_k = \mathrm{P}(\omega_k)$ равны между собой, что вместе с условием нормированности даёт $p_k = 1/n$. Если событие A состоит ровно из m элементарных исходов, то его вероятность, согласно общему правилу, находится сложением вероятностей благоприятствующих исходов, то есть сложением m одинаковых дробей $1/n$. В итоге получаем формулу классического определения вероятности $\mathrm{P}(A) = m/n$, которая справедлива, подчеркнём ещё раз, только когда исходы опыта равновероятны.

Интересно отметить, что в многочисленных руководствах по решению задач правило нахождения вероятности события суммированием вероятностей благоприятствующих исходов почти никогда не упоминается. Исключением не являются (Гмурман, 2005; Данко, 2003; Емельянов, 2019; Сборник задач, 2008). И причина здесь лежит на поверхности: в рамках традиционной методики обучения эта ключевая формула оказывается просто ненужной, так как в опытах с неравновероятными исходами построение (описание) вероятностного пространства вообще не предусматривается, а применение классического определения вероятности сводится лишь к подсчёту общего количества всех равновероятных исходов и количества благоприятствующих.

Метод последовательных испытаний

Опишем процедуру (своего рода алгоритм) применения метода последовательных испытаний. Первым делом, внимательно прочитав условие задачи, необходимо понять, о каком случайном явлении идёт речь. Другими словами, необходимо чётко обозначить именно тот процесс, который служит объектом изучения для теории вероятностей. Затем описанный в задаче опыт надо попытаться (если, конечно, удастся) заменить равносильной (эквивалентной) серией последовательно (одно за другим) выполняемых испытаний (действий) с фиксацией результатов каждого. Отсюда, кстати, и происходит название метода. Например, подбрасывание нескольких монет или кубиков легко заменяется их поочерёдными подбрасываниями по одному предмету; серия выстрелов вполне допускает их последовательное исполнение с отслеживанием результатов (попадание или промах) у каждого; выбор шаров из ящика также можно осуществить последовательными извлечениями по одному шару. Конечно, испытание «в одно действие» (бросаем одну монету, берём один шар, делаем один выстрел, проводим одно измерение и т.д.) на несколько опытов разбить затруднительно, но это не служит препятствием для применения метода последовательных испытаний.

Итак, в рамках метода последовательных испытаний описание исходов ω, образующих пространство элементарных событий Ω не вызывает никаких проблем: $\omega = \left(a_i, b_j, c_k, \dots\right)$, где a_i, b_j, c_k, … – исходы первого, второго, третьего и т.д. последовательно проводимых испытаний. Более важным представляется вопрос о том, каким образом разумно приписывать этим исходам вероятности. Раз речь зашла о вероятностях, то, как отмечено выше, полезно перевести разговор на язык относительных частот. Если провести серию опытов, многократно воспроизводящих рассматриваемое случайное явление, то частоты элементарных исходов и частоты исходов первого испытания вычисляются моментально. А вот част**о**ты исходов второго испытания следует рассчитывать с учётом уже наступивших исходов первого испытания, то есть рассчитывать как условные частоты. Например, после извлечения без возвращения первого шара состав шаров в ящике изменится (уж точно количественно), и выбор второго шара (второе из последовательных испытаний) будет происходить в новых условиях. Далее, част**о**ты исходов третьего испытания надо подсчитывать также как условные в зависимости от того, какие исходы реализовались в предыдущих двух испытаниях. И так далее.

Здесь ситуацию предпочтительней пояснить на конкретном числовом примере учебного характера. Пусть некоторое случайное явление представимо в виде двух последовательных испытаний с двумя исходами в каждом – A и $\bar{A}$ в первом испытании, B и $\bar{B}$ во втором (здесь A и B – некоторые события). Предположим также, что это случайное явление многократно воспроизводилось в серии из $N = 10$ одинаковых повторяющихся опытов, результаты наблюдений которых отражены на таблице 1.

Таблица 1.

Результаты опытов с регистрацией исходов испытаний

№ опыта	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Первое испытание	A		A	A		A		A	A	
Второе испытание			B		B	B	B			B

Пространство элементарных событий выписывается без труда:

$$\Omega = \{\omega_1 = AB,\ \omega_2 = A\bar{B},\ \omega_3 = \bar{A}B,\ \omega_4 = \bar{A}\bar{B}\}.$$

Част**о**ты w_k элементарных событий и частоты w_A, $w_{\bar{A}}$ исходов первого испытания моментально находятся по данным таблицы 1:

$$w_1 = {}^2/_{10},\ w_2 = {}^4/_{10},\ w_3 = {}^3/_{10},\ w_4 = {}^1/_{10};\quad w_A = {}^6/_{10},\ w_{\bar{A}} = {}^4/_{10}.$$

Как отмечалось выше, второе испытание проводится только после проведённого первого, поэтому частоты исходов второго испытания надо рассчитывать как условные в зависимости от наступившего исхода первого испытания. Например, частоту $w_{B|\bar{A}}$ появления события B во втором испытании, если в первом испытании не наступило событие A (а значит, наблюдалось противоположное событие $\bar{A}$) надо определять не по всем $N = 10$ опытам, а только по тем из них, где A не появлялось. Поскольку событие A не произошло в четырёх опытах (№ 2, 5, 7, 10), среди которых событие B наблюдалось ровно в трёх опытах

(№ 5, 7, 10), то $w_{B|\bar{A}} = 3/4$. Аналогичные расчёты приводят к следующим частотам исходов второго испытания:

$$w_{B|A} = {}^{2}/_{6}, \quad w_{\bar{B}|A} = {}^{4}/_{6}, \quad w_{B|\bar{A}} = {}^{3}/_{4}, \quad w_{\bar{B}|\bar{A}} = {}^{1}/_{4}.$$

Сравнение полученных числовых значений для частот показывает, что относительные частоты w_k элементарных событий рассматриваемого случайного явления равны произведениям частот тех исходов последовательных испытаний, которые образуют элементарные события:

$$w_1 = w_A \cdot w_{B|A}, \quad w_2 = w_A \cdot w_{\bar{B}|A}, \quad w_3 = w_{\bar{A}} \cdot w_{B|\bar{A}}, \quad w_4 = w_{\bar{A}} \cdot w_{\bar{B}|\bar{A}}.$$

Крайне выигрышным в методическом плане, наглядным и удобным для восприятия учащимися является изображение всех исходов и частот, полностью описывающих данное случайное явление, в виде графа-дерева с исходами в качестве вершин и частотами (вероятностями) в качестве весов (рис. 1). Каждое элементарное событие ω_k определяется маршрутом от верхней точки к любой из нижних, а его частота (вероятность) находится как произведение расположенных вдоль маршрута весов.

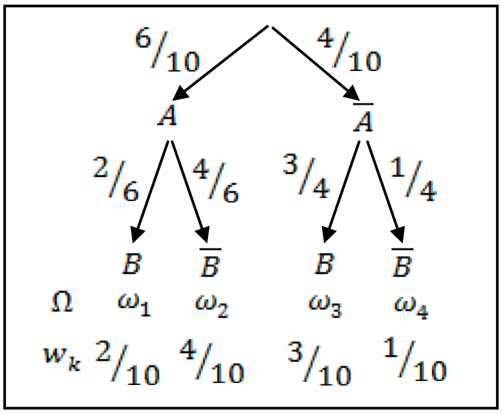

Рис. 1. Пример исходов и их частот по данным таблицы 1

Если в данном опыте имеет место устойчивость частот, то относительные частоты исходов будут примерно равны соответствующим вероятностям. В частности, частоты w_k можно принять в качестве вероятностей $p_k = \mathrm{P}(\omega_k)$ элементарных событий: $w_k \approx p_k$. Тем самым будет построено вероятностное пространство, служащее математической моделью изучаемого случайного явления. Сумма вероятностей всех элементарных исходов всегда будет давать единицу (требование аксиомы нормированности), так как сумма вероятностей на каждой «веточке» также есть единица:

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = \frac{6}{10} \cdot \frac{2}{6} + \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{6} + \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{4} + \frac{4}{10} \cdot \frac{1}{4} = \frac{6}{10}\left(\frac{2}{6} + \frac{4}{6}\right) + \frac{4}{10}\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right) = 1.$$

Конечно, правило приписывания вероятностей исходам можно на содержательном уровне пояснить, опираясь на теорему умножения. Пусть элементарные события опыта имеют вид $\omega = (a, b, c)$ и составлены из исходов трёх последовательных испытаний. Если удалось определить или по относительным частотам, или по данным из условия задачи, или они заданы $p(a)$ – вероятности исходов первого испытания, $p(b|a)$ – вероятности исходов второго испытания при наступлении исходов первого, $p(c|ab)$ – вероятности исходов третьего испытания при происшедших исходах первого и второго испытаний, то элементарному событию естественно приписать вероятность $p(\omega) = p(a, b, c) = p(a) \cdot p(b|a) \cdot p(c|ab)$, поскольку элементарное событие можно трактовать как совместное появление исходов a, b, c последовательных испытаний. При этом аксиома нормированности всегда будет выполняться:

$$\sum_{\omega} p(\omega) = \sum_{a,b,c} p(a, b, c) = \sum_{a} p(a)\left(\sum_{b} p(b|a)\left(\sum_{c} p(c|ab)\right)\right) =$$

$$= \sum_a p(a)\left(\sum_b p(b|a)(1)\right) = \sum_a p(a)\left(\sum_b p(b|a)\right) = \sum_a p(a)(1) = \sum_a p(a) = 1.$$

Изложенную в самом общем виде с помощью математического формализма конструкцию конечного вероятностного пространства, представляющего собой математическую модель случайного явления в виде последовательности нескольких испытаний с конечным количеством исходов, можно найти, например, в учебнике (Чистяков, 2000, гл. 4, § 1).

Наконец, добавим, что процесс построения математической модели является не формализуемым. Он зиждется на рациональных (говорят также: правдоподобных, эвристических) рассуждениях. Здесь бессмысленно добиваться той строгости, которая принята в математике. В модели должны найти отражение наиболее существенные объективные характеристики изучаемого реального явления. Поэтому неформальные рассуждения, приведшие к выбору той или иной модели, должны быть разумно мотивированы. Только тогда можно надеяться на адекватность модели, на хорошее согласие теории и практики. Ну а для проверки качества модели имеется один путь – сопоставление теоретических выводов с опытными данными.

Примеры решения задач

Далее будут рассмотрены задачи, в которых нужно находить условные вероятности, поскольку только в этих случаях традиционная методика обучения и рекомендует использовать формулу Байеса. Из их решения будет видно, что если бы требовалось найти в рамках описанного случайного явления безусловные вероятности каких-либо других событий, то для этого не потребовалось бы применять ни формулу полной вероятности, ни теоремы умножения.

Задача 1 (об извлечении шара из наугад выбранного ящика). Имеются три одинаковых по виду ящика с шарами. В первом – 5 белых и 3 чёрных, во втором – 2 белых и 2 чёрных, в третьем – 7 чёрных. Из выбранного наугад ящика вынули наудачу один шар, который оказался белым. Вычислить вероятность того, что шар был вынут из первого ящика. Задача взята из пособия (Данко, 2003, задача № 856) с несущественными изменениями условия.

Описание в условии случайного явления сразу даётся в виде двух последовательных действий: сначала выбираем какой-то ящик (с равными шансами любой из трёх), затем из выбранного ящика наудачу извлекаем один шар. Исходы первого испытания обозначим римскими числами I, II, III (по номеру ящика), а второго буквами Б или Ч (по цвету вынутого шара – белый или чёрный). Вероятностное пространство изображено на рис. 2.

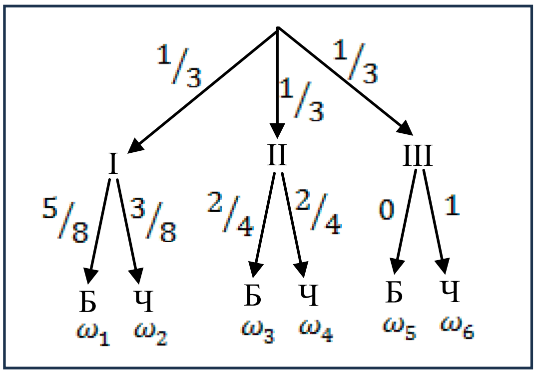

Рис. 2. Вероятностное пространство к задаче 1

Ищется вероятность события $A =$ «шар вынут из первого ящика» при условии события $B =$ «вынутый шар оказался белым». Оба события предъявляем как подмножества пространства элементарных событий, отбирая благоприятствующие для их осуществления исходы: $A = \{\omega_1, \omega_2\}$, $B = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$. Для нахождения искомой условной вероятности применяем фундаментальную формулу (1), помня, что вероятность события находится как сумма вероятностей благоприятствующих исходов, и учитывая также, что $A \cdot B = \{\omega_1\}$:

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A \cdot B)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\mathrm{P}(\omega_1)}{\mathrm{P}(\omega_1) + \mathrm{P}(\omega_3) + \mathrm{P}(\omega_5)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{8}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{8} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} + \frac{1}{3} \cdot 0} = \frac{5}{9}.$$

Задача 2 (об упрощённой системе контроля качества продукции). Известно, что 96% выпускаемой продукции удовлетворяют стандарту. Упрощённая схема контроля признаёт пригодной стандартную продукцию с вероятностью 0,98 и нестандартную – с вероятностью 0,05. Определить вероятность того, что изделие, прошедшее упрощённый контроль, удовлетворяет стандарту. Задача из сборника задач (2008, задача № 7.3).

В условии задачи прямо описаны последовательные действия (испытания), осуществляемые в ходе технологического процесса производства: 1) изготовление продукции, которая может оказаться как стандартной (обозначение: СТ), так и, к сожалению, бракованной (обозначение: БР); 2) контроль качества продукции с помощью упрощённой (а значит, малозатратной) схемы контроля, которая работает не без ошибок, и каждое поступившее в неё изделие признаёт пригодным или непригодным (обозначения: ПР и не ПР соответственно). Вероятностное пространство построено на рис. 3.

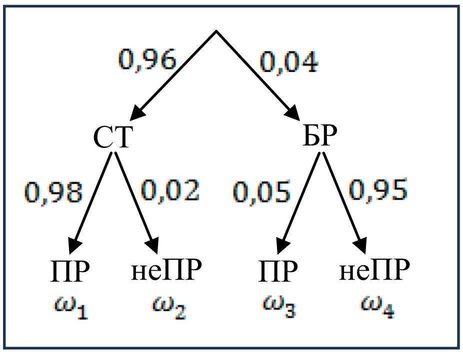

Рис. 3. Вероятностное пространство к задаче 2

Далее действуем строго в соответствии с математическими определениями и формулами в рамках математической модели:

A = «изделие удовлетворяет стандарту» = $\{\omega_1, \omega_2\}$,

B = «изделие прошло упрощённый контроль» = $\{\omega_1, \omega_3\}$;

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(AB)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\mathrm{P}(\omega_1)}{\mathrm{P}(\omega_1) + \mathrm{P}(\omega_3)} = \frac{0{,}96 \cdot 0{,}98}{0{,}96 \cdot 0{,}98 + 0{,}04 \cdot 0{,}05} = \frac{2352}{2357} \approx 0{,}998.$$

С практической точки зрения такую систему контроля можно признать удовлетворительной: поскольку искомая вероятность оказалась почти единичной, то фактически каждое признанное пригодным изделие будет стандартным.

Задача 3 (о залпе трёх стрелков). Три стрелка произвели залп, причём только две пули поразили мишень. Найти вероятность того, что третий стрелок поразил мишень, если вероятности попадания в мишень первым, вторым и третьим стрелками соответственно равны 0,6, 0,5 и 0,4. Задача заимствована из (Гмурман, 2005, задача № 107).

Считаем, что стрелки стреляли последовательно, один за другим: сначала первый, затем второй и, наконец, третий. Как следует из условия задачи, результатами каждого выстрела могут быть только попадание и промах, которые обозначим числами 1 и 0 соответственно. Вероятностное пространство в виде графа представлено на рис. 4.

Решение изложим, как и в предыдущей задаче, максимально кратко:

A = «третий стрелок поразил мишень» = $\{\omega_1, \omega_3, \omega_5, \omega_7\}$,

B = «ровно две пули поразили мишень» = $\{\omega_2, \omega_3, \omega_5\}$,

$AB = \{\omega_3, \omega_5\}$;

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(AB)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\mathrm{P}(\omega_3) + \mathrm{P}(\omega_5)}{\mathrm{P}(\omega_2) + \mathrm{P}(\omega_3) + \mathrm{P}(\omega_5)} =$$

$$= \frac{0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}4 + 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}4}{0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}6 + 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}4 + 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}4} = \frac{10}{19} \approx 0{,}526.$$

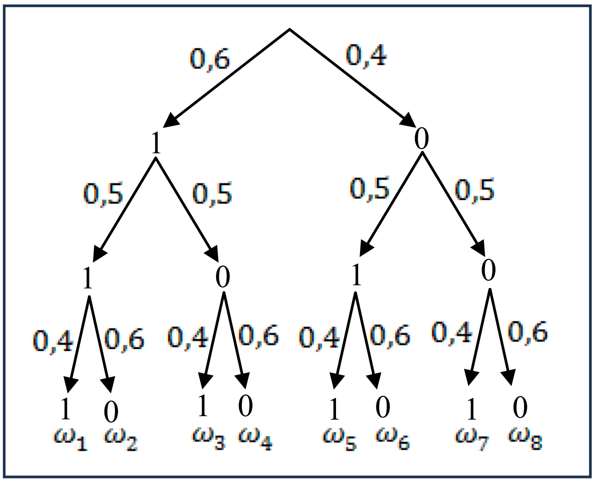

Рис. 4. Вероятностное пространство к задаче 3

Задача 4 (о перекладывании шаров из одной урны в другую). В первой урне 3 белых и 5 чёрных шаров, во второй – 20 белых и 10 чёрных шаров. Из второй урны переложили в первую наудачу выбранный шар, а затем из первой урны вынули наугад один шар. Какова вероятность того, что вынутый шар ранее находился во второй урне, если известно, что он белый? Задача из пособия (Данко, 2003, задача № 859) с непринципиальными изменениями условия.

Последовательность действий явно описана в условии задачи: сначала перекладываем шар из второй урны в первую, а затем вынимаем шар из первой урны. Если исходы первого испытания достаточно описывать только по цвету переложенного шара, обозначая их, скажем, буквами Б (белый) и Ч (чёрный), то в описании исходов второго испытания нужно помимо цвета ещё указывать, в какой урне вынутый шар находился первоначально. Будем в исходах второго испытания дополнительно к указанию цвета шара приписывать символ 1 или 2, показывающий, в какой урне шар был с с**а**мого начала. Тогда вероятностное пространство примет вид графа, изображённого на рис. 5.

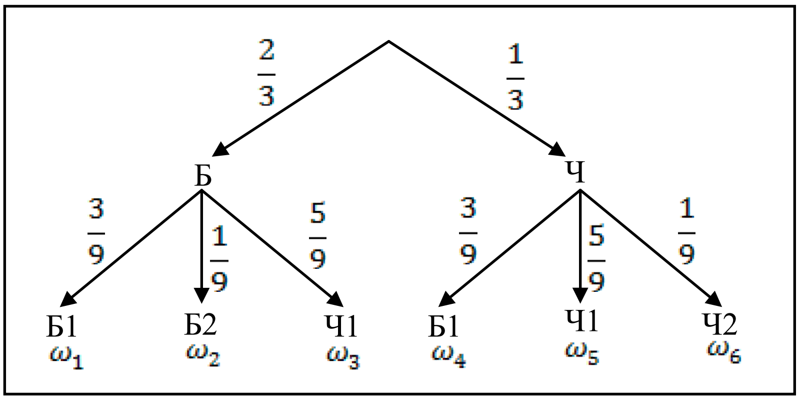

Рис. 5. Вероятностное пространство к задаче 4

Теперь переходим к описанию событий и нахождению искомой вероятности:
$A =$ «вынутый шар ранее находился во второй урне» $= \{\omega_2, \omega_6\}$,

$B =$ «вынутый из первой урны шар оказался белым» $= \{\omega_1, \omega_2, \omega_4\}$;

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(AB)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\mathrm{P}(\omega_2)}{\mathrm{P}(\omega_1) + \mathrm{P}(\omega_2) + \mathrm{P}(\omega_4)} = \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{9}}{\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{9} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{9} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{9}} = \frac{2}{11}.$$

Данную задачу можно решить и с помощью классического определения вероятности. Чтобы обеспечить равновероятность исходов, перенумеруем шары в урнах, например, следующим образом: номерами с 1 по 3 и с 4 по 8 белые и, соответственно, чёрные шары в первой урне, а номерами с 9 по 28 и с 29 по 38 белые и чёрные шары во второй урне. Все элементарные исходы опыта будем записывать в виде $\omega = (i, j)$, где i – номер шара, переложенного из второй урны в первую ($9 \le i \le 38$), а j – номер вынутого из первой урны шара ($1 \le j \le 8$, $j = i$). Тогда общее количество n всех исходов и количества исходов m_A, m_B, m_{AB}, благоприятствующих событиям A, B, AB, примут значения

$n = 30 \cdot 9 = 270, \quad m_A = 30 \cdot 1 = 30, \quad m_B = 30 \cdot 3 + 20 \cdot 1 = 110, \quad m_{AB} = 20 \cdot 1 = 20,$

так как

$$A = \{(i, i): 9 \le i \le 38\}, \quad B = \{(i, j): 9 \le i \le 38,\ 1 \le j \le 3\} \cup \{(i, i): 9 \le i \le 28\},$$

$$AB = \{(i, i): 9 \le i \le 28\}.$$

Наконец, для искомой вероятности получим

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(AB)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{m_{AB}/n}{m_B/n} = \frac{m_{AB}}{m_B} = \frac{2}{11}$$

(знание величин n и m_A здесь не понадобилось).

Некоторые дополнительные замечания

1. Испытания Бернулли. Под испытаниями Бернулли понимается последовательность испытаний, характеризуемая двумя свойствами: 1) каждое испытание имеет ровно два исхода, называемые «успех» и «неудача», и 2) вероятности этих исходов, обозначаемые традиционно через p и $q \equiv 1 - p$, одинаковы во всех испытаниях. Испытания Бернулли вливаются в метод последовательных испытаний как частный случай общей конструкции, и при малом количестве таких испытаний (как правило, до четырёх) все задачи можно решать по общему алгоритму метода последовательных испытаний, даже не задумываясь, перед нами схема Бернулли или нет. При большем количестве испытаний уже трудно обойтись без известной формулы для вероятности $P_n(k)$ числа успехов. Если из условия задачи испытания Бернулли сразу не усматриваются, то применение метода последовательных испытаний с присущим ему графическим изображением вероятностного пространства сразу поможет их выявить (при наличии).

2. Одно «последовательное испытание» (задача о взвешивании). Рассмотрим следующую задачу, рекомендуемую для подготовки к Единому государственному экзамену (ЕГЭ, 2024, вариант 12, задача № 5). По результатам контрольных взвешиваний свежеиспечённой буханки хлеба установлено следующее: масса буханки оказывается меньше 810 г с вероятностью 0,97, а больше 790 г с вероятностью 0,94. Найти вероятность того, что масса буханки будет больше, чем 790 г, но меньше, чем 810 г.

Здесь описанное случайное явление состоит из одного-единственного действия – взвешивания, и представить его в виде серии нескольких последовательных испытаний вряд ли удастся. Теоретически результатом опыта может быть любое неотрицательное вещественное число m, выражающее массу хлеба в граммах. Таких исходов, конечно, бесконечно много, но наличие в условии задачи весов 810 и 790 подсказывает целесообразность разбиения всех значений масс на три промежутка, что приводит к следующему пространству элементарных событий опыта:

$$\Omega = \{\ \omega_1 = [0 \le m \le 790], \quad \omega_2 = (790 < m < 810), \quad \omega_3 = [m \ge 890)\ \}.$$

Вероятности элементарных исходов обозначим через p_1, p_2, p_3 соответственно. Их значения легко определить по данным задачи вместе с условием нормированности вероятностей:

$$\begin{cases} \mathrm{P}(m < 810) = \mathrm{P}(\omega_1) + \mathrm{P}(\omega_2) = p_1 + p_2 = 0{,}97, \\ \mathrm{P}(m > 790) = \mathrm{P}(\omega_2) + \mathrm{P}(\omega_3) = p_2 + p_3 = 0{,}94, \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1, \end{cases}$$

откуда $p_1 = 0{,}06$, $p_2 = 0{,}91$ (искомая вероятность), $p_3 = 0{,}03$.

Вероятностное пространство в виде графа показано на рис. 6. Подобную структуру имеют вероятностные пространства для опыта, не разложенного в последовательность нескольких испытаний.

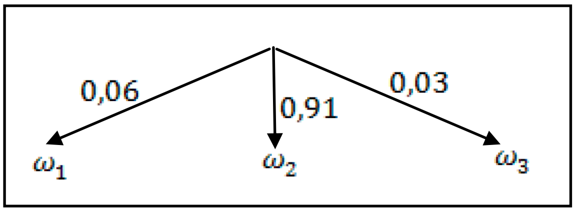

Рис. 6. Вероятностное пространство к задаче о взвешивании

3. Дискретные случайные величины. Одним из центральных вопросов при изучении случайной величины является нахождение (в той или иной форме) её закона распределения. Для дискретной случайной величины, прежде всего, нужно знать её ряд распределения, то есть перечень всех возможных значений и их вероятностей (это табличная форма закона распределения). И задача здесь сводится к поиску вероятностей событий, заключающихся в принятии случайной величиной того или иного значения, для чего в полной мере подходит метод последовательных испытаний. Выписав вероятностное пространство, нужно для каждого элементарного исхода указать то числовое значение, которое примет случайная величина при осуществлении данного исхода в результате проведения опыта.

Пусть, например, в рассмотренной выше задаче о трёх стрелк**а**х (задача 3) требуется построить ряд распределения случайной величины ξ, равной суммарному количеству попаданий. Вероятностное пространство, отвечающее опыту из трёх выстрелов, изображено на рис. 4. Значения случайной величины ξ на элементарных исходах определяются, что называется, «в одно касание»; они представлены на таблице 2. (Конечно, в реальной практике обучения никаких отдельных таблиц для значений случайной величины делать не нужно: эти значения удобно подписывать прямо под элементарными событиями в конструкции уже построенного вероятностного пространства.)

Таблица 2.

Значения случайной величины на элементарных исходах

$\boldsymbol{\Omega}$	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7	ω_8
$\boldsymbol{\xi}$	3	2	2	1	2	1	1	0

Данное обстоятельство просто неоценимо в учебно-методическом плане, так как здесь явно показывается, что случайная величина является числовой функцией на пространстве элементарных событий (как того и требует её строгое математическое определение, формально записываемое в виде $\xi: \Omega \to \mathbb{R}$).

Заключение

Метод последовательных испытаний находится в полном согласии с математическими основаниями теории вероятностей, определёнными аксиоматикой А.Н. Колмогорова.

Первое, что следует сделать при использовании метода последовательных испытаний – это чётко описать (на вербальном уровне) рассматриваемое в задаче случайное явление. И данный шаг, даже как таковой, представляет определённую ценность, поскольку он побуждает решающего хорошо представлять себе именно тот процесс, который служит для теории вероятностей предметом изучения. Иногда, даже в солидных изданиях, такой важный момент упускают из виду и предлагают находить вероятности событий в условиях невозможности реализации самого опыта, например, когда группу из нечётного количества спортсменов делят на пары для проведения поединков (ОГЭ, 2022, варианты 31 и 32, задача № 10).

Следующий пункт решения – это разложение рассматриваемого в задаче опыта на серию последовательных испытаний и описание (в графической или аналитической форме) соответствующего вероятностного пространства. Все последующие действия осуществляются уже в рамках математической модели, подчиняясь законам математики. Тем самым применение метода последовательных испытаний приводит к выделению в решении задачи двух важных и принципиально различных этапов – неформализуемый процесс построения математической модели и работу с опорой на математический формализм внутри модели, что является несомненным достоинством метода.

Метод последовательных испытаний очень удобен для использования в практике обучения. Он прост в изложении, позволяет построение вероятностного пространства проводить в наглядной (образной) форме в виде ориентированного графа, вырисовывание которого естественно для человека (с точки зрения двигательных привычек, физиологичности, биомеханичности).

По сравнению с традиционной методикой обучения применение метода последовательных испытаний приводит к уменьшению объёма используемых формул. Как видно из приведённых выше примеров решения типовых задач методом последовательных испытаний, в них остаются абсолютно невостребованными теоремы умножения, формулы полной вероятности и Байеса. Обучение последним в традиционной методике требует от учащихся не только запоминания дополнительной информации, но и, что довольно трудоёмко, оттачивания навыков в представлении одних событий через другие с помощью известных операций сложения, умножения, перехода к противоположному событию, понимания необходимости вводить в оборот те или иные гипотезы. В моей педагогической практике при использовании метода последовательных испытаний активно эксплуатируются только четыре формулы. Это правило нахождения безусловной вероятности события в общем случае как суммы вероятностей благоприятствующих исходов и в частном случае равновероятных исходов как отношения количества благоприятствующих исходов к их общему количеству, а также определение (1) для условной вероятности. Кроме того, при большом количестве испытаний Бернулли (больше 4–5) приходится привлекать соответствующую формулу для вероятности числа успехов. Наконец, довольно редко используются формула для вероятности суммы событий, в основном в испытаниях Бернулли, когда число успехов меняется в некотором диапазоне, и её следствие – теорема о вероятностях противоположных событий.

Метод последовательных испытаний даёт единый подход к решению задачи на поиск вероятности события: выделяем рассматриваемое в задаче случайное явление и, если возможно, заменяем его эквивалентной серией последовательных испытаний (здесь нет никакой математики, нужно просто хорошо владеть родным языком); затем строим вероятностное пространство, лучше в виде графа; если рисунок получается громоздким, а причина этому одна – большое количество исходов в испытаниях и/или самих последовательных испытаний, то ориентируемся на другие варианты решения, выбор которых невелик: применение классического определения вероятности или формулы Бернулли.

В целях привлечения внимания к методу последовательных испытаний и его активному внедрению в учебный процесс автор в последнее время выступал с докладами на конференциях, например, (Спиридонов, 2021), анализировал задачи, предлагавшиеся для подготовки к сдаче Единого государственного экзамена (Спиридонов, 2022). К более ранним трудам по данной тематике можно отнести монографию (Спиридонов, 1991) и учебно-методическое пособие (Спиридонов, 2009).

Список литературы

Боровков А.А. Теория вероятностей. М.: URSS, 2023.

Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие для вузов. 10-е изд., стер. М.: Высшая школа, 2004.

Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М.: Высшая школа, 2005.

Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей: Учебник. 10-е изд., доп. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2011.

Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 2. М.: «ОНИКС 21 век»: «Мир и Образование», 2003.

ЕГЭ. Математика. Профильный уровень. Типовые экзаменационные варианты: 36 вариантов / под ред. И.В. Ященко. М.: Национальное образование, 2024.

Емельянов Г.В., Скитович В.П. Задачник по теории вероятностей и математической статистике. 3-е изд., стер. СПб: Лань, 2019.

Зорич В.А. Математический анализ. Ч. I. 10-е изд., испр. М.: МЦНМО, 2019.

Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. 2-е изд. М.: Наука, 1974.

Мизес Р. Вероятность и статистика. М.–Л.: Госиздат, 1930.

ОГЭ. Математика. Типовые экзаменационные варианты: 36 вариантов / под ред. И.В. Ященко. М.: Национальное образование, 2022.

Прохоров Ю.В., Прохоров А.В. Курс лекций по теории вероятностей и математической статистике. М.: МЦНМО, 2020.

Розанов Ю.А. Лекции по теории вероятностей. 3-е изд. Долгопрудный: Издат. Дом «Интеллект», 2008.

Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций / под общей ред. А.А. Свешникова. СПб: Лань, 2008.

Севастьянов Б.А. Курс теории вероятностей и математической статистики. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2019.

Спиридонов М.Я. Метод последовательных испытаний в вероятностных задачах. М.: Изд-во Моск. полиграф. ин-та, 1991.

Спиридонов М.Я. Математика. Контрольные задания и методические указания для студентов заочной формы обучения. Семестр 4. М.: Моск. гос. ун-т печати, 2009.

Спиридонов М.Я. К вопросу преподавания начал теории вероятностей: задачи с конечным вероятностным пространством // Математика: теоретические и прикладные исследования. Материалы Всероссийской научно-практической конференции. Москва, 17 июня 2021 г. / под ред. С.Н. Андреева. М.: Московский Политех, 2022. С. 181–185.

Спиридонов М.Я. Метод последовательных испытаний в обучении решению вероятностных задач // Математика в школе. 2022. № 8. С. 28–38. DOI: 10.47639/0130-9358_2022_8_28

Тутубалин В.Н. Теория вероятностей. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1972.

Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её приложения. В 2-х томах. Т. 1. М.: Мир, 1984.

Чистяков В.П. Курс теории вероятностей. 5-е изд. М.: Агар, 2000.

Ширяев А.Н. Вероятность. В 2-х кн. Кн. I. 3-е изд., перераб. и доп. М.: МЦНМО, 2004.

IS IT NECESSARY TO STUDY BAYES' FORMULA IN A PROBABILITY THEORY COURSE?

Spiridonov M. Y.
PhD (Mathematics), associate professor
avt428212@ mail.ru
Moscow

Moscow Polytechnic University

Abstract. Probability theory, without any doubt, is a branch of mathematics, and quite extensive and actively developing. An axiomatic construction of probability theory that meets all mathematical canons was proposed by A.N. Kolmogorov back in 1933. Kolmogorov's axiomatics received almost universal recognition, gave probability theory the style accepted in modern mathematics, and thereby brought probability theory into the category of mathematical disciplines. Now the application of mathematical methods to the solution of probabilistic (as well as other natural science) problems should be carried out in two stages: first we build a mathematical model of the phenomenon under study (in Kolmogorov's axiomatics this is a probabilistic space), and then we act within the framework of the mathematical model, strictly adhering to mathematical formalism. Actually, probability theory as a mathematical science begins only after choosing a probability space. However, to this day, the traditional (dating from the 17th–19th centuries) method of teaching how to find the probabilities of events is widespread, in which it is not even supposed to describe the probabilistic space, especially in experiments with unequally probable outcomes. Therefore, in such a paradigm, random events and operations on them are forced to be given only verbal (linguistic, literary) characteristics, and the conditional probabilities present in multiplication theorems, in the formulas of total probability and Bayes, are determined on an intuitive level (such as "common sense") in accordance with meaningful ideas about them. In the mathematical theory of probability, events and operations on them are interpreted in the language of set theory: events are subsets of the space of elementary events, operations on them are the union, intersection, and complement of sets. The mathematical definition of conditional probability requires its calculation through the probability of product of events. Therefore, in mathematical science, multiplication theorems, formulas of total probability and Bayes turn out to be unclaimed: in them, one way or another, the probability of product of events is expressed through conditional probability, that is, contrary to theory, everything is turned upside down. The latter gives a clear answer to the question posed in the title of the article. In this paper, to search for the probabilities of events, it is proposed to use the method of sequential experiences, which fully complies with the mathematical foundations of probability theory, is convenient in presentation and perception (especially when presented in a figurative structure as a directed graph), leads to a reduction in the volume of formulas used, and has a number of other advantages over with traditional teaching methods.

Keywords: probability theory, part of mathematics, Kolmogorov's axiomatics, finite probability space, mathematical model, probabilities of events, method of sequential experiences.

References

Borovkov, A. A. (2023). *Teoriya veroyatnostey*. Moscow: URSS. (In Russ.)

Chistyakov, V. P. (2000). *Kurs teorii veroyatnostey*. Moscow: Agar. (In Russ.)

Danko, P. E., Popov, A. G. & Kozhevnikova, T. Ya. (2003). *Vysshaya matematika v uprazhneniyakh i zadachakh*. Moscow: «ONIKS 21 vek»: «Mir i Obrazovaniye». (In Russ.)

Feller, W. (1970). An Introduction to Probability Theory and its Applications. Volume 1. Third Edition. Revised Printing. John Wiley & Sons. New York.

Gmurman, V. E. (2004). *Teoriya veroyatnostey i matematicheskaya statistika*. Moscow: Vysshaya shkola. (In Russ.)

Gmurman, V. E. (2005). *Rukovodstvo k resheniyu zadach po teorii veroyatnostey i matematicheskoy statistike*. Moscow: Vysshaya shkola. (In Russ.)

Gnedenko, B. V. (2011). *Kurs teorii veroyatnostey*. Moscow: Knizhnyy dom «LIBROKOM». (In Russ.)

Kolmogorov, A. N. (1974). *Osnovnyye ponyatiya teorii veroyatnostey*. Moscow: Nauka. (In Russ.)

Mises, R. (1930). *Veroyatnost' i statistika*. Moscow–Leningrad: Gosizdat. (In Russ.)

OGE. Matematika. (2022). *Tipovyye ekzamenatsionnyye varianty: 36 variantov / pod red. I.V. Yashchenko*. Moscow: Natsional'noye obrazovaniye. (In Russ.)

Prokhorov, Yu. V., Prokhorov, A. V. (2020). *Kurs lektsiy po teorii veroyatnostey i matematicheskoy statistike*. Moscow: MTsNMO. (In Russ.)

Rozanov, Yu. A. (2008). *Lektsii po teorii veroyatnostey*. Dolgoprudnyy: Izdat. Dom «IntellekT». (In Russ.)

Sbornik zadach po teorii veroyatnostey, matematicheskoy statistike i teorii sluchaynykh funktsiy / pod obshchey red. A. A. Sveshnikova. St. Petersburg: Lan', 2008. (In Russ.)

Sevast'yanov, B. A. (2019). *Kurs teorii veroyatnostey i matematicheskoy statistiki*. Moscow–Izhevsk: Institut komp'yuternykh issledovaniy. (In Russ.)

Shiryayev, A. N. (2004). *Veroyatnost'. Kn. I*. Moscow: MTsNMO. (In Russ.)

Spiridonov, M. Ya. (1991). *Metod posledovatel'nykh ispytaniy v veroyatnostnykh zadachakh*. Moscow: Publishing house of the Moscow Polygraphic Institute. (In Russ.)

Spiridonov, M. Ya. (2009). *Matematika. Kontrol'nyye zadaniya i metodicheskiye ukazaniya dlya studentov zaochnoy formy obucheniya. Semestr 4*. Moscow: Moscow State University of Printing Arts. (In Russ.)

Spiridonov, M. Ya. (2021). K voprosu prepodavaniya nachal teorii veroyatnostey: zadachi s konechnym veroyatnostnym prostranstvom. *Matematika: teoreticheskiye i prikladnyye issledovaniya. Materialy Vserossiyskoy nauchno-prakticheskoy konferentsii. Moskva, 17 iyunya 2021 goda / pod red. S. N. Andreyeva* (pp. 181–185). Moscow: Moscow Polytechnic University, 2022. (In Russ., abstract in Eng.)

Spiridonov, M. Ya. (2022). Metod posledovatel'nykh ispytaniy v obuchenii resheniyu veroyatnostnykh zadach. *Mathematics at school*, 8, 28–38. DOI: 10.47639/0130-9358_2022_8_28 (In Russ., abstract in Eng.)

Tutubalin, V. N. (1972). *Teoriya veroyatnostey*. Moscow: Moscow State University Publishing House. (In Russ.)

YeGE. Matematika. (2024). *Profil'nyy uroven'. Tipovyye ekzamenatsionnyye varianty: 36 variantov / pod red. I.V. Yashchenko*. Moscow: Natsional'noye obrazovaniye. (In Russ.)

Yemel'yanov, G. V., Skitovich, V. P. (2019). *Zadachnik po teorii veroyatnostey i matematicheskoy statistike*. St. Petersburg: Lan'. (In Russ.)

Zorich, V. A. (2019). Matematicheskiy analiz. Chast' I. Moscow: MTsNMO. (In Russ.)

Статья поступила в редакцию 22.01.2024
Принята к публикации 18.03.2024