МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ И ИНФОРМАТИКЕ В СИСТЕМЕ ОБЩЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

DOI: 10.24888/2500-1957-2024-4-8-28

УДК 372.851

СОДЕРЖАНИЕ И ЗАКОНОМЕРНОСТИ ФОРМИРОВАНИЯ ВЕКТОРНОГО МЕТОДА ИССЛЕДОВАНИЯ В МОДЕЛЬНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

Горбачев Василий Иванович
д. п. н., профессор
enibgu@mail.ru
г. Брянск
Брянский государственный университет ак. им. И.Г. Петровского

Пузырева Елизавета Николаевна
ст. преподаватель
puzyreva-knysh@yandex.ru
г. Брянск
Брянский государственный университет ак. им. И.Г. Петровского

Аннотация. В содержании представлений евклидова пространства выделяется его векторная модель, насыщенная векторными моделями геометрических фигур. В представлении арифметического пространства создаётся векторно-координатная модель евклидова пространства с векторно-координатными моделями геометрических фигур. В системах векторных и векторно-координатных моделей геометрических фигур выделяется содержание векторного метода исследования их свойств. Анализ содержания векторного метода исследования, системы закономерностей его формирования выступает актуальной задачей теории и методики обучения математике. Это связано с тем, что умение устанавливать свойства геометрических фигур с помощью эффективного аппарата векторной алгебры требует развития множества мыслительных операций субъекта, что способствует повышению общей умственной подготовки учащихся.

Ключевые слова: учебная геометрическая деятельность, модели геометрического и евклидова пространств, векторный, векторно-координатный методы исследования.

Введение

В классической методической системе обучения геометрии уровня общего образования (Атанасян, 2010), (Погорелов, 1995), (Александров, 2014), (Смирнова, 2008), (Потоскуев, 2008) «представления геометрического и евклидова пространств традиционно не выделяются, модельные образы различных математических пространств не систематизируются. Помимо математико-мировоззренческой сложности дифференциации представлений геометрического и евклидова пространств, обучающиеся испытывают серьёзные затруднения в анализе соответствия модельных образов геометрических фигур и базовых (аналитико-синтетического, векторного, аналитического) методов исследования их пространственных и метрических свойств» (Горбачев, 2020).

Соответствие пространственных образов геометрических фигур наглядно-образной модели геометрического пространства и векторных, векторно-координатных моделей геометрических фигур аффинного (евклидова) пространства позволяет осуществлять интерпретацию векторной формы свойств геометрических фигур в содержании геометрического пространства. Тем самым векторная и векторно-координатная модели евклидова пространства преобразуются в векторную модель геометрического пространства с векторным методом исследования. Модельно-абстрактные представления аффинного (евклидова) и геометрического пространств опосредуют формирование векторного метода исследования, однако его содержание только представлениями математических пространств не ограничивается. Более того, деятельностная структура векторного метода, закономерности его формирования в учебной геометрической деятельности выступают открытой методической проблемой.

Обзор литературы

Как геометрическое пространство не охватывает содержание учебной геометрической деятельности, так и его наглядно-образная модель не определяет весь спектр модельных образов геометрических фигур (Горбачев, 2022). На ограниченность в учебной геометрической деятельности уровня общего образования представления только наглядно-образной модели геометрического пространства, при всей её общекультурной значимости, указывают Н.М. Рогановский и А.А. Столяр: «Традиционный, школьный путь построения геометрии, идущей от Евклида (III в. до н.э.) и доведённый до логического совершенства Д. Гильбертом (1899), не является ни единственно возможным, ни наиболее рациональным» (Рогановский, Столяр, 1974, 3).

Новый «векторный путь построения геометрии» авторы связывают с представлением векторной модели аффинного (евклидова) пространства: «Наша цель – использование понятия векторного пространства для построения геометрии, поэтому с самого начала мы ограничимся построением геометрической модели векторного пространства» (Рогановский, Столяр, 1974, 29).

В учебной геометрической деятельности модельная систематизация абстрактного евклидова пространства наследует задачу, определённую Г. Вейлем в фундаментальной работе «Пространство, время, материя» – «изучить закономерности пространства во всей их математической гармонии» (Вейль, 1996, 33). Согласно Г. Вейлю, основой создания в субъектном сознании абстрактного понятия вектора выступает наглядно-интуитивное понятие переноса: «Перенос, или смещение, $\vec{a}$ пространства мы в дальнейшем будем обозначать вектором. Если P и Q – какие-нибудь две точки, то существует один и только один перенос $\vec{a}$, который переводит P в Q. Будем называть его вектором, определяемым точками P и Q, и обозначать $\overrightarrow{PQ}$» (Вейль, 1996, 26). В системе аксиом Г. Вейля, определяющих абстрактное векторное (аффинное) пространство, «фигурируют две основные категории объектов, точки и вектора, и три основных соотношения, которые выражаются символически в виде: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}, \vec{b}=\lambda\vec{a}, \overrightarrow{AB}=\vec{a}$» (Вейль, 1996, 28). Наряду с представлением абстрактного аффинного пространства Г. Вейль выделяет в качестве отдельного конструкта его дедуктивную теорию: «Совокупность всех теорем, которые можно вывести чисто логически из этих аксиом, образует систему аффинной геометрии. Эта система, таким образом, может быть дедуктивно построена на изложенном здесь аксиоматическом базисе» (Вейль, 1996, 28). Универсальной характеристикой абстрактного аффинного пространства по Вейлю выступает аксиома размерности («имеются n линейно независимых векторов, но всякие $n+1$ векторов линейно зависимы друг от друга») (Вейль, 1996, 28), позволяющая выделять в абстрактном аффинном базисе векторные аналоги пространства ($n=3$), плоскости ($n=2$), прямой ($n=1$). Подчёркивая, что «геометрия не содержит ничего из того, что связано с наглядным пространством», Г. Вейль преобразует аффинное пространство в евклидово пространство введением метрической аксиомы, определяющей абстрактную форму скалярного произведения – «билинейная симметричная форма двух векторов» (Вейль, 1996, 28). С преобразованием аффинного пространства в евклидово пространство, отмечает Г. Вейль, система аффинной геометрии углубляется в содержании также имеющей дедуктивный характер метрической геометрии. В содержании аффинной геометрии вводятся абстрактные аналоги базовых фигур геометрического пространства: «если O – некоторая точка, $\vec{a}$ – отличный от $\vec{0}$ вектор, то конечная точка P всех векторов $\overrightarrow{OP}$ вида $\lambda\vec{a}$ образует прямую» (Вейль, 1996, 28); «если мы запишем $\overrightarrow{a_1}$ вместо $\vec{a}$ и обозначим $\overrightarrow{a_2}$ другой вектор, не имеющий форму $\lambda\overrightarrow{a_1}$, то конечные точки P всех векторов $\overrightarrow{OP}$ вида $\lambda_1\overrightarrow{a_1} + \lambda_2\overrightarrow{a_2}$ образует плоскость» (Вейль, 1996, 28); «та часть h-мерной оболочки, образованной откладыванием всех векторов $\lambda_1\overrightarrow{a_1} + \lambda_2\overrightarrow{a_2} + \lambda_h\overrightarrow{a_h}$ из точки O, которая получается, если наложить на λ ограничение $0 \le \lambda_1 \le 1, 0 \le \lambda_2 \le 1, \dots, 0 \le \lambda_h \le 1$, называется h-мерным параллелепипедом, натянутым на векторы $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$,…, $\overrightarrow{a_h}$, исходящие из точки O (одномерный параллелепипед называется отрезком, двумерный – параллелограммом)» (Вейль, 1996, 30). С позиции последующего развития представлений аффинного пространства фундаментальный характер имеют введённые в абстрактном аффинном пространстве понятия:

- координатной системы – «точку O вместе с n линейно независимыми векторами $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$,…, $\overrightarrow{a_n}$ мы будем называть координатной системой»;

- координат вектора – «каждый вектор $\vec{x}$ можно одним и только одним образом представить в форме $\vec{x} = \lambda_1\overrightarrow{a_1} + \lambda_2\overrightarrow{a_2} + \lambda_n\overrightarrow{a_n}$, числа λ_i будем называть его компонентами в координатной системе»;

- координат точки – «если P – произвольная точка и $\overrightarrow{OP}$ равен вектору $\lambda_1\overrightarrow{a_1} + \lambda_2\overrightarrow{a_2} + \lambda_n\overrightarrow{a_n}$, то λ_i называют также координатами P»;

- инвариантности координатной системы – «все координатные системы в аффинной геометрии равноправны; не существует никакого аффинно-геометрического свойства, с помощью которого можно отличать одну систему от другой» (Вейль, 1996, 30).

Проектирование учебной геометрической деятельности в содержании аксиоматического метода, но иными, отличными от гильбертовских, средствами осуществляется в системе фундаментальных закономерностей развития «аффинной и метрической геометрии» Г. Вейля:

- «аксиоматического определения абстрактного аффинного пространства и его дальнейшей аксиоматизации в абстрактное евклидово пространство»;

- «систематизации аффинного и евклидова пространств посредством понятия размерности»;

- «опирающегося на наглядно-интуитивные представления геометрического пространства векторного моделирования понятий аффинного и евклидова пространств с их последующей интерпретацией в содержании абстрактного геометрического пространства».

В.Г. Болтянский, М.Б. Волович, А.Д. Семушин отмечают, что «с формально-логической точки зрения вейлевский путь аксиоматизации эквивалентен гильбертовскому, так как позволяет доказать те же теоремы геометрии», но при этом имеет ряд существенных преимуществ: «является наиболее современным в научном отношении, оперирует важным в современной математике понятием векторного пространства, делает изложение геометрии наиболее кратким» (Болтянский, Волович, Семушин, 1982, 6).

Система имеющего концептуальную форму дедуктивного построения Г. Вейлем категорий аффинного и евклидова пространств конкретизируется авторами в задаче «изложения аксиоматики пространственной геометрии по Герману Вейлю» (Болтянский, Волович, Семушин, 1982, 35). «На базе неопределяемых понятий «вектор» и «точка», вводятся тернарные отношения «сложение векторов $V \times V \to V$», «произведение вектора на число $\mathbb{R} \times V \to V$», «откладывание вектора от точки $E \times V \to V$», удовлетворяющие аксиомам трехмерного аффинного пространства $\{V, E\}$, порожденного точками и линейными комбинациями векторов со свойствами линейной зависимости и независимости. Тернарное отношение «скалярное произведение векторов $V \times V \to \mathbb{R}$» преобразует трёхмерное аффинное пространство в евклидово с понятиями длины, расстояния» (Горбачев, 2016). В его содержании задаётся векторная форма определения прямых, плоскостей, отношений параллельности, перпендикулярности, позволяющая наглядно-образными средствами устанавливать свойства их взаимного расположения, наблюдаемые в геометрическом пространстве. Построение по сути векторной формы (модели) трёхмерного евклидова пространства, в которой аксиомы Д. Гильберта являются содержательно истинными предложениями, квалифицируется авторами «изложением пространственной геометрии». В исследовании пространственных свойств векторных моделей прямых и плоскостей авторы одними и теми же геометрическими терминами задают разные объекты (прямые, плоскости, свойства параллельности и перпендикулярности) различных математических пространств. Задача доказательства справедливости системы аксиом абстрактного геометрического пространства в содержании трёхмерного евклидова пространства означает, что математически определённые объекты евклидова пространства являются модельными образами первичных понятий абстрактного геометрического пространства, являются их векторными моделями.

Введение понятий векторных моделей геометрических фигур в представлении аффинного (евклидова) пространства углубляется авторами в аффинных, метрических задачах исследования пространственных свойств векторных моделей базовых геометрических фигур (точка, прямая, плоскость) векторными средствами:

- «построение векторной модели прямой, заданной двумя различными точками» (Болтянский, Волович, Семушин, 1982, 43);
- «исследование взаимного расположения векторных моделей прямых на плоскости (двумерном векторном пространстве) и в пространстве (трёхмерном векторном пространстве)» (Болтянский, Волович, Семушин, 1982, 53-54);
- построение и обоснование единственности векторной модели прямой, проходящей через данную точку параллельно векторной модели данной прямой (Болтянский, Волович, Семушин, 1982, 52-53);
- «исследование взаимного расположения векторных моделей двух плоскостей» (Болтянский, Волович, Семушин, 1982,78-80);
- «исследование взаимного расположения векторных моделей прямой и плоскости» (Болтянский, Волович, Семушин, 1982, 70-72);
- исследование свойства ортогональности векторных моделей прямой и плоскости (Болтянский, Волович, Семушин, 1982, 86-88).

Если построение дедуктивной теории абстрактного аффинного пространства В.Г. Болтянский, М.Б. Волович, А.Д. Семушин осуществляют в содержании «пространственной геометрии, эквивалентной гильбертовской», то Н.М. Рогановский, А.А. Столяр создают, исследуют «геометрическую теорию» векторного (аффинного, евклидова) пространства:

- «принимая в качестве исходных, неопределяемых через другие объекты, двух типов: точки и векторы»;
- «понятия прямой и плоскости, обычно принимаемые за исходные, становятся определяемыми с помощью исходных понятий «точка» и «вектор»» (Рогановский, Столяр, 1974, 6).

В содержании аксиоматического метода Н.М. Рогановский, А.А. Столяр разрабатывают аппарат векторной алгебры с целью его использования в доказательстве теорем о пространственных свойствах прямых и плоскостей в их «векторном описании». Основу доказательства теорем в содержании «геометрической теории аффинного пространства» составляет векторная характеризация произвольной точки прямой, плоскости и последующее оперирование векторной формой аналитических выражений. Классическим примером выступает доказательство теоремы о задании векторной модели прямой любыми двумя различными точками: «Если M_0 и M_1 – две различные точки прямой AB, то прямая M_0M_1 совпадает с прямой AB» (Рогановский, Столяр, 1974, 34-35). Принадлежность точек M_0 и M_1 прямой AB на языке характеристического свойства её векторного описания

$(P \in AB) \leftrightarrow (\exists p)(\overrightarrow{AP} = p\overrightarrow{AB})$ задается аналитическими выражениями $(M_0 \in AB) \leftrightarrow (\exists k_0)(\overrightarrow{AM_0} = k_0\overrightarrow{AB})$ и $(M_1 \in AB) \leftrightarrow (\exists k_1)(\overrightarrow{AM_1} = k_1\overrightarrow{AB})$. На базе векторных равенств для произвольной точки M прямой AB, выраженной равенством $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$, необходимо установить, что $M \in M_0M_1$, то есть доказать, что вектор $\overrightarrow{M_0M}$ линейно выражается через вектор $\overrightarrow{M_0M_1}$. Полученное из аналитических условий принадлежности точек M_0, M и M_1 прямой AB векторное равенство

$$\overrightarrow{M_0M} = \frac{k - k_0}{k - k_1}\overrightarrow{M_0M_1}$$

и является векторным условием независимости описания прямой от выбора точек.

Выраженная в векторной форме характеризация произвольной точки векторной модели геометрической фигуры, оперирование векторной формой составляют сущность векторного исследования свойств в содержании аффинного пространства: «При помощи векторов будут описаны и различные отношения между точками, прямыми и плоскостями в пространстве» (Рогановский, Столяр, 1974, 6).

Векторная характеризация прямых, плоскостей, исследование векторными средствами их взаимного расположения в системе базовых задач позволили В.Г. Болтянскому и И.М. Яглому сделать вывод о том, что центральную роль в представлении аффинного (евклидова) пространства играет векторный метод исследования: «Построение геометрии (по Г. Вейлю) довольно мало отличается от традиционного (по Д. Гильберту). При этом если в традиционном построении геометрии доказательства основываются на довольно зыбких аксиомах и существенно апеллируют к наглядным представлениям, то здесь имеем последовательное дедуктивное построение геометрии» (Болтянский, Яглом,1972, 81).

Последующее развитие векторного метода в объёмных классических исследованиях (Болтянский, Яглом,1972), (Гусев, Колягин, Луканкин, 1976), (Скопец, 1980), (Потоскуев, 2019), (Далингер, 2017), (Каюмов, 2015) характеризуется целостными спектрами конкретных геометрических задач, обобщенных алгоритмических способов и эвристических приёмов реализации его закономерностей.

Исследованию проблем формирования модельно-абстрактных представлений евклидова пространства в его взаимной связи с геометрическим на разных уровнях учебной геометрической деятельности также посвящены работы Б.Р. Музаппаровой, М.Д. Кошановой (Muzapparova, 2023), F. Dilling, S. Kraus (Dilling, Kraus, 2022), А.Б. Тлеужанова, Д.Б. Тойбазарова (Тлеужанов, Тойбазаров, 2023), J. Eschenburg (Eschenburg, 2022). В работах Y. Abebayehu, C. Hsiu-Ling (Abebayehu, Hsiu-Ling, 2023), C. Brown, Z. Kovács, T. Recio Brown, Kovács, Recio, 2022), M. Uwurukundo, J. Maniraho, M. Tusiime (Uwurukundo, 2023), K. Zehavit, A. Meirav, D. Miriam, M. Tali, (Zehavit, Meirav, Miriam, Tali, 2022) рассматриваются проблемы формирования деятельности доказательства, решения задач в содержании аффинного (евклидова) пространства. Анализ методов доказательства в модельно-абстрактном представлении геометрического пространства на разных уровнях сложности проведён в работе M. Miyazaki, T. Fujita, K. Jones (Miyazaki, Fujita, Jones, 2017).

В системе авторских исследований закономерностей векторного метода с различной степенью полноты и математической обоснованности проявляются следующие структурные компоненты метода в содержании представлений евклидова, геометрического пространств:

- создание модельной формы аппарата векторной алгебры в представлении аффинного (евклидова) пространств (Вейль, 1996; Болтянский, Яглом,1972; Рогановский, Столяр, 1974);

- конструирование векторных моделей базовых геометрических фигур (прямые, плоскости) и их пространственных свойств в аффинном, евклидовом пространствах (Болтянский, Волович, Семушин, 1982; Рогановский, Столяр, 1974; Гусев, Колягин, Луканкин, 1976);

- исследование свойств векторных моделей базовых геометрических фигур, их взаимного расположения, включая свойства параллельности и перпендикулярности, в представлении аффинного, евклидова пространств (Болтянский, Яглом,1972; Гусев, Колягин, Луканкин, 1976; Далингер, 2017; Каюмов, 2015);

- приложение аппарата векторной алгебры, понятий и пространственных свойств векторных моделей базовых геометрических фигур для исследования неявно выделенных векторных моделей геометрических фигур (Болтянский, Яглом,1972; Гусев, Колягин, Луканкин, 1976; Скопец, 1980; Потоскуев, 2019; Далингер, 2017; Горбачев, Сенченко, 2017; Горбачев, Пузырева, 2018; Каюмов, 2015).

На существенное развитие содержательных и методических закономерностей векторного, векторно-координатного методов в содержании геометрического пространства направлено исследование В.В. Бардушкина и А.А., Прокофьева (Бардушкин, Прокофьев, 2012, 2013). «В неявной интеграции пространственного образа геометрической фигуры (геометрическое пространство) и её векторной, векторно-координатной моделей (евклидово, арифметическое пространства) авторами проектируется методическая система выделения пространственных и метрических свойств прямых, плоскостей, их взаимного расположения в трёхмерном евклидовом пространстве» (Горбачев, Сенченко, 2017). Структура авторской методической системы определяется целостным спектром метрических задач, направленных на формирование соответствующих обобщённых алгоритмических схем деятельности учения:

- «задача вычисления углов между прямыми геометрического пространства в содержании векторного метода исследования соответствующих векторных моделей прямых трёхмерного евклидова пространства» (Бардушкин, Прокофьев, 2012, 12);
- «задача вычисления угла между прямой и плоскостью геометрического пространства в содержании векторного метода исследования соответствующих векторных моделей прямой и плоскости трёхмерного евклидова пространства» (Бардушкин, Прокофьев, 2012, 13);
- задача вычисления угла между плоскостями геометрического пространства в содержании векторного метода исследования соответствующих векторных моделей плоскостей трёхмерного евклидова пространства (Бардушкин, Прокофьев, 2013, 8);
- задача вычисления расстояния от точки до прямой геометрического пространства в содержании векторного метода исследования соответствующих векторных моделей точки и прямой трёхмерного евклидова пространства (Бардушкин, Прокофьев, 2013, 11);
- задача вычисления расстояния от точки до плоскости геометрического пространства в содержании векторного метода исследования соответствующих векторных моделей точки и плоскости трёхмерного евклидова пространства (Бардушкин, Прокофьев, 2013, 13);
- задача вычисления расстояния между скрещивающимися прямыми геометрического пространства в содержании векторного метода исследования соответствующих векторных моделей прямых трёхмерного евклидова пространства (Бардушкин, Прокофьев, 2013, 15).

Блестящие примеры авторских исследований свойств различных геометрических фигур, включая прямые и плоскости, позволяют выделить не только спектр конкретных задач векторной характеризации геометрических объектов, но и систему методологических, содержательных и методических проблем, ограничивающих содержание векторного метода исследования:

- «представления геометрического и аффинного (евклидова пространств) оказываются слитными»;
- «каждое из математических пространств не систематизировано в спектрах соответствующих моделей»;
- «отсутствует процесс преобразования моделей аффинного (евклидова) пространства в модели геометрического пространства» (Горбачев, 2016);
- «фундаментальное понятие векторной модели геометрической фигуры не сформировано, имеет интуитивный характер»;
- «структура векторного метода исследования свойств векторных моделей геометрических фигур аффинного, геометрического пространств в полной мере не выделена, не детализирована» (Горбачев, 2016);

- «последовательное развитие векторного, векторно-координатного, аналитического методов в содержании соответствующих моделей геометрического пространства не прослеживается» (Горбачев, 2016).

Результаты

В анализе векторного, векторно-координатного методов исследования геометрических фигур в «аффинных» и «метрических» задачах Е.В. Потоскуев выделяет их поэтапную деятельностную структуру: «Чтобы координаты и векторы стали эффективным аппаратом решения геометрических задач, необходимо, прежде всего, научиться переводить условие геометрической задачи в векторно-координатную символику и терминологию (на «координатный язык»), затем грамотно выполнять соответствующие алгебраические операции над координатами и векторами, после чего полученный в векторно-координатной форме результат переводить вновь на язык элементарной (синтетической) геометрии» (Потоскуев, 2019, 10). Такое интуитивно-содержательное описание методов далеко не в полной мере отражает их содержательную сущность.

«Базовой закономерностью векторного метода выступает его последовательное формирование на основе модельных представлений геометрического и аффинного (евклидова) пространств» (Горбачев, 2022).

Насыщенное геометрическими фигурами, преобразованиями, отношениями геометрическое пространство и структурируемое точками и линейными комбинациями векторов аффинное (евклидово) пространство выступают различными математическими конструкциями, развивающимися из своих модельных образов в деятельности содержательного абстрагирования (Антюхов, Горбачев, Трошина, 2022).

Объективной закономерностью учебной геометрической деятельности выступает представление аффинного (евклидова) пространства векторной, координатной и арифметической моделями, задающими разные образы математического понятия «вектор». При этом «векторная модель трёхмерного аффинного (евклидова) пространства создаётся в наглядно-конструктивной форме представления понятия вектора с условием его откладывания из любой точки, операции сложения векторов «по правилу параллелограмма», умножения числа на вектор» (Горбачев, Пузырева, 2023, 55). В содержании векторной модели аффинного (евклидова) пространства создаются векторные модели геометрических фигур – «объекты векторной модели трёхмерного евклидова пространства, заданные векторными условиями (формами) описания характеристических свойств геометрических фигур, интегрированных с их конструктивными изображениями» (Горбачев, Пузырева, 2023, 56). Главной особенностью векторных моделей (векторных описаний по Н.М. Рогановскому) геометрических фигур выступает возможность их «исследования векторными средствами с последующей интерпретацией полученных в аффинном пространстве свойств в содержании наглядно-образного представления геометрического пространства. Насыщенная же векторными моделями геометрических фигур векторная модель трёхмерного аффинного (евклидова) пространства становится векторной моделью геометрического пространства, расширяющей его представление классической наглядно-образной (конструктивной) моделью» (Горбачев, Пузырева, 2022, 116). Во взаимной связи модельных представлений геометрического и аффинного (евклидова) пространств интуитивное описание векторного метода (Потоскуев, 2019,10) приобретает закономерную деятельностную структуру:

- «векторная характеризации понятий геометрических фигур наглядно-образной модели геометрического пространства в содержании представления аффинного (евклидова) пространства (деятельность векторного моделирования)» (Горбачев, 2019);
- «исследование пространственных и метрических свойств векторных моделей геометрических фигур в содержании представления аффинного (евклидова) пространства (деятельность формирования векторного метода в аффинном (евклидовом) пространстве)» (Горбачев, 2019, 228);
- «перевод векторной формы пространственных и метрических свойств векторных моделей геометрических фигур в содержательную форму пространственных и метрических

свойств наглядно-образной модели геометрического пространства (деятельность содержательной интерпретации в геометрическом пространстве)» (Горбачев, 2019, 228).

«Деятельность векторного моделирования осуществляется в представлении векторной модели аффинного (евклидова) пространства, с использованием векторных операций, понятий базиса двумерного и трёхмерного евклидовых пространств, описанием векторными средствами векторных моделей геометрических фигур» (Горбачев, Пузырева, 2023, 246). «Базовыми объектами аффинного (евклидова) пространства являются векторная модель прямой l, заданной точкой O и ненулевым вектором $l = l(O,\vec{a}) = \{M | \overrightarrow{OM} = k\vec{a}, k \in \mathbb{R}\}$, векторная модель плоскости π, заданной точкой O и неколлинеарными векторами $\overrightarrow{a_1}$ и $\overrightarrow{a_2}$ в форме $\pi = \pi(O,\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2}) = \{M | \overrightarrow{OM} = k_1\overrightarrow{a_1} + k_2\overrightarrow{a_2}, k_1, k_2 \in \mathbb{R}\}$» (Вейль, 1996, 28).

«Конструктивное изображение геометрической фигуры в наглядно-образной модели геометрического пространства, выбор подходящего базиса из конструктивных элементов геометрической фигуры, векторное описание ее характеристических свойств позволяют конструировать векторные модели геометрических фигур, в частности» (Горбачев, Пузырева, 2023, 245-246):

- векторную модель отрезка на прямой

$$[AB] = \{M | \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}, k \in [0,1]\};$$

- векторную модель окружности на плоскости

$$O(A,r) = \{M | M \epsilon \pi, |\overrightarrow{AM}| = r\};$$

- векторную модель треугольника на плоскости

$$\Delta ABC = \left\{M \left| \begin{array}{c} \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} - \text{неколлинеарные}, \ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}, \\ \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} \text{ или } \overrightarrow{BM} = k\overrightarrow{BC} \text{ или } \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AC}, \ k \in [0,1] \end{array} \right.\right\};$$

- векторную модель ромба на плоскости

$$\text{ромб } ABCD = \left\{M \left| \begin{array}{c} \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} - \text{компланарные}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} - \text{неколлинеарные}, \\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD} - \text{неколлинеарные}, \ \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} - \text{неколлинеарные}, \\ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}, |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AD}|, \\ \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AD} \text{ или } \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} \text{ или } \overrightarrow{BM} = k\overrightarrow{BC} \text{ или } \overrightarrow{CM} = k\overrightarrow{CD}, \ k \in [0,1] \end{array} \right.\right\}$$

«Схема векторного моделирования «базовая геометрическая фигура – векторная модель геометрической фигуры» развивается в анализе неочевидного соответствия существенно различающихся свойств геометрических фигур в геометрическом пространстве и свойств их векторных моделей в аффинном (евклидовом) пространстве» (Горбачев, 2022). Так, отношение принадлежности точки M прямой AB геометрического пространства в «содержании аффинного пространства характеризуется свойством коллинеарности векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AM}$, свойство параллельности прямых AB и CD геометрического пространства в аффинном пространстве описывается свойствами коллинеарности векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ и неколлинеарности векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, свойство параллельности прямой MN и плоскости ABC геометрического пространства» (Горбачев, 2017) в аффинном пространстве задаётся свойствами компланарности тройки векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{MN}$ и некомпланарности векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AM}$. Объективно необходимая в содержании векторного метода деятельность векторного моделирования широко представлена в доказательстве векторными средствами справедливости свойств базовых геометрических фигур геометрического пространства в системе соответствующих векторных моделей аффинного пространства (Болтянский, Волович, Семушин, 1982), (Болтянский, Яглом,1972), (Рогановский, Столяр, 1974).

В условиях своей сформированности деятельность векторного моделирования развивается «в исследовании свойств векторных моделей геометрических фигур аффинного (евклидова) пространства. В соответствии с методологией математического моделирования векторные модели геометрических фигур исследуются в содержании представления евклидова пространства» (Горбачев, Сенченко, 2017).

Ведущим компонентом векторного метода выступает созданный в двумерном, трёхмерном представлении аффинного (евклидова) пространства аппарат векторной алгебры с фундаментальными свойствами точечно-векторных операций, коллинеарности, ортогональности, компланарности.

Его дополнением выступают создаваемые в самостоятельных учебных действиях векторные модели базовых геометрических фигур: прямых, классических линий (окружность, парабола, гипербола) «двумерного евклидова пространства и прямых, плоскостей, классических поверхностей (сферическая, цилиндрическая, коническая) трёхмерного евклидова пространства» (Аполлоний, 2019), (Горбачев, Сенченко, 2017).

«Векторные модели (двумерные, трехмерные) базовых геометрических фигур закономерно подвергаются исследованию в качестве самостоятельных задач анализа их взаимного расположения (аффинные задачи по Г. Вейлю)» (Болтянский, Волович, Семушин, 1982), (Скопец, 1980), поиска их метрических характеристик (метрические задачи) (Бардушкин, Прокофьев, 2012), (Потоскуев, 2019) с целью установления обобщённых способов их исследования.

В учебной геометрической деятельности векторные модели базовых геометрических фигур включаются в качестве структурных компонентов векторных моделей более сложных конструкций геометрических фигур, исследование которых опирается на установленные ранее обобщённые способы (Потоскуев, 2019), (Бардушкин, Прокофьев, 2012).

«Деятельность исследования векторных моделей геометрических фигур как базовых, так и их все более сложных конструкций, осуществляется в представлении аффинного (евклидова) пространства, при этом результаты векторного метода исследования имеют векторную форму» (Горбачев, Сенченко, 2016). Их перевод в форму пространственных, метрических свойств соответствующих геометрических фигур геометрического пространства востребует деятельность содержательной интерпретации (Потоскуев, 2019,10).

Интерпретация имеющих векторную форму результатов исследования свойств векторных моделей геометрических фигур в аффинном (евклидовом) пространстве в определённой мере противоположна деятельности векторного моделирования. «Если деятельность векторного моделирования реализуется в сочетании схемы “геометрическая фигура – векторная модель геометрической фигуры” и схемы “свойство геометрической фигуры в геометрическом пространстве – свойство векторной модели геометрической фигуры в аффинном (евклидовом) пространстве”, то деятельность содержательной интерпретации условно характеризуется противоположными схемами: векторная модель геометрической фигуры однозначно задаёт геометрическую фигуру в системе её характеристических свойств; свойство векторной модели геометрической фигуры актуализирует моделируемое свойство геометрической фигуры» (Горбачев, Пузырева, 2023). На этапе формирования деятельности векторного моделирования свойства геометрической фигуры неизвестны, выступают целью учебной геометрической деятельности. Деятельность векторного моделирования приводит к созданию векторной модели геометрической фигуры, векторный метод исследования векторной модели геометрической фигуры позволяет установить векторную форму свойств, процедура содержательной интерпретации восстанавливает искомые свойства геометрической фигуры в геометрическом пространстве.

Введённые Г. Вейлем понятия базиса (координатной системы), координат вектора и точки в базисе $n-$мерного аффинного (евклидова) пространства является основой преобразования векторной модели аффинного (евклидова) пространства в его координатную модель:

- в базисе двумерного аффинного (евклидова) пространства всякий вектор, точка характеризуются упорядоченными парами действительных чисел – их координат (Вейль, 1996, 30);

- «в базисе трёхмерного аффинного (евклидова) пространства всякий вектор, точка характеризуются упорядоченными тройками действительных чисел – их координат» (Вейль, 1996, 30);

- «сконструированная в содержании векторной модели аффинного (евклидова) пространства векторная модель каждой из геометрических фигур, с учётом координатной формы векторных операций и пространственных свойств преобразуется в координатную модель геометрической фигуры» (Горбачев, Пузырева, 2023, 58).

«Представление точек, векторов, координатных моделей геометрических фигур упорядоченными парами, тройками действительных чисел осуществляются в арифметическом пространстве $\mathbb{R}^3$, выступающем координатной (векторно-координатной) моделью аффинного (евклидова) пространства. В арифметическом пространстве векторный метод исследования векторных моделей геометрических фигур» (Горбачев, 2023), дополненный действием перехода к координатной форме составляет содержание векторно-координатного метода:

- «векторно-координатная характеризация понятий геометрических фигур наглядно-образной модели геометрического пространства в содержании представления евклидова, арифметического пространств (деятельность векторно-координатного моделирования)» (Горбачев, 2016);

- «исследование пространственных и метрических свойств векторно-координатных моделей геометрических фигур в содержании представления арифметического пространства (деятельность формирования векторно-координатного метода в арифметическом пространстве)» (Горбачев, 2016).

В деятельности векторно-координатного моделирования векторные модели геометрических фигур преобразуются в координатные модели в содержании последовательного представления арифметического пространства размерности два или размерности три. В качестве объективной закономерности векторно-координатного метода выступает выделение векторных и на их основе координатных моделей базовых геометрических фигур – таких геометрических фигур, которые выступают конструктивными средствами построения многоугольников, многогранников и их комбинаций с классическими линиями, поверхностями. С учётом историко-математических исследований Р. Декарта, Л. Эйлера в качестве базовых геометрических фигур планиметрии помимо точек и прямых рассматриваются классические линии (окружность, эллипс, парабола, гипербола), в стереометрию к точкам, прямым, плоскостям добавляются классические поверхности (сфера, цилиндрическая поверхность, коническая поверхность). Такие комбинации многоугольников и классических линий, многогранников и классических поверхностей широко представлены в содержании наглядно-образной модели геометрического пространства.

Содержание деятельности векторного моделирования в представлении двумерного арифметического пространства характеризуют исследуемые в аффинной системе координат задачи: вычисления координат вектора и точки, векторных операций; поиск координат точки, делящей отрезок в данном отношении; построение координатных моделей прямых и классических линий; исследование взаимного расположения прямых, прямых и классических линий. «Аффинные» задачи деятельности векторного моделирования дополняются системой «метрических» задач: вычисление величины угла между заданными своими координатами векторами, длины векторов; вычисление расстояния между точками и прямыми в их координатной характеризации; поиск метрических характеристик координатных моделей классических линий. «В такой же мере системами «аффинных» и «метрических» задач задаётся деятельность векторного моделирования и в представлении трёхмерного евклидова пространства: построение координатных моделей векторов и векторных операций; построение координатных моделей плоскостей, прямых, классических поверхностей; исследование взаимного расположения плоскостей, прямых и плоскостей, прямых и классических поверхностей, вычисление расстояния между точками и плоскостями, точками и прямыми, поиск метрических характеристик классических поверхностей» (Скопец, 1980), (Бардушкин, Прокофьев, 2012), (Бардушкин, Прокофьев, 2013).

Деятельность формирования векторно-координатного метода в арифметическом пространстве также систематизируется понятием размерности. В исследовании координатных геометрических фигур планиметрии и стереометрии используются не только «координатная форма векторных операций, но и координатная форма прямых, классических линий (двумерное арифметическое пространство), плоскостей, прямых и классических поверхностей (трёхмерное арифметическое пространство), а также система свойств их взаимного расположения» (Потоскуев, 2019), (Бардушкин, Прокофьев, 2012), (Бардушкин, Прокофьев, 2013).

«Как векторный метод в представлении аффинного (векторного) пространства, так и векторно-координатный метод в представлении арифметического пространства только деятельностями пространственного моделирования геометрических фигур и исследования свойств соответствующих моделей не ограничиваются» (Горбачев, Сенченко, 2016). Общая представлениям аффинного, евклидова, арифметического пространств задача исследования свойств геометрических фигур обосновывает закономерное использование деятельности содержательной интерпретации.

Основанием деятельности содержательной интерпретации в формировании векторно-координатного метода выступают как схема модельного конструирования «геометрическая фигура – координатная модель геометрической фигуры», так и схема соответствия свойств «свойство геометрической фигуры – свойство координатной модели в арифметическом пространстве» (Горбачев, Сенченко, 2016). «Деятельность содержательной интерпретации установленного векторно-координатными средствами свойства координатной модели геометрической фигуры приводит к актуализации как конкретной геометрической фигуры, так и её соответствующего свойства в геометрическом пространстве» (Горбачев, Сенченко, 2016).

«Общая векторному и векторно-координатному методам методология (моделирование, модельное исследование, содержательная интерпретация) формируемых векторного метода в аффинном (евклидовом) пространстве и векторно-координатного метода в арифметическом пространстве, различие методов только координатной формой моделей геометрических фигур выступают содержательной основой характеризации векторно-координатного метода в геометрическом пространстве как векторного и в арифметическом пространстве как координатного» (Атанасян, 2010), (Погорелов, 1995), (Александров, 2014).

«Представление векторной модели аффинного (евклидова) пространства в качестве соответствующей модели геометрического пространства осуществляется в содержании формирующих структуру векторного, векторно-координатного методов видов учебной геометрической деятельности: векторного моделирования геометрических фигур, исследования их пространственных и метрических свойств, содержательной интерпретации векторной формы свойств в представлении геометрического пространства» (Горбачев, 2018). В интеграции представлений модели и формирующегося в ней метода проявляется фундаментальная закономерность: «Векторный метод исследования свойств геометрических фигур выступает основным результатом деятельности представления в трёхмерном евклидовом пространстве и в то же время существенно зависит от уровня её становления. Это означает совместное развитие векторных представлений геометрического пространства и векторного метода доказательства теорем, решения задач» (Горбачев, Сенченко, 2016, 26).

Закономерность интегрального формирования векторного метода в представлении аффинного, евклидова, арифметического пространств определяет его деятельностную структуру:

1. Построение двумерной векторной модели геометрического пространства (планиметрия).

1.1. Деятельность векторного моделирования. Составляющими деятельность векторного моделирования учебными действиями выступают модельное формирование аппарата векторной алгебры, векторное моделирование базовых геометрических фигур, построение векторных моделей плоских геометрических фигур в их родовидовой систематизации. В двумерном аффинном пространстве на основе наглядных образов геометрического пространства формируются понятия векторных операций, в форме линейных комбинаций векторов выделяются линейные оболочки одномерного, двумерного аффинных пространств с фундаментальными понятиями базиса и размерности. В точечно-векторном описании двумерного аффинного пространства конструируются векторные модели базовых геометрических фигур, в системе характеристических свойств понятий создаются векторные модели многоугольников, их комбинаций с классическими линиями (Болтянский, Волович, Семушин, 1982, 43). Введение в двумерном аффинном пространстве скалярного произведения характеризует преобразование двумерного аффинного пространства в евклидово пространство с ортонормированным базисом. В его содержании формируются «понятия длины вектора, расстояния между точками, угла между векторами, выделяется векторная модель прямой, заданной точкой и ортогональным вектором» (Бардушкин, Прокофьев, 2012).

1.2. «Деятельность исследования свойств векторных моделей. Аффинными задачами векторного метода выступают: исследование взаимного расположения векторных моделей прямых; построение векторной модели прямой, проходящей через данную точку параллельно заданной векторной моделью прямой. Метрические задачи векторного метода: вычисление расстояния от точки до прямой, заданной векторной моделью; вычисление величины угла между прямыми, заданными векторными моделями; вычисление метрических характеристик классических линий, заданных векторными моделями» (Горбачев, Пузырева, 2023). Приложение аффинных и метрических задач к исследованию пространственных и метрических свойств векторных моделей многоугольников.

1.3. Деятельность содержательной интерпретации в геометрическом пространстве. Деятельность содержательной интерпретации осуществляется в анализе деятельностей векторного моделирования и деятельности исследования свойств векторных моделей двумерного аффинного (евклидова) пространства. Её содержание характеризуется построением выводов о свойствах геометрической фигуры на основе установленных свойств её векторной модели: вывод о принадлежности точки прямой, заданной векторной моделью; вывод о параллельности прямых, заданных векторными моделями на основании коллинеарности направляющих векторов; вывод о расположенности прямой в аффинной системе координат на основании анализа её векторной модели; вывод о величине угла между прямыми, заданными векторными моделями на основании анализа скалярного произведения направляющих векторов; вывод о расположенности точки относительно прямой, заданной векторной моделью на основе анализа расстояния от точки до прямой.

2. Координатная характеризация двумерной векторной модели геометрического пространства (планиметрия).

2.1. Деятельность векторно-координатного моделирования. «Разложение произвольного вектора двумерного аффинного пространства по неколлинеарным векторам базиса приводит к понятиям координат вектора и точки – характеризации векторов и точек упорядоченными парами двумерного арифметического пространства» (Горбачев, 2016). В процедуре перехода к координатам векторные модели прямой, классических линий, многоугольников также приобретают координатную форму, позволяющую арифметическими средствами исследовать их пространственные свойства. Координатная форма задания векторов, точек в ортонормированном базисе двумерного евклидова пространства выступает удобным средством вычисления в оперировании понятиями длины вектора, величины угла между векторами, расстояния между точками. По координатам векторов в ортонормированном базисе становится возможным вычисление координат вершин многоугольников, метрических характеристик координатных моделей классических линий двумерного арифметического пространства.

2.2. Деятельность исследования свойств координатных моделей. Аффинные задачи векторно-координатного метода: определение координат вектора и точки; исследование координатной модели прямой в аффинной системе координат; исследование взаимного расположения прямых, заданных координатными моделями; анализ условий параллельности прямых, заданных координатными моделями; построение координатной модели прямой, проходящей через точку параллельно заданной координатной моделью прямой. Метрические задачи векторно-координатного метода: определение расстояния от точки до прямой, заданной координатной моделью; вычисление величины угла между прямыми, заданными координатными моделями; анализ условий перпендикулярности прямых, заданных координатными моделями; вычисление метрических характеристик классических линий, заданных координатными моделями. Приложение аффинных и метрических задач к исследованию пространственных и метрических свойств координатных моделей многоугольников.

2.3. Деятельность содержательной интерпретации в геометрическом пространстве. Деятельность содержательной интерпретации осуществляется в анализе результатов деятельностей векторно-координатного моделирования и исследования свойств координатных моделей геометрических фигур двумерного арифметического пространства: вывод о расположенности прямой, заданной координатной моделью в аффинной системе координат на основе анализа координат начальной точки и направляющего вектора; «вывод о параллельности, перпендикулярности прямых, заданных координатными моделями на основе анализа свойств коллинеарности, ортогональности направляющих векторов; вывод о системе пространственных и метрических свойствах многоугольников, заданных координатными моделями на основе анализа свойств коллинеарности, ортогональности векторов, определённых его сторонами, вершинами» (Горбачев, Сенченко, 2017).

3. Построение трёхмерной векторной модели геометрического пространства (стереометрия).

3.1. Деятельность векторного моделирования. В трёхмерном аффинном пространстве сохраняется «наглядно-образное представление вектора, векторных операций двумерного аффинного пространства, но при этом понятие базиса пространства определяется упорядоченной тройкой некомпланарных (линейно независимых по Г. Вейлю) векторов. Понятие размерности аффинного пространства позволяет выделить одномерное, двумерное и трёхмерное аффинные пространства, выступающие векторными моделями соответствующего прямой, плоскости, геометрического пространства» (Потоскуев, 2004). На базе характеристических свойств понятий многогранников в представлении трёхмерного аффинного пространства создаются их векторные модели, позволяющие исследовать пространственные свойства. Введение в трёхмерном аффинном пространстве операции скалярного произведения векторов приводит к его представлению в содержании трёхмерного евклидова пространства с ортонормированным базисом и системой аффинных и метрических задач в спектре векторных моделей геометрических фигур.

3.2. Деятельность исследования свойств векторных моделей. Аффинные задачи векторного метода: «исследование векторной модели прямой в аффинной системе координат; исследование взаимного расположения прямых, заданных векторными моделями; исследование векторной модели плоскости в аффинной системе координат» (Горбачев, Сенченко, 2017); исследование взаимного расположения плоскостей, заданных векторными моделями; анализ условий параллельности плоскостей, заданных векторными моделями; исследование взаимного расположения прямой и плоскости, заданных векторными моделями. Метрические задачи: вычисление величины угла между прямыми, заданными векторными моделями; вычисление величины угла между плоскостями, заданными векторными моделями. Приложение аффинных и метрических задач к исследованию пространственных и метрических свойств векторных моделей многогранников.

3.3. Деятельность содержательной интерпретации в геометрическом пространстве. Деятельность содержательной интерпретации определяется построением выводов о свойствах геометрических фигур в наглядном представлении геометрического пространства: вывод о принадлежности точки плоскости, заданной векторной моделью; «вывод о параллельности плоскостей, заданных векторными моделями; вывод о параллельности прямой и плоскости на основании свойств коллинеарности и неколлинеарности соответствующих векторов; вывод о величине угла между прямыми, заданными векторными моделями, на основе анализа скалярного произведения направляющих векторов; вывод о расстоянии между параллельными плоскостями, заданными векторными моделями на основе анализа расстояния между точкой и плоскостью, вывод о системе пространственных и метрических свойств многогранников, заданных векторными моделями на основе свойств векторных моделей базовых геометрических фигур» (Потоскуев, 2004).

Координатная характеризация трёхмерной векторной модели геометрического пространства (стереометрия).

4.1. Деятельность векторно-координатного моделирования. В базисе из трёх некомпланарных векторов аффинного пространства координатами вектора и точки являются упорядоченные тройки действительных чисел – «объекты трёхмерного арифметического пространства. Сведение операций над векторами к тем же операциям на соответствующих координатах означает отождествление аффинного и арифметического пространств, позволяет рассматривать арифметическое пространство в качестве арифметической модели трёхмерного аффинного пространства» (Потоскуев, 2019). В содержании арифметической модели трёхмерного аффинного пространства векторные модели прямой, плоскости приобретают координатную форму – становятся их координатными моделями. Координатная форма скалярного произведения расширяет возможности координатного метода в представлении арифметического пространства не только аффинными, но и метрическими свойствами длины, величины угла. Задача вычисления площадей, объёмов геометрических фигур, представленных своими координатными моделями, востребует операцию векторного произведения (Потоскуев, 2019).

4.2 Деятельность исследования свойств координатных моделей. Аффинные задачи: «исследование координатной модели прямой в аффинной системе координат; исследование принадлежности точки прямой, заданной координатной моделью; исследование взаимного расположения прямых, заданных координатными моделями; исследование координатной модели плоскости в аффинной системе координат» (Горбачев, Сенченко, 2016); исследование принадлежности точки плоскости, заданной координатной моделью; исследование взаимного расположения плоскостей, заданных координатными моделями; анализ условий параллельности плоскостей, заданных координатными моделями; исследование взаимного расположения прямой и плоскости, заданных координатными моделями. Метрические задачи: вычисление величины угла между прямыми, заданными координатными моделями; вычисление величины угла между плоскостями, заданными координатными моделями, вычисление расстояния от точки до плоскости заданной координатной моделью. Приложение аффинных и метрических задач к исследованию пространственных и метрических свойств координатных моделей многогранников.

4.3. Деятельность содержательной интерпретации в геометрическом пространстве. В геометрическом пространстве деятельность содержательной интерпретации характеризуется спектром выводов о пространственных и метрических свойствах геометрических фигур: вывод о расположении прямой, заданной координатной моделью в аффинной системе координат; вывод о взаимном расположении прямых, заданных координатными моделями на основе анализа координат соответствующих векторов; вывод о принадлежности точки плоскости, заданной координатной моделью на основе анализа координат соответствующих векторов; «вывод о взаимном расположении прямой и плоскости, заданных координатными моделями на основе анализа координат направляющих векторов; вывод о величине угла между прямыми, заданными координатными моделями на основе анализа скалярного произведения направляющих векторов; вывод о системе пространственных и метрических свойств многогранников, заданных координатными моделями на основе свойств координатных моделей базовых геометрических фигур» (Горбачев, 2018).

Заключение

Учебная геометрическая деятельность, проектируемая в содержании «гильбертовского и вейлевского путей аксиоматизации пространственной геометрии» (Болтянский, 1972, 1982), представлена содержанием различных математических пространств – геометрического (по Д. Гильберту) и аффинного (евклидова) (по Г. Вейлю) с соответствующими системами пространственно-специфических объектов и отношений. Геометрическое пространство характеризуется классами геометрических фигур, отношениями принадлежности, порядка, конгруэнтности, параллельности, преобразованиями движения и подобия (Горбачев, 2022, 113). «Объектами аффинного пространства размерностей от единицы до тройки выступают точки, линейные комбинации векторов с операциями векторного пространства над полем действительных чисел. Свойства геометрических фигур в геометрическом пространстве устанавливаются в содержании аналитико-синтетического метода. В аффинном пространстве формируется векторный метод исследования пространственных свойств его объектов» (Горбачев, Сенченко, 2017), (Горбачев, Пузырева, 2018).

Как геометрическое, так и аффинное (евклидово) пространства в сознании субъекта выступают динамическими конструкциями (Антюхов, Горбачев, Трошина, 2022). На начальном этапе изучения геометрическое пространство представлено конструктивными образами геометрических фигур, свойства которых устанавливаются на уровне обыденного сознания (Горбачев, Пузырева, 2022). В условиях сформированности наглядно-образных представлений геометрическое пространство становится абстрактным – представлено базовыми объектами произвольной природы, свойства которых задаются системой аксиом Д. Гильберта (гильбертовский путь аксиоматизации пространственной геометрии) (Горбачев, 2022). «Аффинное пространство размерностей два и три вначале также представлено интуитивными образами векторов и точек, векторных операций в содержании наглядных образов геометрических фигур» (Горбачев, Сенченко, 2016). «Создание векторной модели аффинного (евклидова) пространства становится основой его абстрагирования – представления точек, векторов, векторных операций в абстрактной форме, определённой системой аксиом векторного пространства над полем действительных чисел (Вейлевский путь аксиоматизации пространственной геометрии)» (Горбачев, 2018), (Горбачев, Пузырева, 2023).

Различие геометрического и евклидова пространств системами пространственно-специфических объектов, способами аксиоматизации их абстрактных представлений объективно предполагает анализ взаимной связи математических пространств в целостном содержании «пространственной геометрии» (Болтянский, Яглом, 1972), трёхмерной геометрии (Рогановский, Столяр, 1974). «На уровне обыденного сознания геометрическое пространство представлено своей конструктивной (наглядно-образной) моделью в системе условных геометрических изображений геометрических фигур с унаследованным от «Начал» Евклида аналитико-синтетическим методом исследования. Аффинное же пространство описывается своей векторной моделью, содержащей систему векторных моделей геометрических фигур, создаваемых на основе конструктивной модели геометрического пространства и исследуемых средствами векторного метода» (Горбачев, 2016, 155). «Устанавливаемые векторными средствами свойства векторных моделей геометрических фигур в процедуре интерпретации преобразуются в свойства геометрических фигур. Это означает, что в процессе векторного моделирования геометрических фигур, исследования их свойств в содержании аффинного, евклидова пространств и последующей интерпретации векторная модель аффинного пространства преобразуется в векторную модель геометрического пространства» (Горбачев, Пузырева, 2018), (Горбачев, 2023).

Характеризующий векторную модель геометрического пространства векторный (векторно-координатный) метод в его структурировании двумерными и трёхмерными аффинным и евклидовым пространствами определяется деятельностями векторного моделирования, исследования свойств векторных моделей и интерпретации свойств векторной модели в геометрическом пространстве.

Не только Д. Гильберт и Г. Вейль, но и В.Г. Болтянский, И.М. Яглом (Болтянский, Яглом, 1972), Н.М. Рогановский, А.А. Столяр (Рогановский, Столяр, 1974) в своих исследованиях различают наглядную, абстрактную форму геометрического и аффинного пространств и дедуктивные теории абстрактных геометрического и аффинного пространств, описываемые существенно отличающимися аксиомами Д. Гильберта и Г. Вейля (Горбачев, 2022). В трактовке Н.М. Рогановского, А.А. Столяра теория геометрического пространства (геометрическая теория пространства) «представляет собой множество предложений, выражающих свойства отношений, в которых могут находиться точки, прямые и плоскости в пространстве, свойства разнообразных фигур, образуемых из точек пространства» (Рогановский, Столяр, 1974, 5). В сравнении теории геометрического пространства и теории аффинного (евклидова пространства) В.Г. Болтянский, И.М. Яглом отдают предпочтение теории аффинного пространства: «По богатству заключённых в ней идей аксиоматика Вейля намного превосходит аксиоматику Гильберта. Более того, если аксиоматика Гильберта, по существу, обращена в прошлое геометрии, проливая яркий свет на отдельные этапы исторической эволюции учения о пространстве и возникающие в прошлом затруднения, то пафос аксиоматики Вейля состоит в её устремлённости в будущее, в её теснейшие связи с наиболее актуальными и развивающимися разделами современной науки» (Болтянский, Яглом, 1972, 89).

Обсуждение

Признаваемый в качестве обязательного в учебной геометрической деятельности векторный метод исследования пространственных и метрических свойств векторных моделей геометрических фигур, его расширение в содержании векторно-координатного метода в учебниках представлены лишь своими фрагментарными задачами (Погорелов, 1995), (Потоскуев, 2004, 2008), (Смирнова, 2007). Поскольку аналитико-синтетический метод в содержании наглядно-образной модели геометрического пространства и векторно-координатный метод в содержании векторной модели геометрического пространства в принципе равноправны, то их формирование может быть осуществлено с равными мерами полноты. Но при этом также тщательно должна быть разработана и методика формирования векторного метода – как в спектре теоретических положений, доказательств, так и в содержании реализующих его закономерности конкретных задач.

Список литературы

Антюхов А.В., Горбачев В.И., Трошина Н.В. Пространственно-теоретический подход в формировании абстрактного мышления / Коллективная монография: Итоги науки. М.: РАН, 2022. Вып. 50. С. 102–137. DOI: 10.22281/ROS_I50_CH4_P102-133_2022

Аполлоний Пергский. Конические сечения. Под общ. ред. А.А. Панферова, С.В. Кирбятьева. М.: Юстицинформ, 2019.

Бардушкин В.В., Прокофьев А.А. Обобщающее повторение темы «решение заданий С2 координатно-векторным способом». Часть 1 // Математика в школе. 2012. № 10, С. 9–15.

Бардушкин В.В., Прокофьев А.А. Обобщающее повторение темы «решение заданий С2 координатно-векторным способом». Часть 2 // Математика в школе. 2013. № 1, С. 8–18.

Болтянский В.Г., Волович М.Б., Семушин А.Д. Векторное изложение геометрии (в 9 классе средней школы). Пособие для учителей. М.: Просвещение, 1982.

Болтянский В.Г., Яглом И.М. Векторное обоснование геометрии // Новое в школьной математике. М.: Знание, 1972. С. 64–92.

Вейль Г. Пространство, время, материя. Лекции по общей теории относительности. Изд. 5-е перераб. Перев. с нем. В.П. Визгина. М.: «Янус», 1996.

Геометрия. 10-11 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. 22-е изд. М.: Просвещение, 2013.

Геометрия. 7-9 классы: учеб. для общеобразоват. Учреждений / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. 20-е изд. М.: Просвещение, 2010.

Горбачев В.И. Предметные компетенции общего математического образования в категории субъектного развития: монография. М.: ИНФРА-М, 2020. (Научная мысль). DOI 10.12737/1031176.

Горбачев В.И. Модельный подход формирования учебной геометрической деятельности // Фундаментальные проблемы обучения математике, информатике и информатизации образования: сборник тезисов докладов международной научной конференции. 30 сентября – 2 октября 2022г. Елец: Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина, 2022. С. 113–118.

Горбачев В.И., Пузырева Е.Н. Векторные модели геометрических фигур в учебной геометрической деятельности // Математика и математическое образование: проблемы, технологии, перспективы: Материалы 42-го Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов, Смоленск, 12–14 октября 2023 года. Смоленск: Смоленский государственный университет, 2023. С. 245–248.

Горбачев В.И., Пузырева Е.Н. Закономерности формирования абстрактного математического мышления в представлении геометрического пространства // Учёные записки Брянского государственного университета: физико-математические науки / биологические науки / ветеринарные науки. 2018. №4 (12). С. 7–14.

Горбачев В.И., Сенченко Е.Д. Закономерности исследования геометрических фигур в евклидовом пространстве // Учёные записки Брянского государственного университета: физико-математические науки / биологические науки / ветеринарные науки. Брянск: РИО БГУ, 2016. № 4. С. 18–29.

Горбачев В.И. Теория трёхмерного евклидова пространства в методологии теоретического типа мышления // Учёные записки Орловского государственного университета. 2016. №1(70). С. 151–158.

Горбачев В.И. Закономерности формирования внутренне-процессуальной компетенции в содержании базовой математической теории евклидова пространства // Учёные записки Орловского государственного университета. №1 (78), 2018. С. 224–232.

Горбачев В.И., Сенченко Е.Д. Закономерности аналитического метода исследования свойств геометрических фигур в евклидовом пространстве // Учёные записки Брянского государственного университета: физико-математические науки / биологические науки / ветеринарные науки. Брянск: РИО БГУ, 2017. № 1. С. 11–24.

Горбачев В.И., Пузырева Е.Н. Модельно-теоретическое представление евклидова пространства в учебной геометрической деятельности // Фундаментальные проблемы обучения математике, информатике и информатизации образования: Сборник тезисов докладов международной научной конференции, Елец, 29 сентября – 1ноября 2023 года. Елец: Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина, 2023. С. 55–61.

Гусев В.А., Колягин Ю.М., Луканкин Г.Л. Векторы в школьном курсе геометрии. Пособие для учителей. М.: Просвещение, 1976.

Далингер В.А. Методика обучения учащихся стереометрии посредством решения задач: учебное пособие для СПО. 2-е изд. Москва: Юрайт, 2017.

Каюмов О.Р. Диалоги о векторном методе. Аффинные задачи // Математика в школе. 2015. № 8. С. 24–34.

Каюмов О.Р. Диалоги о векторном методе. Метрические задачи // Математика в школе. 2015. № 9. С. 25-35.

Погорелов А.В. Геометрия: Учеб. для 7-11кл. общеобразоват. учреждений. 5-е изд. М.: Просвещение, 1995.

Потоскуев Е.В. Векторно-координатный метод решения задач стереометрии. ФГОС. М.: Издательство «Экзамен», 2019.

Потоскуев Е.В. Геометрия. 10 кл.: учеб. для общеобразоват. учреждений с углубл. и профильным изучением математики / Е.В. Потоскуев, Л.И. Звавич. 6-е изд., стереотип. М.: Дрофа, 2008.

Потоскуев Е.В. Геометрия. 11 кл.: учеб. для общеобразоват. учреждений с углубл. и профильным изучением математики /Е.В. Потоскуев, Л.И. Звавич. 2-е изд., исп. М.: Дрофа, 2004.

Пузырева Е.Н. Представление наглядно-образной модели геометрического пространства в учебной геометрической деятельности // Учёные записки Брянского государственного университета. 2023. № 2. С. 45–72.

Рогановский Н.М., Столяр А.А. Векторное построение стереометрии. Минск: Народная асвета, 1974.

Скопец З.А. Векторное решение стереометрических задач // В кн.: Преподавание геометрии в 9-10 классах. М.: Просвещение, 1980. С.184–230.

Смирнова И.М. Геометрия. 10-11 классы: учеб. для учащихся общеобразоват. учреждений (базовый и профильный уровни) / И.М. Смирнова, В.А. Смирнов. 5-е изд. исп. и доп. М.: Мнемозина, 2008.

Смирнова И.М. Геометрия. 7-9 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений / И.М. Смирнова, В.А. Смирнов. 2-е изд. исп. М.: Мнемозина, 2007.

Тлеужанов А.Б., Тойбазаров Д.Б. Методические особенности преподавания векторного метода в школьном курсе геометрии // Вестник Северо-Казахстанского Университета им. М. Козыбаева. 2023. 4 (60). 70–77. https://doi.org/10.54596/2958-0048-2023-4-70-77

Abebayehu, Y., & Hsiu-Ling, C. GeoGebra in mathematics education: a systematic review of journal articles published from 2010 to 2020. Interactive Learning Environments. 2023. 31(2), 5682–5697. DOI: https://doi.org/10.1080/10494820.2021.2016861

Brown, C.W., Kovács, Z., Recio, T. et al. Is Computer Algebra Ready for Conjecturing and Proving Geometric Inequalities in the Classroom? Math.Comput.Sci. 2022. 16. 31 https://doi.org/10.1007/s11786-022-00532-9

Dilling F, Kraus S.F. Comparison of Mathematics and Physics Education II Examples of Interdisciplinary Teaching at School. Springer Spektrum Wiesbaden, 2022, 334 p. ISBN 978-3-658-36414-4. https://doi.org/10.1007/978-3-658-36415-1

Eschenburg, J.H. Geometry - Intuition and Concepts. Springer, Wiesbaden. 2022. https://doi.org/10.1007/978-3-658-38640-5_4

Miyazaki, M., Fujita, T. & Jones, K. Students' understanding of the structure of deductive proof. Educ Stud Math 94. 2017. 223–239. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9720-9

Muzapparova B.R., Koshanova M.D. Ways to introduce the concept of "vector" in geometry. Q A Iasaýı atyndaģy Halyqaralyq qazaq-túrik ýnıversıtetiniń habarlary (fızıka matematıka ınformatıka serııasy). 2023. 4(27). https://doi.org/10.47526/2023-4/2524-0080.02

Uwurukundo, M.S., Maniraho, J.F., Tusiime, M. et al. GeoGebra software in teaching and learning geometry of 3-dimension to improve students' performance and attitude of secondary school teachers and students. Educ Inf Technol. 2023. https://doi.org/10.1007/s10639-023-12200-x

Zehavit, K., Meirav, A., Miriam, D., & Tali, M. Self-efficacy and problem-solving skills in mathematics: the effect of instruction-based dynamic versus static visualization. Interactive Learning Environments. 2022. 30(4), 759–778. DOI: 10.1080/10494820.2019.1683588

THE CONTENT AND REGULARITIES OF THE FORMATION OF THE VECTOR RESEARCH METHOD IN THE MODEL REPRESENTATION OF GEOMETRIC SPACE

Gorbachev V. I.
Dr. Sci. (Pedagogy), professor
enibgu@mail.ru
Bryansk
Bryansk State University named after Academician I.G. Petrovsky

Puzyreva E. N.
Senior Lecturer
puzyreva-knysh@yandex.ru
Bryansk
Bryansk State University named after Academician I.G. Petrovsky

Abstract. In the content of representations of Euclidean space, its vector model is highlighted, saturated with vector models of geometric shapes. In the representation of arithmetic space, a vector-coordinate model of Euclidean space with vector-coordinate models of geometric shapes is created. In the systems of vector and vector-coordinate models of geometric shapes, the content of the vector method for studying their properties is highlighted. The analysis of the content of the vector research method, the system of patterns of its formation is an urgent task of the theory and methodology of teaching mathematics. This is due to the fact that the ability to establish the properties of geometric shapes using an effective vector algebra apparatus requires the development of a variety of mental operations of the subject, which contributes to improving the overall mental preparation of students.

Keywords: educational geometric activities, models of geometric and Euclidean spaces, vector, vector-coordinate research methods.

References

Abebayehu, Y., & Hsiu-Ling, C. (2023). GeoGebra in mathematics education: a systematic review of journal articles published from 2010 to 2020. *Interactive Learning Environments*, 31(2), 5682–5697. DOI: https://doi.org/10.1080/10494820.2021.2016861

Antyukhov, A. V., Gorbachev, V. I., Troshina, N. V. (2022). Spatial-theoretical approach in the formation of abstract thinking. Moscow: RAS. Issue 50, 102-137. DOI: 10.22281/ROS_I50_CH4_P102-133_2022 (In Russ).

Apollonius of Perga (2019). Conical sections/under the general editorship of A.A. Panferov, S.V. Kirbyatieva. Moscow (In Russ).

Bardushkin, V. V., Prokofiev, A. A. (2012). Generalizing repetition of the topic "solving C2 tasks in a coordinate-vector way". Part 1. *Matematika v Shkole,* 10, 9-15. (In Russ).

Bardushkin, V. V., Prokofiev, A. A. (2013). Generalizing repetition of the topic "solving C2 tasks in a coordinate-vector way". Part 2. *Matematika v Shkole,* 1, 8-18. (In Russ).

Boltyansky, V. G., Volovich, M. B., Semushin, A. D. (1982). Vector presentation of geometry (in the 9th grade of secondary school). Handbook for teachers. Moscow: Prosveshchenie. (In Russ).

Boltyansky, V. G., Yaglom, I. M. (1972). Vector substantiation of geometry. *New in school mathematics*, 64-92. Moscow: Znanie. (In Russ).

Brown, C. W., Kovács, Z., Recio, T. et al. (2022). Is Computer Algebra Ready for Conjecturing and Proving Geometric Inequalities in the Classroom? *Mathematics in Computer Science*, 16, 31 https://doi.org/10.1007/s11786-022-00532-9

Dalinger, V. A. (2017). *Methods of teaching students stereometrics through problem solving*. Moscow: Yurait. (In Russ.).

Dilling, F., Kraus, S .F. (2022). *Comparison of Mathematics and Physics Education II Examples of Interdisciplinary Teaching at School*. Springer Spektrum, Wiesbaden. https://doi.org/10.1007/978-3-658-36415-1

Eschenburg, J. H. (2022). *Geometry – Intuition and Concepts*. Springer, Wiesbaden. https://doi.org/10.1007/978-3-658-38640-5_4

Geometry. Grades 10-11 (2013). Textbook for general education institutions: basic and profile levels / L. S. Atanasyan, V. F. Butuzov, S. B. Kadomtsev, etc. 22nd ed. Moscow: Prosveshchenie.

Geometry. Grades 7-9 (2009): textbook for general education institutions / L. S. Atanasyan, V. F. Butuzov, S. B. Kadomtsev, etc.20th ed. Moscow: Prosveshchenie.

Gorbachev V.I. (2018). Regularities of formation of internal procedural competence in the content of the basic mathematical theory of Euclidean space. *Scientific notes of Oryol State University1* 1 (78), 224–232. (In Russ).

Gorbachev, V. I., Senchenko, E. D. (2016). Laws of the study of geometric figures in Euclidean space. *Scientific notes of Bryansk State University: physical and mathematical sciences / biological sciences / veterinary sciences,* 4, 18–29. (In Russ).

Gorbachev, V. I. (2016). Theory of three-dimensional Euclidean space in the methodology of theoretical type of thinking. *Scientific notes of Oryol State University,* 1 (70), 151–158. *Oryol* (In Russ).

Gorbachev, V. I. (2020). *Subject competencies of general mathematical education in the category of subjective development*. Moscow: INFRA-M. DOI 10.12737/1031176 (In Russ).

Gorbachev, V. I. (2022). A model approach to the formation of educational geometric activity. *Fundamental problems of teaching mathematics, computer science and informatization of education: a collection of abstracts of the international scientific conference.* (pp. 113-118). Yelets: Bunin Yelets State University. (In Russ.).

Gorbachev, V. I., Puzyreva, E. N. (2023). Model-theoretical representation of Euclidean space in educational geometric activity. *Fundamental problems of teaching mathematics, computer science and informatization of education: collection of abstracts of the international scientific conference*, (pp. 55-61). Yelets: Bunin Yelets State University. (In Russ.).

Gorbachev, V. I., Puzyreva, E. N. (2023). Vector models of geometric shapes in educational geometric activities. *Mathematics and Mathematical education: problems, technologies, prospects: Materials of the 42nd International Scientific Seminar for Teachers of Mathematics and Computer Science at Universities and Pedagogical Universities*. (pp. 245-248). Smolensk: Smolensk State. (In Russ.).

Gorbachev, V. I., Puzyreva, E. N. (2018). Regularities of formation of abstract mathematical thinking in the representation of geometric space. *Scientific notes of Bryansk State University: physical and mathematical sciences / biological sciences / veterinary sciences.* Vol. 4 (12), 7-14. (In Russ.).

Gorbachev, V. I., Senchenko, E. D. (2017). Regularities of the analytical method of investigation of the properties of geometric figures in Euclidean space. *Scientific notes of the Bryansk State University: physical and mathematical sciences / biological sciences / veterinary sciences*, Vol. 1, 11–24. (In Russ.).

Gusev, V. A., Kolyagin, Yu. M., Lukankin, G. L. (1976). *Vectors in the school geometry course.* Handbook for teachers. Moscow: Prosveshchenie. (In Russ.).

Kayumov, O. R. (2015). Dialogues about the vector method. Affine problems. *Matematika v Shkole,* 8, 24-34. (In Russ.)

Kayumov, O. R. (2015) Dialogues about the vector method. Metric problems. *Matematika v Shkole,* 9, 25-35(In Russ.)

Miyazaki, M., Fujita, T. & Jones, K. (2017). Students' understanding of the structure of deductive proof. *Educational Studies in Mathematics,* 94, 223–239. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9720-9

Muzapparova, B. R., Koshanova, M. D. (2023). Ways to introduce the concept of "vector" in geometry. Q A Iasaýı atyndaģy Halyqaralyq qazaq-túrik ýnıversıtetiniń habarlary (fızıka matematıka ınformatıka serııasy), 4 (27), 20-28. https://doi.org/10.47526/2023-4/2524-0080.02

Pogorelov, A. V. (1995). Geometry: textbook for grades 7-11 general education institutions. 5-th ed. Moscow: Prosveshchenie. (In Russ.)

Potoskuev, E. V. (2019). *Vector coordinate method for solving stereometry problems.* Moscow: Exam. (In Russ.)

Potoskuev, E. V. (2008). Geometry. Textbook for 10 grade, for general education institutions with in-depth and specialized study of mathematics. Moscow: Drofa. (In Russ.)

Potoskuev, E. V. Geometry. Textbook for 11 grade, for general education institutions with in-depth and specialized study of mathematics. Moscow: Drofa. (In Russ.)

Puzyreva, E .N. (2023) Presentation of a visual-figurative model of geometric space in educational geometric activities. *Scientific notes of the Bryansk State University,* 2, 45-72. (In Russ.)

Roganovsky, N. M., Stolyar, A. A. (1974). *Vector construction of stereometry*. Minsk: Narodnaya asveta. (In Russ.)

Skopets, Z. A. (1980). Vector solution of stereometric problems. In the book: *Teaching geometry in grades 9-10*,184-230. Moscow: Prosveshchenie. (In Russ.)

Smirnova, I. M. (2008). Geometry. Grades 10-11: textbook for general education institutions (basic and profile levels). Moscow: Mnemosyna. (In Russ.)

Smirnova I. M. (2007). Geometry. Grades 7-9: textbook for general education. Moscow: Mnemosyna.

Tleuzhanov, A. B., Toybazarov, D. B. (2023). Methodological features of teaching the vector method in a school geometry course. *Vestnik of M. Kozybayev North Kazakhstan University*, 4 (60), 70-77. https://doi.org/10.54596/2958-0048-2023-4-70-77. (In Kazakh)

Uwurukundo, M. S., Maniraho, J. F., Tusiime, M. et al. (2023). GeoGebra software in teaching and learning geometry of 3-dimension to improve students' performance and attitude of secondary school teachers and students. *Educ. Inf. Technol*. https://doi.org/10.1007/s10639-023-12200-x

Weil, G. (1996). Space, time, matter. Lectures on the general theory of relativity. Moscow.

Zehavit, K., Meirav, A., Miriam, D., & Tali, M. (2022). Self-efficacy and problem-solving skills in mathematics: the effect of instruction-based dynamic versus static visualization. Interactive Learning Environments, 30(4), 759–778. DOI: 10.1080/10494820.2019.1683588

Статья поступила в редакцию 14.10.2024
Принята к публикации 24.10.2024