DOI: 10.24888/2500-1957-2025-2-20-30

УДК 372.851

ДВА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ЧЕТЫРЕХ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫХ ЛИНИЯХ ТРАПЕЦИИ

Ястребов Александр Васильевич
д.п.н., профессор
alexander.yastrebov47@gmail.com
г. Ярославль
Ярославский государственный педагогический университет им. К. Д. Ушинского

Шабанова Мария Валерьевна
д.п.н., профессор
shabanova.maria-pomorsu@yandex.ru
г. Архангельск
Северный (Арктический) федеральный университет имени М. В. Ломоносова

Аннотация. В статье решается задача о взаимном расположении четырёх замечательных прямых, связанных с трапецией. Каждая из них параллельна основаниям трапеции и обладает одним из следующих дополнительных свойств: 1) проходит через середины боковых сторон; 2) проходит через точку пересечения диагоналей; 3) делит исходную трапецию на две подобные трапеции; 4) делит исходную трапецию на две равновеликие трапеции. Приводятся два решения задачи — экспериментальное и теоретическое. Обсуждаются достоинства и несовершенства каждого из них. Показано, что экспериментальное решение требует от школьника минимум теоретических знаний, доступно для учащихся с любым, даже низким, уровнем математической подготовки, способствует созданию ситуации успеха. В то же время, экспериментальное решение приводит всего лишь к гипотезе, пусть и весьма правдоподобной. В отличие от экспериментального, теоретическое решение даёт богатый, содержательный результат, прежде всего, полный и обоснованный ответ на вопрос. Кроме того, полученные в ходе решения формулы длин вспомогательных отрезков естественным образом вводят в математический обиход несколько средних величин двух положительных чисел: среднее арифметическое, среднее гармоническое, среднее геометрическое и среднее квадратичное. Наконец, выявляется связь решаемой задачи со знаменитым неравенством Коши о средних величинах. В то же время, теоретическое решение требует гораздо более серьёзного уровня математической подготовки: знания некоторых формул, умения преобразовывать условия геометрической задачи в алгебраическую форму, владения определённой алгебраической техникой. Главное в том, что именно синергия экспериментального и теоретического метода делает авторский подход актуальным и полезным для будущих исследований. Материал статьи может быть рекомендован для внеучебной работы со школьниками.

Ключевые слова: замечательные линии трапеции, экспериментальное решение, теоретическое решение, сравнение решений

Введение

Экспериментальные и теоретические методы – две составляющие единого комплекса, обеспечивающего успешность решения как учебных, так и научных задач в большинстве сфер научно-практической деятельности, в том числе и в математике. Несмотря на это, на страницах научных математических журналов долгое время нельзя было найти сведений о применении тем или иным учёным экспериментальных методов. Упоминание о них, якобы, нарушало строгость научных рассуждений и ставило под сомнение выводы. На этот факт обратили внимание основоположники экспериментальной математики – американские учёные Дж. Борвейн и Д. Бейли: «…Главное отличие математики от других областей знания состоит в том, что её положения имеют убедительные доказательства. Однако, как практики мы не застрахованы от того, чтобы запачкать руки экспериментами – хотя мы, как правило, не готовы признать это и скрываем этот факт, если возможно» (Borwein, 2003, 4).

Следуя этой традиции, учителя математики не обучали школьников использованию экспериментальных методов при решении задач. В своей методической работе они обращались к экспериментальным методам лишь изредка, для подведения учащихся к повторному, самостоятельному переоткрытию некоторых математических фактов, для повышения доверия учащихся к правилам математических действий, вводимых без доказательства.

Сегодня ситуация кардинально изменилась. В научных публикациях стали встречаться фразы «Установлено с применением пакета Maple» или «Подтверждено компьютерными экспериментами в среде Mathematica». Изменение стиля научного математического мышления признают и сами математики (Вавилов, 2020).

Признанием образовательной значимости экспериментальных методов в обучении математике стало включение в Федеральные образовательные программы по этому предмету требования сформировать «умение проводить по самостоятельно составленному плану эксперимент, исследование по установлению особенностей математического объекта, зависимостей объектов между собой» (Федеральная рабочая программа, 8). Это требование начинает действовать со ступени основного общего образования. Как следствие, в базовые учебники (Атанасян, 2023) и в учебные пособия (Смирнов, 2018-a) и (Смирнов, 2018-b) включены задачи, предусматривающие обращение к экспериментам, причём проводимым преимущественно с использованием компьютеров.

Эти изменения поставили перед учителями математики непростой вопрос об определении роли и места компьютерных экспериментов в решении математических задач, особенно тех из них, которые ранее решались без обращения к экспериментам. Частично ответ на этот вопрос был дан нами в статье (Шабанова, 2024). В данной статье мы хотим остановиться ещё на одном аспекте использования компьютерных экспериментов, а именно, на предоставляемой ими возможности включения учащихся в исследовательскую деятельность по установлению связей между задачами учебника, которые отнесены авторами к разным тематическим разделам.

Материалы и методы

В качестве примера рассмотрим теорему о средней линии трапеции и две задачи учебника (Атанасян, 2023, № 617, № 721), посвящённые установлению свойств отрезков, параллельных основаниям трапеции и соединяющих точки её боковых сторон. Обе эти задачи имеют в учебнике статус задач повышенной сложности. Приведём их формулировки.

«№ 617. Основания трапеции равны a и b. Отрезок с концами на боковых сторонах трапеции, параллельных основаниям, разделяет трапецию на две равновеликие трапеции. Найдите длину этого отрезка».

«№ 721. Отрезок с концами на боковых сторонах трапеции параллелен её основаниям и проходит через точку пересечения диагоналей. Найдите длину этого отрезка, если основания трапеции равны a и b».

Дополним их родственной задачей: «Основания трапеции равны a и b. Отрезок с концами на боковых сторонах трапеции, параллельных основаниям, разделяет трапецию на две подобные трапеции. Найдите длину этого отрезка».

Это дополнение требует предварительной актуализации знаний учащихся о подобии произвольных фигур, так как их формированию в школьном курсе геометрии уделяется гораздо меньше времени, чем формированию знаний о подобии треугольников, или введения этих знаний. В учебнике (Атанасян, 2023, 342) дано следующее определение: «Фигура F_1 называется подобной фигуре F, если она равна некоторой фигуре F^*, гомотетичной фигуре F». Именно этим определением мы будем пользоваться в дальнейшем.

Для включения учащихся в деятельность раскрытия связей между этими задачами (возможно, решёнными ранее) объединим их условия и поставим исследовательский вопрос об установлении взаимного расположения четырёх отрезков. Сформулируем его в виде следующей задачи.

Задача. В трапеции с основаниями a и b, где $0 < a < b$, проведены четыре отрезка, которые параллельны основаниям и концы которых лежат на боковых сторонах. При этом: 1) первый отрезок соединяет середины боковых сторон; 2) второй отрезок проходит через точку пересечения диагоналей; 3) третий отрезок делит трапецию на две подобные трапеции; 4) четвёртый отрезок делит трапецию на две равновеликие трапеции. Каково взаимное расположение построенных отрезков?

Заметим, что вопрос о взаимном расположении двух геометрических фигур является одним из основных вопросов геометрии и пронизывает весь школьных курс. Мы говорим о взаимном расположении двух различных перпендикуляров к прямой, о взаимном расположении прямой и окружности, о взаимном расположении трёх медиан (высот, биссектрис) треугольника и о многом другом. В этом контексте вопрос нашей задачи о взаимном расположении неких специальных отрезков является вполне естественным.

В ситуации, когда выражение длин искомых отрезков через длины оснований трапеции заранее неизвестно учащимся, возникает естественное желание обратиться к эксперименту.

Ниже мы предложим два решения задачи, экспериментальное и теоретическое, а затем сравним достоинства и несовершенства каждого из них.

Результаты

Экспериментальное решение

Для экспериментального решения задачи учащимся потребуется динамический чертёж трапеции, то есть чертёж, допускающий изменение размеров её сторон и углов без перестройки алгоритма построения. Он может быть создан в системе динамической математики GeoGebra Classic 5 (GeoGebra. Официальный сайт программы) по следующему *алгоритмическому предписанию:*

1. С помощью инструментов *Ползунок* создайте ползунки $u \in [0, 15]$ и $v \in [u + 1, 20]$. Их значения будут задавать длину меньшего и большего основания трапеции соответственно.

2. С помощью инструмента *Отрезок с фиксированной длиной* и опции *Переименовать* постройте отрезок $[AD] = b$ длины v.

3. С помощью инструментов *Точка, Параллельная прямая*, *Окружность по центру и радиусу, Пересечение* и опции *Переименовать* постройте отрезок $[BC] = a$ длины u.

4. С помощью инструмента *Отрезок* постройте отрезки $[AB]$ и $[CD]$.

В результате получится динамический чертёж трапеции, изображённой на рис. 1. Он позволяет изменять форму и размеры трапеции в весьма широких пределах. Действительно, варьируя значения ползунков, можно получить различные соотношения между длинами оснований, а применяя инструмент *Перемещать* к точке B, можно получить различные высоты трапеции и различные углы при основаниях.

Разумеется, существуют другие алгоритмы построения динамического чертежа, которые не используют сложные инструменты *Ползунок* и *Отрезок с фиксированной длиной.* Создание различных алгоритмов построения такого чертежа может стать интересной самостоятельной частью проводимого учащимися исследования.

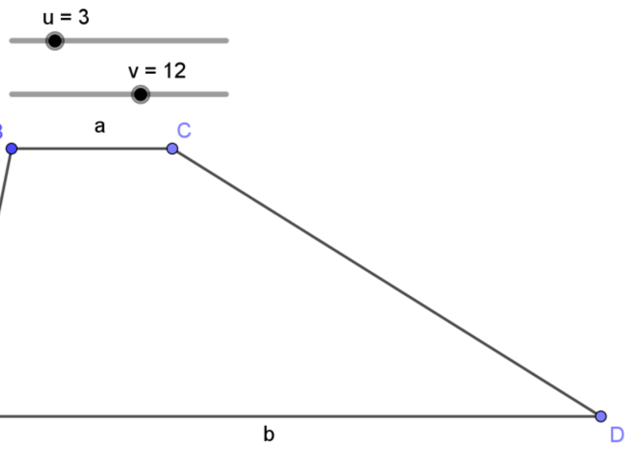

Рис. 1. Динамический чертёж трапеции

Перейдём теперь к описанию способов построения изучаемых отрезков.

1. Отрезок l_1 строится банально: инструментом *Середина или центр* находим середины E и F отрезков $[AB]$ и $[CD]$ соответственно, а затем инструментом *Отрезок* строим отрезок $[EF] = l_1$.

2. Отрезок l_2 строится чуть сложнее;

а) сначала инструментом *Отрезок* нужно провести отрезки $[AC]$ и $[BD]$;

б) затем инструментом *Пересечение* найти точку их пересечения;

в) через построенную точку провести прямую, параллельную основаниям трапеции, с помощью инструмента *Параллельная прямая;*

г) инструментом *Пересечение* найти точки пересечения G и H построенной прямой с боковыми сторонами трапеции $[AB]$ и $[CD]$ соответственно;

д) инструментом *Отрезок* провести отрезок $[GH] = l_2$;

е) скрыв «лишние» объекты с помощью опции *Показывать объект*, получите рис. 2, относящийся одновременно к пунктам 1 и 2 задачи.

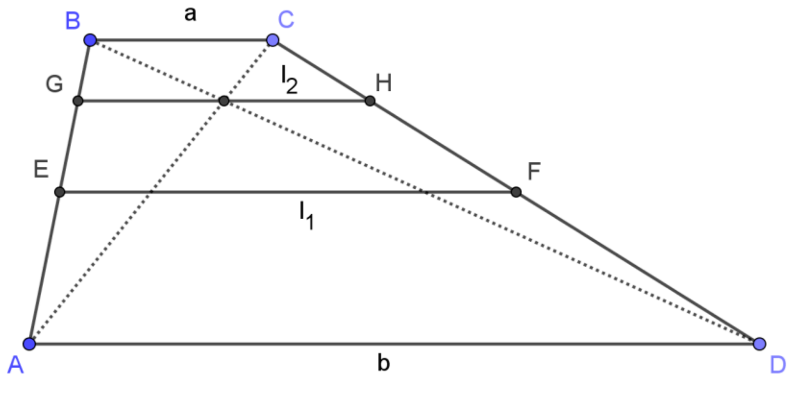

Рис. 2. Первый отрезок длиннее второго

Построив отрезки l_1 и l_2, легко обнаружить, что *первый из них находится ближе к длинному основанию трапеции, чем второй* (рис. 2). Эксперимент показывает, что такое расположение оказывается динамически устойчивым, то есть не меняется при вышеописанных варьированиях формы трапеции. Динамическая устойчивость является существенным аргументом в пользу утверждения о справедливости сделанного наблюдения *для всех* трапеций. При этом важно напомнить учащимся, что «аргумент в пользу» *не является доказательством.*

3) Построение отрезка l_3 ещё усложняется, потому что учащемуся неизвестны признаки подобия трапеций.

Разобьём это построение на несколько этапов.

1. Для построения центра гомотетии необходимо инструментом *Луч* построить лучи $[AB)$ и $[DC)$ и зафиксировать точку из пересечения инструментом *Пересечение.* Используя опцию *Переименовать*, переименуйте её в точку O.

2. Инструментом *Точка на объекте* постройте *произвольную* точку I на боковой стороне $[AB]$.

3. Затем постройте отрезок $[IJ] = l_3$, параллельный основаниям трапеции, подобно тому, как строили отрезок $[GH]$ в пункте 2.

4. Инструментом *Многоугольник* постройте трапецию $IBCJ$.

5. Если коэффициент гомотетии не найден учащимися, то его можно заменить параметром k, создав его инструментом *Ползунок*.

6. Инструментом *Гомотетия относительно точки* построить фигуру $A'I'J'D'$, гомотетичную $AIJD$ относительно центра O с коэффициентом k или найденным коэффициентом.

Выполненные построения позволяют найти положение отрезка $[IJ]$ экспериментально. В ходе его проведения нужно передвигать точку I по отрезку $[AB]$ и подбирать значения параметра k (если коэффициент неизвестен) до тех пор, пока $A'I'J'D'$ не совместится с $IBCJ$.

В результате мы получим три из четырёх изучаемых отрезков, как показано на рис. 3.

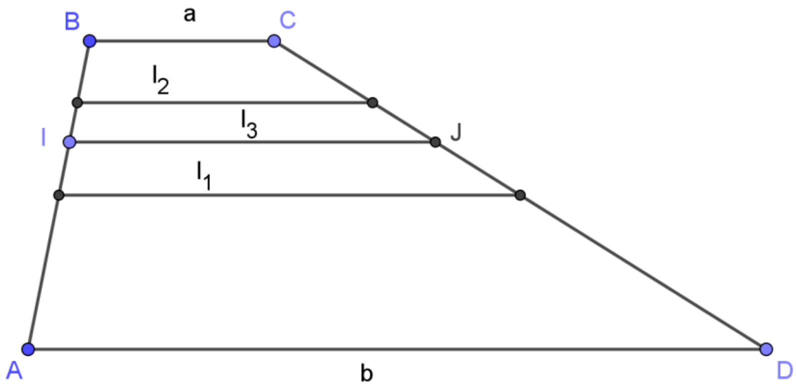

Рис. 3. Третий отрезок лежит между первыми двумя

Рисунок показывает, что отрезок l_3 располагается между отрезками l_1 и l_2. Однако динамическую устойчивость этого положения трудно проверить экспериментально, так как при каждом изменении формы или размеров трапеции $ABCD$ подбирать положение $[IJ]$ придется заново.

Тем не менее, просмотр нескольких ситуаций позволяет выдвинуть гипотезу о том, что *отрезок l_3 лежит между отрезками l_1 и l_2 вне зависимости от формы и размеров трапеции $ABCD$*.

Для построения отрезка l_4 нужно проделать следующее:

1. Инструментом *Точка на объекте* и опции *Переименовать* построить точку P на боковой стороне $[AB]$.

2. Построить искомый отрезок $[PQ] = l_4$ подобно тому, как был строен отрезок $[GH]$ в пункте 2 или отрезок $[IJ]$ в пункте 3.

3. С помощью инструмента *Многоугольник* построить трапеции $APQD$ и $PBCQ$. На *Панели объектов* эти трапеции отразятся в разделе «Четырёхугольники» в виде $q1$ и $q2$ с указанием их площадей.

4. С помощью опции *Свойства* перейти в раздел *Основные* каждой из построенных трапеций. В разделе *Показывать обозначение* из выпадающего списка выбрать *Значение.* Это позволит вывести на экран значения площадей трапеций $q1$ и $q2$.

Для экспериментального подбора положения отрезка $[PQ]$ нужно инструментом *Перемещение* двигать точку P по отрезку $[AB]$ до тех пор, пока значения площадей $q1$ и $q2$ не совпадут, хотя бы примерно. В результате получены все четыре отрезка, как показано на рис. 4.

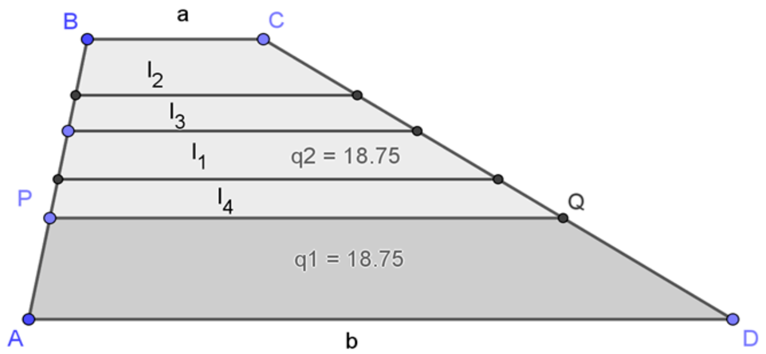

Рис. 4. Последний отрезок самый длинный

Рисунок 4 показывает, что отрезок l_4 располагается между основанием $[AD]$ и отрезком l_1. Однако динамическую устойчивость этого вывода также трудно проверить экспериментально, как и вывод относительно отрезка l_3.

Тем не менее просмотр нескольких ситуаций позволяет выдвинуть гипотезу о том, что *отрезок l_4 лежит между отрезком l_1 и бóльшим основанием трапеции $ABCD$ вне зависимости от её формы и размеров.*

Теоретическое решение

Вопрос о взаимном расположении искомых отрезков можно решить просто: чем короче отрезок, тем ближе к короткому основанию он находится. Это означает, что нужно найти длины этих отрезков. Эти соображения задают направление теоретическому решению задачи и позволяют использовать результаты о длинах отрезков, полученные ранее.

Обозначим исследуемые отрезки через l_1, l_2, l_3, l_4 в соответствии с пунктами 1–4 исходной задачи.

1) Из школьного курса геометрии учащимся известно, что длина средней линии трапеции вычисляется по формуле
$$l_1 = \frac{a+b}{2}.$$
2) Во многих источниках, например, в статье (Шабанова, 2024), они могут найти доказательство формулы
$$l_2 = \frac{2ab}{a+b}.$$
3) Выражение длины отрезка l_3 легко получат с опорой на свойство пропорциональности соответственных элементов подобных фигур:
$$\frac{a}{l_3} = \frac{l_3}{b}.$$

Отсюда
$$l_3 = \sqrt{ab}.$$

4) Вывод формулы длины отрезка PQ несколько сложнее, но опирается на известные учащимся формулы. Приведём его.

Отрезок $[PQ]$ делит трапецию на две равновеликие трапеции. Проведём через точку B высоту исходной трапеции и обозначим ее части через h_1 и h_2 (рис. 5).

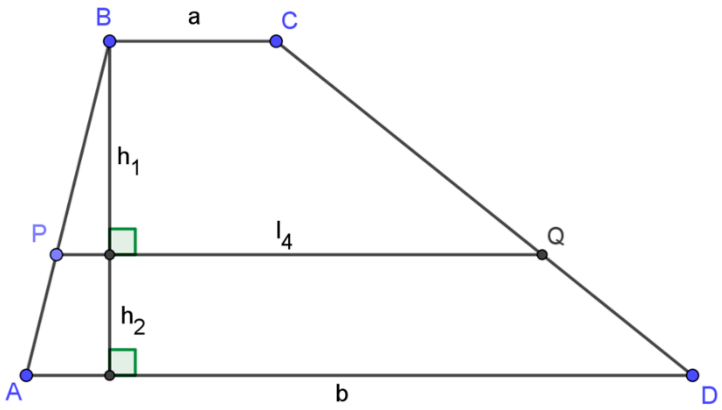

Рис. 5. Равновеликие трапеции

Условия задачи состоят в том, что для *трёх* трапеций (а их здесь три!) имеют место следующие соотношения между площадями:

$$\begin{cases} S_{ABCD} = 2S_{PBCQ} \\ S_{ABCD} = 2S_{APQD} \end{cases}.$$

Перепишем эти соотношения, воспользовавшись формулой площади трапеции:

$$\begin{cases} \dfrac{a+b}{2}\cdot(h_1+h_2) = 2\cdot\dfrac{a+l_4}{2}\cdot h_1 \\ \dfrac{a+b}{2}\cdot(h_1+h_2) = 2\cdot\dfrac{l_4+b}{2}\cdot h_2 \end{cases}.$$

В результате получилась «плохая», труднообозримая система, в которой участвуют *пять* величин: $a,\ b,\ l_4,\ h_1,\ h_2$. Впрочем, стратегия действий становится достаточно ясной, если мы вспомним смысл этих величин: a и b – это исходные данные, l_4 – это искомая величина, а h_1 и h_2 – это обозначения, введённые для удобства записи. Очевидно, что нужно исключить *две вспомогательные величины* h_1 и h_2.

Для исключения вспомогательных величин перепишем каждое уравнение в таком виде, чтобы обе величины h_i находились в правых частях уравнения:

$$\begin{cases} \dfrac{a+b}{a+l_4} = \dfrac{2h_1}{h_1+h_2} \\ \dfrac{a+b}{l_4+b} = \dfrac{2h_2}{h_1+h_2} \end{cases}.$$

Сложив два уравнения полученной системы, мы исключим вспомогательные величины:

$$\frac{a+b}{a+l_4} + \frac{a+b}{l_4+b} = 2.$$

Если отсюда выразить искомую величину l_4, то получим, что

$$l_4 = \sqrt{(a^2+b^2)/2}.$$

Теперь, когда учащиеся нашли длины всех отрезков, стало очевидным, что они не зависят от формы трапеции. Впрочем, им по-прежнему не известно, какой из отрезков длиннее. Для выявления соотношений между длинами можно предложить учащимся провести *вычислительный эксперимент*. Для проведения эксперимента им нужно придавать различные значения исходным данным a и b, вычисляя длины l_i и сравнивая их между собой. В таблице 1 приведены некоторые результаты такого эксперимента.

Таблица 1.
Данные вычислительного эксперимента

a	b	l_1	l_2	l_3	l_4
2	8	5	3,2	4	$\sqrt{34} \approx 5{,}83$
2	6	4	3	$2\sqrt{3} \approx 3{,}46$	$2\sqrt{5} \approx 4{,}47$
3	5	4	3,75	$\sqrt{15} \approx 3{,}87$	$\sqrt{17} \approx 4{,}12$

Представленные в таблице данные показывают, что в каждом из рассмотренных случаев справедливо неравенство: $l_2 < l_3 < l_1 < l_4$. Таким образом, *вычислительный эксперимент* подтверждает гипотезу, выдвинутую с опорой на *конструктивный эксперимент.*

Полученные формулы длин отрезков позволяют создать динамический чертёж, на котором позиции всех четырёх отрезков будут определены точно, что позволяет повысить надёжность эксперимента, направленного на проверку зависимости/независимости взаимного положения отрезков l_1, l_2, l_3, l_4 от формы и размеров трапеции. Компьютерный эксперимент с таким чертежом позволяет убедиться также в том, что при $a = b$, то есть для параллелограмма, выполняются равенства $l_2 = l_3 = l_1 = l_4 = a$. Можно провести такой эксперимент самостоятельно, перейдя по QR-коду (рис. 6).

Рис. 6. QR-код для перехода к динамическому чертежу

Очевидно, что сколь бы ни был надёжен эксперимент, он не даёт полной *гарантии* справедливости утверждений для любых трапеций.

Постановка задачи доказательства гипотезы о справедливости при $0 < a \leq b$ цепочки неравенств:

$$a \leq \frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq b,$$

естественным образом выводит учащихся за рамки геометрии, переводя её в область алгебры. *Доказательство каждого из неравенств может быть выполнено по отдельности методом тождественных преобразований.*

Так в математический обиход школьника приходит знаменитое неравенство Коши, которое привлекает внимание математиков в течение длительного времени.

Сравнение двух решений

Итак, обсуждение задачи закончено. Нам осталось указать на сравнительные достоинства и несовершенства экспериментального и теоретического решений.

Очевидно, что теоретическое решение задачи дало учащимся богатый, содержательный результат. Они дали обоснованный ответ на поставленный в задаче вопрос; вывели формулы для нахождения длин изучаемых отрезков; обнаружили серию неравенств, теоретическая значимость которых выходит далеко за рамки решённой задачи; применили метод формального доказательства неравенств. Экспериментальное решение в этом смысле оказалось значительно беднее, так как полученный результат привёл их всего лишь к гипотезе (пусть и весьма правдоподобной) о взаимном расположении изучаемых отрезков, которая требует дальнейшего теоретического осмысления и обоснования.

Если оценивать экспериментальный и теоретический методы решения задачи с точки зрения их доступности для учащихся, то здесь пальму первенства следует отдать экспериментальному методу, так как для его реализации достаточно минимума теоретических знаний. Действительно, для построения динамического чертежа и отрезков l_1 и l_2 им потребовались только знания определения трапеции и её элементов, а для построения отрезков l_3 и l_4 – определения подобных и равновеликих фигур. Теоретическое решение требовало гораздо более серьёзного уровня математической подготовки: знания некоторых формул, умения преобразовывать условия геометрической задачи в алгебраическую форму, владения определённой алгебраической техникой. Отметим, что доступность экспериментального метода является весьма важной, потому что позволяет создать ситуацию успеха даже для учащихся с низким уровнем математической подготовки.

Заключение

По мнению авторов, наибольшей педагогической эффективностью обладает *комплексное, совместное* использование экспериментального и теоретического решений. С одной стороны, именно эксперимент привёл к гипотезе, на подтверждение истинности которой было направлено теоретическое решение. Благодаря ему был создан наглядный образ ситуации, который «заставил» отыскивать формулы для нахождения длин изучаемых отрезков через длины оснований трапеции. С другой стороны, теоретически полученные формулы позволили улучшить динамический чертёж и тем самым повысить надёжность результатов эксперимента, а согласованность результатов теоретического и экспериментального решения задачи повысило доверие к полученным результатам.

Список литературы

Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кардомцев С.Б. и др. Математика. Геометрия: 7–9 классы: базовый уровень: учебник. 14-е изд. перераб. М.: Просвещение, 2023.

Вавилов Н.А. Компьютер как новая реальность математики // Компьютерные инструменты в образовании. 2020. Вып. 2. С. 1–21. DOI: 10.32603/2071-2340-2020-2-5-26

Смирнов В.А., Смирнова И.М. Геометрия с GeoGebra: Планиметрия. М.: Прометей, 2018.

Смирнов В.А., Смирнова И.М. Геометрия с GeoGebra: Стереометрия. М.: Прометей, 2018.

Федеральная рабочая программа по учебному предмету «Математика»: базовый уровень / Сайт «Единое содержание общего образования». Раздел – рабочие программы. URL: https://edsoo.ru/rabochie-programmy (дата обращения 22.04.2025).

Шабанова М.В., Удовенко Л.Н., Ястребов А.В. Компьютерные эксперименты в решении школьных геометрических задач // Математика в школе. 2024. № 8. С. 15–29. DOI: 10.47639/0130-9358_2024_8_15

Borwein J. & Bailey D. Mathematics by Experiment: Plausible Reasoning in the 21st Century and Experiments in Mathematics: Computational Paths to Discovery, 2003. URL: https://www.academia.edu/19221119/Mathematics_by_experiment_Plausible_reasoning_in_the_21st_century_Experimentation_in_mathematics_Computational_paths_to_discovery (дата обращения 22.04.2025).

GeoGebra. Официальный сайт программы: страница для скачивания приложений. URL: https://www.geogebra.org/download (дата обращение 18.05.2024).

TWO SOLUTIONS TO THE PROBLEM OF THE FOUR REMARKABLE LINES OF THE TRAPEZIUM

Yastrebov A. V.
PhD (Mathematics), D. Sci. (Pedagogy)
Full Professor
alexander.yastrebov47@gmail.com
Yaroslavl
Yaroslavl State Pedagogical University named after K. D. Ushinsky

Shabanova M. V.
D. Sci. (Pedagogy)
Full Professor
shabanova.maria-pomorsu@yandex.ru
Arkhangelsk
North (Arctic) Federal University named after M. V. Lomonosov

Abstract. The article solves the problem of the mutual arrangement of four remarkable straight lines associated with a trapezium. Each of them is parallel to the bases of a trapezium. Besides, each of them has one of the following additional properties: 1) passes through the midpoints of the sides; 2) passes through the intersection point of the diagonals; 3) divides the trapezium into two similar ones; 4) divides the trapezium into two trapeziums of equal area. Two solutions to the problem are given, experimental and theoretical ones. The advantages and imperfections of each of them are discussed. It is shown that an experimental solution requires minimal theoretical knowledge; it is available for pupils with mathematical skills of low level; it generates an atmosphere of success in a classroom. On the other hand, an experimental solution leads us to a hypothesis and proves nothing. A theoretical solution gives us a reach, significant result, i.e., a compete well-founded answer the question. Besides, we obtain some formulas for the length of segments, which introduce arithmetical mean, geometrical mean and so on into school practice. And last but not least: the connection of the problem with the famous Cauchy inequality is revealed. Unfortunately, a theoretical solution requires mathematical skills of high level. The main statement looks as follows: it is a synergy of experimental and theoretical methods, that makes the authors' approach topical and useful for further research. The paper can be recommended for extracurricular study of mathematics.

Keywords: remarkable lines in trapezium, experimental study, theoretical study, comparison of methods

References

Atanasyan, L. S., Butuzov, V. F., Kardomtsev, S. B. and others (2023). *Matematika. Geometrija: 7–9 klassy: bazovyj uroven': uchebnik*. 14-e izd. pererab. Moscow: Prosveshchenie. (In Russ).

Borwein, J. & Bailey, D. (2003). Mathematics by Experiment: Plausible Reasoning in the 21st Century and Experiments in Mathematics: Computational Paths to Discovery. URL: https://www.academia.edu/19221119/Mathematics_by_experiment_Plausible_reasoning_in_the_21st_century_Experimentation_in_mathematics_Computational_paths_to_discovery. (date 22.04.2025).

Federal'naja rabochaja programma po uchebnomu predmetu «Matematika»: bazovyj uroven'. Sajt «Edinoe soderzhanie obshhego obrazovanija». Razdel – rabochie programmy (date 22.04.2025).

GeoGebra. Official site of program. URL: https://www.geogebra.org/download (date 18.05.2024).

Shabanova, M. V., Udovenko, L. N., Yastrebov, A. V. (2024). Computer experiments in solving school geometric tasks. *Mathematics at school*, 8, 15-29. DOI: 10.47639/0130-9358_2024_8_15 (In Russ., abstract in Eng.)

Smirnov, V. A., Smirnova, I. M. (2018-a). *Geometriya s GeoGebra: Planimetriya*. Moscow: Prometej. (In Russ).

Smirnov, V. A., Smirnova, I. M. (2018-b). *Geometriya s GeoGebra: Steromatriya*. Moscow: Prometej. (In Russ).

Vavilov, N. A. Computers as Novel Mathematical Realiry. I. Personal Account (2020). *Computer Tools in Education*, 2, 1-21. DOI: 10.32603/2071-2340-2020-2-5-26 (In Russ., abstract in Eng.)

Статья поступила в редакцию 26.04.2025
Принята к публикации 05.05.2025