DOI: 10.24888/2500-1957-2024-2-42-54

УДК 378.147; 519.872

ЭКОНОМИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ В ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ: МЕТОДИЧЕСКИЕ ПРИЁМЫ

Амосова Наталия Николаевна
к.ф.-м.н., доцент
amosova_nn@spbstu.ru
г. Санкт-Петербург

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Аннотация. Статья посвящена методике преподавания такого важного раздела экономико-математического моделирования, как теория массового обслуживания. Теория массового обслуживания представляет собой фундаментальную основу экономически эффективного конструирования и эксплуатации систем массового обслуживания. Задача, которая возникает при этом, связана с проблемой установления связи между параметрами системы (т.е. числом обслуживающих аппаратов, длиной очереди, временем ожидания в очереди) и качеством обслуживания, которыми являются вероятность отказа, среднее время ожидания в очереди и т.д. Если ограничиться для решения этой задачи только вероятностными оценками (показателями эффективности), то они будут малоэффективны. Например, вы поставили цель: уменьшить длину очереди. Однако это приведет к увеличению числа обслуживающих аппаратов, что может быть с экономической точки зрения невыгодно. Поэтому лучше ориентироваться либо на максимум прибыли от эксплуатации систем массового обслуживания, либо на минимум суммарных потерь, которые связаны с простоем обслуживающих аппаратов, потерей заявок, простоем заявок в очереди. Параметры, которые обычно можно варьировать – это число обслуживающих аппаратов, длина очереди, приоритетность обслуживания и т.д. В настоящей работе рассмотрены распространенные типы систем массового обслуживания в зависимости от наличия очереди и допустимой длины очереди на обслуживание. Приведены вероятностные основы исследования и оптимизации параметров работы таковых систем. Подробно рассмотрены четыре репрезентативных примера, которые успешно внедрены в практику обучения.

Ключевые слова: теория массового обслуживания, вероятностные оценки, экономические оценки, оптимизация работы систем массового обслуживания, преподавание высшей математики.

Введение

Теория массового обслуживания изучает и описывает функционирование систем массового обслуживания. К примеру, теория массового обслуживания способна дать ответы на вопросы: каково среднее число абонентов, получающих отказ в установлении телефонного соединения, насколько большой будет средняя длина очереди, и в течение какого промежутка времени, в среднем, придется ждать начала обслуживания. Упомянутые качества системы массового обслуживания имеют приоритетное значение для клиентов. Слишком большие очереди, чрезмерное время ожидания обслуживания вызывают нарекания клиентов. Системами, имеющими подобные недостатки, сложно и нерентабельно пользоваться.

Теорией массового обслуживания называется наука о количественных закономерностях, которые позволяют описывать и настраивать деятельность таковых систем.

Сущность такой науки, как «теория массового обслуживания, состоит в том, чтобы обеспечить рациональное построение системы массового обслуживания» (Ивченко, 1982), исходя из анализа входящего потока заявок, структуры системы, дисциплины обслуживания и тех требований, которые к системе предъявляются.

С этой целью следует вычислять вероятностные оценки, призванные выступать в роли показателей эффективности деятельности системы, и изучать специфические характеристики системы. Следует отметить, что вероятностные оценки, которые вычисляются для различных типов систем массового обслуживания, в свою очередь оказываются разными.

Например, для системы с отказами основным показателем является вероятность отказа p_n, дополнительными показателями – вероятность простоя p_o, среднее число занятых аппаратов M_1.

Обзор литературы

Рассмотрим задачу подбора рационального числа обслуживающих аппаратов. Существуют разные способы решения этой задачи.

Например, путем вычисления чистого дохода, получаемого от работы системы массового обслуживания в единицу времени. Задачи данного типа рассмотрены в работе (Плескунов, 2022). В этой работе, например, анализируется экономическая эффективность возможного уменьшения вдвое среднего времени ремонта каждого из двух узлов за счет удвоения затрат на ремонт каждого узла (в единицу времени). В работе (Овчаров, 1969) рассматривается система массового обслуживания с отказами и устанавливается, при каких соотношениях стоимостей C_1, C_2, C_3 и через какой промежуток времени она начнет приносить прибыль, где C_1 – средняя прибыль в результате обслуживания одной заявки, C_2 – расходы на создание одного обслуживающего аппарата, C_3 – расходы по эксплуатации одного обслуживающего аппарата. Кроме того, для выбора наиболее эффективно работающей системы массового обслуживания может использоваться такой критерий, как пропускная способность. В работе (Овчаров, 1969) приведены примеры сравнения пропускной способности двух систем массового обслуживания. «Большое число примеров, позволяющих ознакомиться с принципами решения различных практических задач методами теории массового обслуживания с учетом экономических показателей, содержится в монографии» (Новиков, 1969). «В указанной работе часть задач решается путем вычисления экономических оценок, однако демонстрируется, что при решении других задач целесообразно применять иные методы» (Амосова, 2013), например, вычислять для исследуемой системы критерий ее экономической эффективности.

Результаты

В настоящей статье для решения задач подбора наиболее эффективного числа обслуживающих аппаратов вычисляется экономическая оценка работы системы, которая строится как показатель приведенных затрат.

Для системы массового обслуживания с отказами можно предложить, например, такую оценку (Амосова, 2013):

$$J = k_1 c_1 n + k_2 c_2 M_1 + k_3 c_3 (n - M_1) + k_4 c_4 p_n \lambda.$$

Здесь «n – число обслуживающих аппаратов; c_1 – цена аппарата; c_2, c_3 – текущие затраты на обслуживание работающего и неработающего аппаратов; c_4 – денежные потери от отказа в обслуживании; λ – среднее число требований, поступающих на обслуживание в единицу времени; k_1, k_2, k_3, k_4 – весовые коэффициенты» (Амосова, 2013).

«Одна из простейших экономических оценок вариантов системы с отказами может быть записана в виде:

$$J = \alpha c_1 n + c_2 M_1 + c_3 (n - M_1) + c_4 T p_n \lambda,$$

где α – коэффициент предельной экономической эффективности капитальных вложений (примем α = 0,15)» (Амосова, 2013); T – годовой фонд рабочего времени, M_1 – среднее число занятых аппаратов.

Эти оценки позволяют решать задачу подбора различных параметров обслуживающего комплекса, в том числе оптимального количества аппаратов.

В состав экономической оценки входят не только капитальные затраты (затраты на оборудование), но и текущие затраты на работу системы. Поэтому она представляет собой показатель приведенных затрат, объединение которых выполняется с учетом коэффициента приведения (коэффициент эффективности капитальных вложений), равного 0,15 у.е./у.е. год. Оптимальный вариант выбирается минимизацией функционала экономической оценки (функции нескольких переменных). В зависимости от исследуемого параметра это может достигаться перебором различных возможных его значений, исследованием производной или другими методами.

Заметим, что затраты подсчитываются за год, а потому надо следить за размерностями всех параметров, входящих в экономическую оценку.

Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 1. Найти оптимальное число сотрудников отдела технического контроля, которое необходимо для проверки качества продукции, выпускаемой предприятием. В том случае, когда изделие, поступившее на проверку, застает всех сотрудников занятыми, оно проходит без контроля.

«Исследование процесса работы системы, проведенное с применением методов математической статистики, позволило выяснить, что поток изделий является пуассоновским с параметром λ=0,5 шт./мин., а время проверки одного изделия – случайное, и распределено по показательному закону с параметром μ=0,25 шт./мин. При этом затраты на оснащение одного рабочего места сотрудника составляют c_1=500 у.е., а текущие затраты на его работу равны c_2=c_3=7500 у.е./год, финансовые же потери у потребителя изделий от возможного брака одного изделия оцениваются как c_4=50 у.е. Годовой фонд времени работы сотрудников примем за T = 6000 ч.» (Амосова, 2013).

Система, рассмотренная в примере 1, принадлежит классу систем с отказами. Описание принципов функционирования таковой системы и аналогичный пример можно найти в работе (Амосова, 2013). Система содержит n обслуживающих аппаратов. «Если в момент поступления очередного требования в системе присутствует хотя бы один свободный аппарат, он незамедлительно приступает к обработке входящего требования. Если же все обслуживающие аппараты оказываются занятыми, то поступившее требование встречает отказ в обслуживании» (Амосова, 2013).

Показатели эффективности (вероятностные оценки) в данной системе следующие (Черушева, 2021; Олейникова, 2021; Гнеденко, 1987; Амосова, 2013):

1. Вероятность отказа: $p_n = \frac{\rho^n}{n!} / \sum_{i=0}^{n} \frac{\rho^i}{i!}$.
2. Вероятность того, что занято k аппаратов: $p_k = \frac{\rho^k}{k!} / \sum_{i=0}^{n} \frac{\rho^i}{i!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$
3. Среднее число занятых аппаратов: $M_1 = \rho(1 - p_n)$.
4. Коэффициент занятости аппаратов: $K = M_1/n$.

Здесь $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$.

Оптимальное число сотрудников (n) будем искать с помощью экономической оценки, поскольку одни лишь вероятностные оценки не могут дать точный ответ.

Действительно, при увеличении числа сотрудников будет уменьшаться вероятность отказа. Но до какого предела сохранит целесообразность такое увеличение? Может быть, пропускать какое-то число изделий без контроля окажется выгоднее, чем увеличивать число сотрудников? Для решения данного вопроса нужно обратиться к экономической оценке.

Экономическая оценка для подобной системы массового обслуживания приводилась выше:

$$J = 0{,}15 \cdot c_1 n + c_2 M_1 + c_3(n - M_1) + c_4 T p_n \lambda.$$

В условиях нашего примера это

$$J = 0{,}15 \cdot 500 \cdot n + 7500 \cdot M_1 + 7500(n - M_1) + 50 \cdot 6000 \cdot p_n \cdot 0{,}5 \cdot 60.$$

$$J = 75n + 7500n + 9000000 p_n$$

или более подробно,

$$J = 7575n + 9000000 \cdot \frac{\rho^n}{n!} \Big/ \sum_{i=0}^{n} \frac{\rho^i}{i!} = 7575n + 9000000 \cdot \frac{2^n}{n!} \Big/ \sum_{i=0}^{n} \frac{2^i}{i!}.$$

Задачу будем решать перебором возможных значений числа n.

Для $n = 6$ получаем:

$$J = 7575 \cdot 6 + 9000000 \cdot \frac{2^6}{6!} \Big/ \sum_{i=0}^{6} \frac{2^i}{i!} =$$

$$= 45450 + 9000000 \cdot \frac{64}{720} \Big/ \left(1 + 2 + \frac{4}{2} + \frac{8}{6} + \frac{16}{24} + \frac{32}{120} + \frac{64}{720}\right) = 154212{,}15 \text{ (у.е)}.$$

Для $n = 7$ имеем:

$$J = 7575 \cdot 7 + 9000000 \cdot \frac{2^7}{7!} \Big/ \sum_{i=0}^{7} \frac{2^i}{i!} =$$

$$= 53025 + 9000000 \cdot \frac{128}{5040} \Big/ \left(1 + 2 + \frac{4}{2} + \frac{8}{6} + \frac{16}{24} + \frac{32}{120} + \frac{64}{720} + \frac{128}{5040}\right) =$$

$$= 53025 + 30967{,}75 = 83992{,}75.$$

Для $n = 8$ имеем:

$$J = 7575 \cdot 8 + 9000000 \cdot \frac{2^8}{8!} \Big/ \sum_{i=0}^{8} \frac{2^i}{i!} =$$

$$= 60600 + 9000000 \cdot \frac{256}{40320} \Big/ \left(1 + 2 + \frac{4}{2} + \frac{8}{6} + \frac{16}{24} + \frac{32}{120} + \frac{64}{720} + \frac{128}{5040} + \frac{256}{40320}\right) =$$

$$= 68335{,}29 \text{ (у.е)}.$$

Для $n = 9$ имеем:

$$J = 7575 \cdot 9 + 9000000 \cdot \frac{2^9}{9!} \Big/ \sum_{i=0}^{9} \frac{2^i}{i!} =$$

$$= 68175 + 9000000 \cdot$$

$$\cdot \frac{512}{362880} \Big/ \left(1 + 2 + \frac{4}{2} + \frac{8}{6} + \frac{16}{24} + \frac{32}{120} + \frac{64}{720} + \frac{128}{5040} + \frac{256}{40320} + \frac{512}{362880}\right) =$$

$$= 69893{,}62 \text{ (у.е.)}.$$

Таким образом, $n = 8$ – оптимальное число сотрудников.

При полученном значении числа сотрудников $n = 8$ характеристики системы таковы:

1. вероятность отказа $\rho_8 = 0{,}00086$;

2. среднее число занятых сотрудников $M_1 = 2(1 - 0{,}00086) = 1{,}998$;
3. коэффициент занятости сотрудников

$$K = \frac{1{,}998}{8} = 0.25.$$

Рассмотрим еще одну задачу.

Пример 2. Грузовые суда (балкеры) заняты перевозкой влажных сыпучих материалов. Определить оптимальное число *n* причалов промышленного порта, необходимых для приема таких судов.

«Статистическим обследованием установлено, что поток поступления балкеров - простейший с параметром λ=0,5 шт./сут., а время разгрузки одного судна подчинено показательному закону с параметром μ = 0,5 шт./сут. Известно, что цена оборудования одного причала 100000 у.е., текущие затраты на содержание работающего причала c_2 = 400 у.е./сут, а незадействованного причала – c_3 = 200 у.е./сут., приведенные затраты на содержание груженого судна равны $c_4' = 1000$ у. е/сут. Если груз ожидает обслуживания на протяжении более чем двух суток с момента прибытия, то условия его разгрузки усложняются и оказываются связанными с дополнительными текущими затратами в 600 у.е./сут. В таком случае уже $c_4'' = 1600$ у. е./сут. Принимаем годовой фонд времени работы системы равным T=365 сут.» (Амосова, 2013).

Система из примера 2 относится к классу систем с ожиданием и неограниченной очередью. Формализуем ее работу (Амосова, 2013). Итак, наша «система включает *n* обслуживающих аппаратов, в нее поступает простейший поток требований с параметром λ. Единовременно один аппарат может обрабатывать только одно требование. Если на момент поступления очередного требования в системе уже присутствует $k \geq n$ требований, то новое требование становится в очередь и ждет начала обслуживания в порядке очереди. Время обслуживания одного требования подчиняется показательному закону с параметром μ» (Амосова, 2013).

Заметим, что аналогичную задачу можно найти в работе (Амосова, 2013), а показатели эффективности работы такого типа системы (вероятностные оценки) можно найти, например, в изданиях (Розенберг, 1965; Романенко, 2021; Ивченко, 1982; Амосова, 2013), и они имеют следующий вид:

1. Вероятность того, что все обслуживающие аппараты свободны:

$$p_0 = \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k + \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{n\mu}{n\mu-\lambda}\right]^{-1}.$$

2. Вероятность того, что требование, поступившее в систему, будет ждать начала обслуживания, т.е. вероятность ожидания:

$$\Pi = \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0 \Big/ \left(1 - \frac{\lambda}{n\mu}\right).$$

3. Вероятность того, что время ожидания начала обслуживания β, т.е. время пребывания в очереди, меньше *t*:

$$P(\beta < t) = \begin{cases} 0, \text{если } t \leq 0 \\ 1 - \Pi e^{-(n\mu-\lambda)\cdot t}, \text{если } t > 0 \end{cases}$$

4. Среднее время ожидания начала обслуживания:

$$M\beta = \Pi/(n\mu - \lambda).$$

5. Средняя длина очереди:

$$M_1 = p_n \cdot \frac{\lambda}{n\mu} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{\lambda}{n\mu}\right)^2},$$

где $p_n = \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0$ – вероятность того, что заняты все *n* аппаратов.

6. Среднее число аппаратов, свободных от обслуживания:

$$M_2 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n-k}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k p_0.$$

При этом вероятность того, что в системе находится k требований ($k \geq 1$), вычисляется по формуле:

$$p_k = \begin{cases} \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k p_0, & 1 \leq k < n \\ \frac{1}{n!n^{k-n}} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k p_0, & k \geq n \end{cases}.$$

Заметим, что все формулы получены при условии, что $\frac{\lambda}{n\mu} < 1$. В противном случае, т.е. если принять $\frac{\lambda}{n\mu} \geq 1$, мы получим значение p_0, равное нулю, и тогда все $p_k = 0$ $(k \geq 1)$. Но на практике это означает возникновение кризисной ситуации, при которой наша система не справляется с обслуживанием вследствие неограниченного роста очереди.

Задачи, которые можно «решать в таком случае, связаны с выбором оптимального числа обслуживающих аппаратов, определением среднего размера очереди, расчетом пропускной способности системы и др.» (Олейникова, 2021).

«Одна из возможных экономических оценок вариантов системы имеет вид:

$$J = \alpha c_1 n + c_3 M_2 + c_2(n - M_2) + c_4 M_1 T,$$

где через α обозначен коэффициент предельной экономической эффективности капиталовложений; через c_1 обозначена цена одного аппарата; через c_2 и c_3 обозначены годовые текущие затраты на обслуживание работающего и простаивающего аппаратов соответственно; через c_4 – приведенные затраты на содержание стоящих в очереди на обслуживание требований в единицу времени; через T – годовой фонд времени работы системы» (Амосова, 2013).

«В общем случае c_4 не является постоянной величиной, а зависит от времени ожидания, и поэтому соответствующая составляющая оценки затрат (величины J) может записываться в виде:

$$J = c_4' M_1 P(\beta < \beta_0) + c_4'' M_1 P(\beta \geq \beta_0),$$

где β_0 – некоторое фиксированное время ожидания» (Амосова, 2013).

Разберемся в математических аспектах примера 2. Экономическая оценка в этом примере имеет вид:

$$J = 0.15 \cdot 100000n + 200 \cdot 365M_2 + 400 \cdot 365(n - M_2) +$$

$$+1000 \cdot 365 \cdot P(\beta < 2)M_1 + 1600 \cdot 365 \cdot P(\beta > 2)M_1 =$$

$$= 161000n - 73000M_2 + 365M_1\big(1000 \cdot P(\beta < 2) + 1600 \cdot P(\beta > 2)\big).$$

Если $n = 2$, то

$$p_0 = \left(1 + 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - 0.5}\right)^{-1} = \frac{1}{3},$$

$$p_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6},$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} / \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3},$$

$$P(\beta < 2) = 1 - \frac{1}{3}e^{-1} = 0.8774,$$

$$P(\beta > 2) = 1 - 0.8774 = 0.1226,$$

$$M_1 = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{3},$$

$$M_2 = 2 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1,$$

$$J(2) = 322000 - 73000 + \frac{365}{3}(877.4 + 196.16) = 379616.47 \text{ (у.е.)}.$$

Если $n = 3$, то

$$p_0 = \left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\cdot\frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}\right)^{-1} = \frac{4}{11},$$

$$p_3 = \frac{1}{6}\cdot\frac{4}{11} = \frac{2}{33},$$

$$\Pi = \frac{1}{6}\cdot\frac{4}{11}\Big/\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{11},$$

$$P(\beta < 2) = 0.9877,$$

$$P(\beta > 2) = 0.0123,$$

$$M_1 = \frac{2}{33}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{22},$$

$$M_2 = 3\cdot\frac{4}{11} + 2\cdot\frac{4}{11} + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{11} = 2,$$

$$J(3) = 483000 - 146000 + 365\cdot\frac{1}{22}\ (1000\cdot 0{,}9877 + 1600\cdot 0{,}0123) =$$

$$= 353713{,}35 \text{ (у.е.)}.$$

Если $n = 4$, то

$$p_0 = \left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24}\cdot\frac{2}{\frac{5}{2}}\right)^{-1} = \frac{18}{49},$$

$$p_4 = \frac{3}{196},$$

$$\Pi = \frac{1}{24}\cdot\frac{18}{49}\Big/\left(1-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{49},$$

$$P(\beta < 2) = 1 - \frac{1}{49}e^{-3} = 0.999,$$

$$P(\beta > 2) = 0.001,$$

$$M_1 = \frac{3}{196}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{1}{147},$$

$$M_2 = \left(4 + 3 + \frac{2}{2} + \frac{1}{6}\right)\cdot\frac{18}{49} = 3,$$

$$J(4) = 644000 - 219000 + 365\cdot\frac{1}{147}(999 + 1{,}6) =$$

$$= 644000 - 219000 + 2484{,}483 = 427484{,}483 \text{ (у.е.)}.$$

Из полученных результатов следует, что оптимальное число причалов промышленного порта $n = 3$.

При этом значении n вероятность простоя $p_0 = \frac{4}{11}$, вероятность того, что заняты все 3 причала $p_3 = \frac{2}{33}$, вероятность того, что балкеру придется ожидать освобождения причала для разгрузки $\Pi = \frac{1}{11}$, т.е. очереди практически нет.

Средняя длина очереди ожидающих балкеров $M_1 = 0{,}045$, среднее число свободных причалов $M_2 = 2$.

Рассмотрим еще один пример. (Дополнительные примеры можно найти в издании (Глухов, 2000)).

Пример 3. Фирма имеет четыре агрегата, применяемых для испытания готовой продукции. «Поток изделий, выпускаемых фирмой – простейший с параметром 5шт/ч, а время испытания – случайное и распределено по показательному закону с параметром 4 шт/ч. Если все агрегаты заняты испытаниями, то вновь поступившее изделие становится в очередь и ждет начала испытания в порядке этой очереди. На длину очереди не налагается никаких ограничений» (Гнеденко, 1987).

Ставится задача оценить работу агрегатов, если стоимость одного агрегата равна 2000 у.е., текущие расходы по обслуживанию работающего агрегата составляют 30 у.е./сут., а простаивающего – 20 у.е./сут., приведенные затраты на содержание ожидающих изделий составляют 10 у.е./сут.

Необходимо решить вопрос о целесообразности уменьшения числа агрегатов. Годовой фонд времени работы системы оценим в 6000 часов.

Экономическая оценка в этом примере имеет вид:

$$J = 0{,}15 \cdot 2000n + \frac{20}{24} \cdot 6000 \cdot M_2 + \frac{30}{24} \cdot 6000(n - M_2) + \frac{10}{24} \cdot 6000M_1 =$$

$$= 7800n + 2500(M_1 - M_2).$$

Заметим, что $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{5}{4}$.

В случае $n = 2$ имеем

$$p_0 = \left(1 + \frac{5}{4} + \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^2\right)^{-1} = \frac{3}{13},$$

$$p_2 = \frac{75}{416},$$

$$M_1 = \frac{125}{156},$$

$$M_2 = \left(2 + \frac{5}{4}\right) \cdot \frac{3}{13} = \frac{13}{4} \cdot \frac{3}{13} = \frac{3}{4},$$

$$J(2) = 15600 + 2500\left(\frac{125}{456} - \frac{3}{4}\right) = 15728{,}2 \text{ (у.е.)}.$$

Если n = 3, то

$$p_0 = \left(1 + \frac{5}{4} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^2 + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^3 \cdot \frac{12}{7}\right)^{-1} = \frac{56}{201},$$

$$p_3 = \frac{875}{9648},$$

$$M_1 = \frac{875 \cdot 5 \cdot 12}{9648 \cdot 49} = \frac{625}{5628},$$

$$M_2 = \left(3 + 2 \cdot \frac{5}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{5}{4}\right)^2\right) \cdot \frac{56}{201} = \frac{7}{4},$$

$$J(3) = 23400 + 2500\left(\frac{625}{5628} - \frac{7}{4}\right) = 19302{,}63 \text{ (у.е.)},$$

Если n = 4, то

$$p_0 = \left(1 + \frac{5}{4} + \frac{25}{32} + \frac{1}{6}\left(\frac{5}{4}\right)^3 + \frac{1}{24}\left(\frac{5}{4}\right)^4 \cdot \frac{16}{11}\right)^{-1} = \frac{264}{719},$$

$$p_4 = \frac{625 \cdot 3 \cdot 11}{24 \cdot 32 \cdot 719} = \frac{6875}{184064} = 0{,}037,$$

$$M_1 = \frac{6875}{184064} \cdot \frac{5}{16} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{5}{10}\right)^2} = 0{,}0247,$$

$$M_2 = \left(4 + 3 \cdot \frac{5}{4} + \left(\frac{5}{4}\right)^2 + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^3\right) \cdot \frac{264}{719} = 3{,}539,$$

$$J(4) = 31200 + 2500(0{,}0247 - 3{,}539) = 22414{,}25 \text{ (у.е.)}.$$

Экономическая оценка показывает, таким образом, что оптимальное число агрегатов *n = 2*. При таком числе агрегатов вероятность их простоя $p_0 = 0{,}23$, вероятность того, что все агрегаты работают, $p_2 = 0{,}18$, средняя длина очереди равна 0,8, а среднее число агрегатов, свободных от обслуживания, составляет не более 1. В остальных случаях число простаивающих агрегатов оказывается бóльшим, что невыгодно с экономической точки зрения.

Соответствующие экономические оценки можно написать и для других «видов систем массового обслуживания. Например, для системы с ожиданием и с ограничениями по длине очереди. Отличие такой системы от рассмотренной выше будет заключаться в том, что требование, поступившее в систему в момент, когда все обслуживающие аппараты заняты, становится в очередь лишь при условии, что в ней уже имелось не более $(m-1)$ требования. Если же в очереди уже содержится *m* требований, то очередное требование покидает систему необслуженным. Таким образом, система отказывает требованию в обслуживании при условии» (Овчаров, 1969), что в ней уже присутствует $l = n + m$ требований.

Основные показатели эффективности (вероятностные оценки) для такого типа систем можно найти в работах (Солнышкина, 2015; Розенберг, 1965; Овчаров, 1969; Амосова, 2013), и они имеют вид (в предположении, что $\frac{\lambda}{n\mu} < 1$):

1. Вероятность того, что все обслуживающие аппараты свободны:

$$p_0 = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k + \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{m+1}}{1 - \frac{\lambda}{n\mu}} \right)^{-1}.$$

2. Вероятность получения отказа при поступлении нового требования:

$$p_l = \frac{p_0}{n!\, n^m}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^l.$$

3. Вероятность того, что все обслуживающие аппараты заняты:

$$\Pi = p_n \frac{1 - \left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^{m+1}}{1 - \frac{\lambda}{n\mu}},$$

причём

$$p_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0.$$

4. Средняя длина очереди:

$$M_1 = p_n \frac{\frac{\lambda}{n\mu}}{\left(1 - \frac{\lambda}{n\mu}\right)^2}\left[1 - (m+1)\left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^n + m\left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^{m+1}\right].$$

5. Среднее число свободных от обслуживания аппаратов:

$$M_2 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n-k}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k p_0.$$

«Предложим следующую экономическую оценку вариантов системы:

$$J = \alpha c_1 n + c_2(n - M_2) + c_3 M_2 + c_4 T \lambda p_l + c_5 M_1 T_1,$$

где α – коэффициент предельной экономической эффективности капитальных вложений; c_1 – стоимость аппарата; c_2 и c_3 – годовые текущие затраты на обслуживание работающего и незадействованного аппаратов соответственно; c_4 – финансовые потери производства от невыполнения одной работы (потери одного отказа); c_5 – приведенные затраты на содержание требований в единицу времени; *T* – годовой фонд времени работы системы» (Амосова, 2013).

Пример 4.

«Предприятие принимает и обслуживает заявки на доставку грузов, имея в своем распоряжении *n* транспортных средств. Предприятие работает круглосуточно. Статистическим обследованием установлено, что в среднем за час поступает $\lambda = 4$ заявки, а среднее время обслуживания заявки составляет $T_{\text{обсл.}} = \frac{3}{4}$ часа $\left(\mu = \frac{4}{3}\right)$. В момент, когда число заявок, ожидающих обслуживания, достигает числа $m = 5$, приём заявок прекращается до тех пор, пока очередь не уменьшится» (Амосова, 2013). Ставится задача определения оптимального числа *n* необходимых транспортных средств, которыми должно располагать предприятие, если цена одного транспортного средства составляет 5000 у.е., текущие затраты на обслуживание работающего и простаивающего транспортного средства (оплата обслуживающего персонала) $c_2 = c_3 = 5$ у. е./сутки, затраты на содержание требований в единицу времени $c_5 = 16$ у. е./сутки, а финансовые потери предприятия при невыполнении одной заявки равны $c_4 = 7$ у. е./сутки. Годовой фонд времени работы системы составляет 6000 часов.

Приведем решение примера 4. (Дополнительные примеры можно найти в работе (Амосова, 2013).

Экономическая оценка вариантов данной системы массового обслуживания принимает вид:

$$J = 0{,}15 \cdot 5000n + \frac{5}{24} \cdot 6000(n - M_{2)} + \frac{5}{24} \cdot 6000M_2 +$$

$$+\frac{7}{24} \cdot 6000 \cdot 4 \cdot p_{n+5} + \frac{16}{24} \cdot 6000M_1 = 2000n + 1750p_{n+5} + 4000M_1.$$

В нашем примере

$$\lambda = 4, \ \mu = \tfrac{4}{3}, \ \ \tfrac{\lambda}{\mu} = 3, \ m = 5.$$

Возьмём $n = 4$. Тогда

$$p_0 = \left(1 + 3 + \tfrac{1}{2} \cdot 9 + \tfrac{1}{6} \cdot 27 + \tfrac{1}{24} \cdot 3^4 \cdot \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^6}{1 - \frac{3}{4}}\right)^{-1} = 0{,}0415,$$

$$p_9 = \frac{1}{24 \cdot 4^5} \cdot 3^9 \cdot 0{,}0415 = 0{,}0332,$$

$$M_1 = \tfrac{1}{24} \cdot 3^4 \cdot 0{,}0415 \cdot \frac{\frac{3}{4}}{\left(1 - \frac{3}{4}\right)^2} \cdot \left(1 - 6 \cdot \left(\tfrac{3}{4}\right)^5 + 5\left(\tfrac{3}{4}\right)^6\right) = 0{,}7834,$$

$$M_2 = \left(4 + 3 \cdot 3 + \tfrac{2}{2} \cdot 9 + \tfrac{1}{6} \cdot 27\right)p_0 = 1{,}09975,$$

$$J(4) = 8000 + 58{,}1 + 3133{,}6 = 11191{,}7 \text{ (у.е.)}.$$

Если $n = 5$, то

$$p_0 = \left(1 + 3 + \tfrac{9}{2} + \tfrac{27}{6} + \tfrac{1}{24} \cdot 3^4 + \tfrac{1}{120} \cdot 35 \cdot \frac{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^6}{1 - \frac{3}{5}}\right)^{-1} = 0{,}047,$$

$$p_{10} = \frac{1}{120 \cdot 5^5} \cdot 3^{10} \cdot 0{,}0047 = 0{,}0074,$$

$$M_1 = \tfrac{1}{120} \cdot 3^5 \cdot 0{,}047 \cdot \frac{\frac{3}{5}}{\left(1 - \frac{3}{5}\right)^2}\left(1 - 6\left(\tfrac{3}{5}\right)^5 + 5 \cdot \left(\tfrac{3}{5}\right)^6\right) = 0{,}2756,$$

$$M_2 = \left(5 + 4 \cdot 3 + \tfrac{3}{2} \cdot 9 + \tfrac{2}{6} \cdot 27 + \tfrac{1}{24} \cdot 3^4\right)p_0 = 2{,}015.$$

$$J(5) = 10000 + 12{,}95 + 1094{,}4 = 11107{,}35 \text{ (у.е.)}$$

Если $n = 6$, то

$$p_0 = \left(1 + 3 + \frac{9}{2} + \frac{27}{6} + \frac{1}{24} \cdot 3^4 + \frac{1}{120} \cdot 3^5 + \frac{1}{720} \cdot 3^6 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^6}{1-\frac{1}{2}}\right)^{-1} = 0{,}049,$$

$$p_{11} = p_0 \cdot \frac{3^{11}}{720 \cdot 6^5} = 0{,}00155,$$

$$M_1 = p_0 \cdot \frac{1}{120} \cdot 3^6 \cdot \frac{\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}\left(1 - 6\left(\frac{1}{2}\right)^5 + 5\left(\frac{1}{2}\right)^6\right) = 0{,}088,$$

$$M_2 = \left(6 + 5 \cdot 3 + \frac{4}{2} \cdot 3^2 + \frac{3}{6} \cdot 3^3 + \frac{2}{24} \cdot 3^4 + \frac{1}{120} \cdot 3^5\right) p_0 = 3{,}002,$$

$$J(6) = 12000 + 2{,}7125 + 352 = 12354{,}7125\ (\text{у.е.}).$$

Таким образом, оптимальное число транспортных средств должно составить $n = 5$. В этом случае вероятность отказа $p_{10} = 0{,}0074$ (практически равна нулю), средняя длина очереди меньше 1 (т.е. очереди практически нет), а среднее число свободных средств равно 2. Если увеличить число транспортных средств, то число простоев возрастает до 3.

С исследованиями прочих систем массового обслуживания можно ознакомиться в работах (Клейнрок, 1979; Саати, 1965), с экономическими оценками для различных систем массового обслуживания – в работах (Амосова, 2001; Амосова, 2013; Amossowa, 1986).

Заключение

При изучении работы системы массового обслуживания целесообразно находить не только показатели эффективности (вероятностные оценки), но и анализировать экономическую оценку функционирования системы. Экономические оценки организации обслуживания вводятся в основном для систем производственного характера и строятся как показатели произведенных затрат. Такие оценки позволяют выбрать оптимальный вариант параметров системы с целью улучшения экономических показателей ее работы.

В статье подробно рассмотрены четыре прикладные задачи нахождения оптимального числа обслуживающих аппаратов для систем массового обслуживания с различными характеристиками. Данные задачи следует рассматривать как важное средство мотивации и веский аргумент в пользу изучения теории массового обслуживания в рамках профессиональной подготовки инженерных кадров различных направлений.

Список литературы

Амосова Н.Н., Куклин Б.А., Макарова С.Б. и др. Вероятностные разделы математики. Учебник для бакалавров технических направлений / Под общей редакцией Ю.Д. Максимова. СПб: «Иван Федоров», 2001.

Амосова Н.Н., Максимов Ю.Д. Математика. Теория массового обслуживания. Учебное пособие. СПб: Изд-во Политехн. ун-та, 2013.

Глухов В.В., Медников М.Д., Коробко С.Б. Математические методы и модели для менеджмента. СПб: Изд-во Лань, 2000.

Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. литературы, 1987.

Ивченко Г.И., Каштанов В.А., Коваленко И.Н. Теория массового обслуживания. М.: Высшая школа, 1982.

Клейнрок Л. Теория массового обслуживания. М.: Машиностроение, 1979.

Новиков О.А., Петухов С.И. Прикладные вопросы теории массового обслуживания. М.: Сов. радио, 1969.

Овчаров Л.А. Прикладные задачи теории массового обслуживания. М.: Машиностроение, 1969.

Олейникова С.А. Математическое моделирование и системы массового обслуживания. Воронеж: Изд-во ВГТУ, 2021.

Плескунов М.А. Теория массового обслуживания. Екатеринбург. Изд-во Уральского университета, 2022.

Розенберг В.Я., Прохоров А.И. Что такое теория массового обслуживания. М.: Сов. радио, 1965.

Романенко В.А. Системы и сети массового обслуживания. Самара: Изд-во Самарского университета, 2021.

Саати Т.Л. Элементы теории массового обслуживания и её приложения. М.: Сов. Радио, 1965.

Солнышкина И.В. Теория массового обслуживания. Комсомольск-на-Амуре: КнАГТУ, 2015.

Черушева Т.В., Зверовщикова Н.В. Теория массового обслуживания. Пенза: Изд-во ПГУ, 2021.

Amossowa N., Gillert H., Küchler U., Maximow J.D. Bedienungstheorie. Leipzig. Teubner Verlagsgesellschaft, 1986.

ECONOMIC ESTIMATES IN THE THEORY OF QUEUING: METHODOLOGICAL TECHNIQUES

Amosova N. N.
Cand. Sci. (Phys. and Math.)
associate professor
amosova_nn@spbstu.ru
St. Petersburg

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University

Abstract. The article is devoted to the methods of teaching such an important section of economic and mathematical modeling as the theory of queuing. Queuing theory is the fundamental basis for the cost-effective design and operation of queuing systems. The problem that arises in this case is related to the problem of establishing a connection between system parameters (i.e. the number of service devices, queue length, waiting time in queue) and the quality of service, which are the probability of failure, average waiting time in queue, etc. If we limit ourselves to solving this problem only with probabilistic estimates (performance indicators), then they will be ineffective. For example, you set a goal: to reduce the length of the queue. However, this will lead to an increase in the number of service devices, which may be unprofitable from an economic point of view. Therefore, it is better to focus either on the maximum profit from the operation of queuing systems, or on the minimum total losses that are associated with downtime of service devices, loss of applications, and idleness of applications in the queue. Parameters that can usually be varied are the number of service machines, queue length, service priority, etc. This paper examines common types of queuing systems depending on the availability of a queue and the permissible length of the queue for service. The probabilistic basis for studying and optimizing the operating parameters of such systems is presented. Four representative examples that have been successfully introduced into teaching practice are examined in detail.

Keywords: queuing theory, probabilistic estimates, economic estimates, optimization of queuing systems, teaching higher mathematics.

References

Amosova, N. N., Kuklin, B. A., Makarova, S. B. i dr. (2001). *Verojatnostnye razdely matematiki. Uchebnik dlja bakalavrov tehnicheskih napravlenij.* Pod obshhej redakciej Ju.D. Maksimova. S.-Peterburg: «Ivan Fedorov». (In Russ).

Amosova, N. N., Maksimov, Ju. D. (2013). Matematika. *Teorija massovogo obsluzhivanija. Uchebnoe posobie.* S.-Peterburg: Izd-vo Politehn. un-ta. (In Russ).

Amossowa, N., Gillert, H., Küchler U., Maximow, J.D. (1986). Bedienungstheorie. Leipzig: Teubner Verlagsgesellschaft.

Gluhov V.V., Mednikov M.D., Korobko S.B. *Matematicheskie metody i modeli dlja menedzhmenta*. SPb: Izd-vo Lan', 2000. (In Russ).

Gnedenko, B. V., Kovalenko, I. N. (1987). *Vvedenie v teoriju massovogo obsluzhivanija*. 2-e izd., pererab. i dop. Moscow: Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit. (In Russ).

Ivchenko, G. I., Kashtanov, V. A., Kovalenko, I. N. (1982). *Teorija massovogo obsluzhivanija.* Moscow: Vysshaja shkola. (In Russ).

Klejnrok, L. (1979). *Teorija massovogo obsluzhivanija.* Moscow: Mashinostroenie. (In Russ).

Ovcharov, L. A. (1969). *Prikladnye zadachi teorii massovogo obsluzhivanija.* Moscow: Mashinostroenie. (In Russ).

Olejnikova, S. A. (2021). *Matematicheskoe modelirovanie i sistemy massovogo obsluzhivanija.* Voronezh: Izd-vo VGTU. (In Russ).

Pleskunov, M. A. (2022). *Teorija massovogo obsluzhivanija.* Ekaterinburg. Izd-vo Ural'skogo universiteta. (In Russ).

Rozenberg, V. Ja., Prohorov, A. I. (1965). *Chto takoe teorija massovogo obsluzhivanija.* Moscow: Sov. radio. (In Russ).

Romanenko, V. A. (2021). *Sistemy i seti massovogo obsluzhivanija.* Samara: Izd-vo Samarskogo universiteta. (In Russ).

Saati, T. L. (1965). *Jelementy teorii massovogo obsluzhivanija.* Moscow: Sov. radio. (In Russ).

Solnyshkina, I. V. (2015). *Teorija massovogo obsluzhivanija.* Komsomol'sk-na-Amure: KnAGTU. (In Russ).

Cherusheva, T. V., Zverovshhikova, N. V. (2021). *Teorija massovogo obsluzhivanija.* Penza: Izd-vo PGU. (In Russ).

Статья поступила в редакцию 30.03.2024
Принята к публикации 10.06.2024